剪断座屈した矩形パネルのランダム加振に対する非線形応答の解析*

An Analytical Study of Nonlinear Response of Shear Buckled Rectangular Panels to Random Excitation

末 益 博 志**・小 林 繁 夫***

Hiroshi SUEMASU and Shigeo KOBAYASHI

Abstract

Probabilistic properties of nonlinear response of panels buckled by shear deformation to random excitation are studied in the use of a simulation method to disclose the effects of shear buckling and antisymmetric mode on the sonic fatigue. Simultaneous nonlinear vibrational equations where the effect of shear buckling is considered are derived in the use of a variational principle derived from the principle of virtual work with the aid of the LAGRANGE multiplier method. These equations are solved numerically by NEWMARK's β method. The fatigue life is calculated with a cumulative damage rule. These results show that the effects of shear buckling are remarkable. When the sound pressure is small, the panel vibrates in the vicinity of the statically equilibrium point after buckling. When the pressure becomes large, the panel sometimes jumps to another equilibrium point on the opposite side. When the pressure is very large, the panel vibrates almost always through zero deflection with large amplitude like a flat panel. Namely, the larger the pressure becomes, the smaller the effect of shear buckling on the response of the deflection becomes. However the effect on the response of the strain does not become small. The fatigue life is greatly shortened by shear buckling for each pressure level.

1. 緒 言

パネルの音響疲労に与える剪断座屈の影響を明らかにすることは重要な問題である。この問題について著者の1人は座屈後の静的平衡状態での変形形状を用いた1自由度近似で得られた振動方程式から FOKKER-PLANCK の方程式の解を求めて、振動特性を論じた¹⁾。しかし、剪断座屈をしたパネルの特性を論ずるには本質的に少なくとも2自由度解析が必要であるが、本問題に関して多自由度解析をして振動特性を明らかにし

た文献は見あたらない。そこで本論文では剪断座屈をした周辺単純支持矩形板について多自由度近似方程式を導き、これをシミュレーション法により数値実験的に解いて確率特性を求め、剪断変形の影響を明らかにした。さらに音響疲労寿命を線形累積損傷則の仮定により計算し、剪断座屈の疲労寿命に与える影響を明らかにした。この問題を解くためとくに、仮想仕事の原理から、ラグランジュの乗数法により、周辺での任意の変位境界条件を近似的に与えることのできる非線形振動方程式を導いた。定式化に当り歪速度比例型の減衰力を仮定している。

2. 解 析 理 論

2.1 仮想仕事の原理による方程式の導出 応力

$\sigma^T = [\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}]$ と歪 $\epsilon^T = [\epsilon_x, \epsilon_y, \gamma_{xy}]$ の間に

$$\sigma = \sigma^e + \sigma^v \quad (1)$$

$$\sigma^e = [B]\epsilon \quad (2)$$

$$[B] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix}$$

$$\sigma^v = (\eta_0/\omega_r)(\partial\sigma^e/\partial t) \quad (3)$$

なる線形粘弾性の関係が成り立つと仮定する。ここで E はヤング率、 ν はポアソン比である。(3)式では ω_r をパネルの代表振動数にとって粘性係数を η_0/ω_r と表わした。

本論文では境界で板面内の変位条件を与える必要があるため、振動方程式を次に示すように仮想仕事の原理²⁾より導く。

境界条件が、面外方向には単純支持、面内方向には変位拘束、すなわち、

$$w=0, \quad M_n = \bar{M}_n (=0) \quad (4)$$

$$u_n = \bar{u}_n, \quad u_s = \bar{u}_s \quad (5)$$

なる問題を考える。ここで $\bar{u}_n, \bar{u}_s$ は境界での面内方向の強制変位、 $\bar{M}_n$ は境界におけるモーメントを表わす。

仮想仕事 $\delta'W$ は

$$\delta'W = - \iint_S [(N_{x,x} + N_{xy,y} + N_{x^v,y} + N_{xy^v,x})\delta u$$

* 昭和56年7月18日、第23回構造強度に関する講演会で発表。昭和56年8月27日原稿受理

** 東京大学工学部境界領域研究施設

*** 東京大学工学部航空学科

$$\begin{aligned}
& + (N_{xy,z} + N_{y,y} + N_{xy^*,z} + N_{xy^*,y}) \delta v \\
& + [M_{x,zz} + 2M_{xy,z} + M_{y,yy} + M_{x^*,zz} \\
& + 2M_{xy^*,z} + M_{y^*,yy} \\
& + \{(N_x + N_x^*)w, z + (N_y + N_y^*)w, y\}, z \\
& + \{(N_{xy} + N_{xy^*})w, z + (N_y + N_y^*)W, y\}, y \\
& - \rho h w,_{zz} + p(x, y, t)] \delta w \Big] dx dy \\
& - \int_C (M_n + M_n^*) \delta w,_{ns} ds \quad (6)
\end{aligned}$$

と書き下せる。ここで $N_x, \dots$ は断面力, $M_x, \dots$ は断面モーメント, u, v, w はそれぞれ x, y, z 方向の変位を表わす。 $p(x, y, t)$ は z 方向の分布外力, ρ は板の密度, h は板厚, S は平板の領域, C は境界を意味する。また上つき添字(*)は粘性項, $(, x)$ は添字 x に関する偏微分を表わす。

(6)式を変形すると

$$\begin{aligned}
\delta' W = & \delta A(\varepsilon_{x0}, \varepsilon_{y0}, \gamma_{xy0}, w) \\
& + \iint_S [N_x^* \delta \varepsilon_{x0} + N_y^* \delta \varepsilon_{y0} + N_{xy}^* \delta \gamma_{xy0} \\
& - M_x^* \delta w,_{zz} - M_y^* \delta w,_{yy} - 2M_{xy}^* \delta w,_{zy} \\
& + (\rho h w,_{zz} - p) \delta w] dx dy \quad (7)
\end{aligned}$$

となる。ここで $A(\varepsilon_{x0}, \varepsilon_{y0}, \gamma_{xy0}, w)$ は弾性歪エネルギー, $\varepsilon_{x0}, \varepsilon_{y0}, \gamma_{xy0}$ は中央面の歪成分で, 平板の有限変形の場合には, 変位 u, v, w で

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{x0} = & u,_{xx} + w,_{zz}/2 \\
\varepsilon_{y0} = & v,_{yy} + w,_{zz}/2 \quad (8)
\end{aligned}$$

$$\gamma_{xy0} = u,_{yy} + v,_{xx} + w,_{zy}$$

と表わされる。(7)式を考慮して

$$\begin{aligned}
I_1(u, v, w) \\
= & A + \iint_S [N_x^* \varepsilon_{x0} + N_y^* \varepsilon_{y0} + N_{xy}^* \gamma_{xy0} \\
& - M_x^* w,_{zz} - M_y^* w,_{yy} \\
& - 2M_{xy}^* w,_{zy} + (\rho h w,_{zz} - p) w] dx dy \quad (9)
\end{aligned}$$

なる汎関数を導入する。この汎関数の変分に当たっては, N_x^*, M_x^* などおよび $(\rho h w,_{zz} - p)$ を外力として扱うものとする。 ε_{x0} などは(8)式より与えられる変位の関数である。

(8)式および(5)式の条件をラグランジュの乗数を用いて(9)式の汎関数に含めると

$$\begin{aligned}
I_2(u, v, w, \varepsilon_{x0}, \varepsilon_{y0}, \gamma_{xy0}, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5) \\
= & I_1 - \iint_S [\lambda_1 \{\varepsilon_{x0} - (u,_{xx} + w,_{zz}/2)\} \\
& + \lambda_2 \{\varepsilon_{y0} - (v,_{yy} + w,_{zz}/2)\} \\
& + \lambda_3 \{\gamma_{xy0} - (u,_{yy} + v,_{xx} + w,_{zy})\}] dx dy \\
& - \int_C [\lambda_4 (u_n - \bar{u}_n) + \lambda_5 (u_s - \bar{u}_s)] ds \quad (10)
\end{aligned}$$

が導かれる。ここで u_n, u_s はそれぞれ境界に垂直および

び接線方向の変位を表わす。次に $\delta I_2 = 0$ より導かれる EULER の微分方程式のうち必要なものを記すと,

$$\begin{aligned}
\delta \varepsilon_{x0}; \{Eh/(1-\nu^2)\}(\varepsilon_{x0} + \nu \varepsilon_{y0}) + N_x^* = \lambda_1 \\
\delta \varepsilon_{y0}; \{Eh/(1-\nu^2)\}(\varepsilon_{y0} + \nu \varepsilon_{x0}) + N_y^* = \lambda_2 \quad (11)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta \gamma_{xy0}; \{Eh/2(1+\nu)\} \gamma_{xy0} + N_{xy}^* = \lambda_3 \\
\delta u; \partial \lambda_1 / \partial x + \partial \lambda_3 / \partial y = 0 \\
\delta v; \partial \lambda_3 / \partial x + \partial \lambda_2 / \partial y = 0 \quad (12)
\end{aligned}$$

である。(12)式より

$$\lambda_1 = h \tilde{F},_{yy}, \quad \lambda_2 = h \tilde{F},_{xx}, \quad \lambda_3 = -h \tilde{F},_{xy} \quad (13)$$

なる応力関数 $\tilde{F}$ が導かれる。境界積分の項から導かれる条件式は, λ_1 などを(13)式を用いて $\tilde{F}$ で示して

$$\lambda_4 = h \tilde{F},_{nn}, \quad \lambda_5 = -h \tilde{F},_{ns} \quad (14)$$

と表わされる。

(11), (13), (14)式の関係を(10)式に代入し, 一部分積分を行って面外境界条件を用いると, I_2 を w と $\tilde{F}$ とで次のように表わすことができる。

$$\begin{aligned}
I_3(w, \tilde{F}) \\
= & \iint_S \left[-\frac{h}{2E} [(\Delta \tilde{F})^2 + 2(1+\nu)(\tilde{F},_{xy})^2 \right. \\
& - \tilde{F},_{xx} \tilde{F},_{yy}] - \frac{2}{h} \{(N_x^* + N_y^*) \cdot \Delta \tilde{F} \\
& - (1+\nu)(2\tilde{F},_{xy} N_{xy}^* + \tilde{F},_{xx} N_x^* + \tilde{F},_{yy} N_y^*)\} \\
& + \frac{1}{h^2} \{(N_x^* + N_y^*)^2 + 2(1+\nu)(N_{xy}^*)^2 \\
& - N_x^* N_y^*\} + \frac{D}{2} \{(\Delta w)^2 + 2(1-\nu)(w,_{xy})^2 \\
& - w,_{xx} w,_{yy}\} + \frac{h}{2} \{\tilde{F},_{yy} w,_{xx} + \tilde{F},_{xx} w,_{yy} \\
& - 2\tilde{F},_{xy} w,_{zy}\} + q_s w \Big] dx dy \\
& + h \int_C [\tilde{F},_{nn} \bar{u}_n - \tilde{F},_{ns} \bar{u}_s] ds \quad (15)
\end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned}
q_s = & -p + \rho h w,_{zz} \\
& - (M_x^*,_{zz} + M_y^*,_{yy} + 2M_{xy}^*,_{zy}) \quad (16)
\end{aligned}$$

である。次に(3)式を考慮すると, 断面力については弾性成分, 粘性成分ともに次のような応力関数で表わされる。すなわち,

$$\begin{aligned}
N_x^* = & h F^*,_{yy}, \quad N_y^* = h F^*,_{xx}, \\
N_{xy}^* = & -h F^*,_{xy} \quad (17)
\end{aligned}$$

と表わすと, 弾性成分を表わす応力関数 F は,

$$F = \tilde{F} - F^* \quad (18)$$

である。断面モーメントの粘性成分 M_x^* なども, 同様に(3)式の考慮の下に $(\partial w / \partial t)$ で表わすことができ, (16)式の第3項は,

$$\begin{aligned}
- (M_x^*,_{zz} + M_y^*,_{yy} + 2M_{xy}^*,_{zy}) \\
= (D \eta_0 / w_r) \Delta \Delta w,_{zz} \quad (19)
\end{aligned}$$

となることが導かれる。(18)式を(15)式に代入すると

I_4 は,

$$\begin{aligned}
 I_4(w, F) &= \iint_S \left[-\frac{h}{2E} \{ (\Delta F)^2 + 2(1+\nu)(F, w_{,xy}) \right. \\
 &\quad \left. - F, w_{,xx} F, w_{,yy} \} + \frac{D}{2} \{ (\Delta w)^2 \right. \\
 &\quad \left. + 2(1-\nu)(w, w_{,xy}^2 - w, w_{,xx} w, w_{,yy}) \} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{h}{2} \{ (F, w_{,xy} + F, w_{,xy}) w, w_{,x}^2 \right. \\
 &\quad \left. + (F, w_{,xx} + F, w_{,xx}) w, w_{,y}^2 \right. \\
 &\quad \left. - 2(F, w_{,xy} + F, w_{,xy}) w, w_{,x} w, w_{,y} \} + q_x w \right] dx dy \\
 &\quad + h \int_C [F, u_n - F, u_s] ds \quad (20)
 \end{aligned}$$

と書ける。(20)式の付帯条件は、面外方向の境界条件だけである。 I_4 の成分から得られる EULER の微分方程式は、適合条件式および平衡方程式でそれぞれ

$$\delta F; \Delta \Delta F - E[w, w_{,xy}^2 - w, w_{,xx} w, w_{,yy}] = 0 \quad (21)$$

$$\begin{aligned}
 \delta w; D \Delta \Delta w - h[(F + F), w_{,xy} w, w_{,xx} \\
 + (F + F), w_{,xx} w, w_{,yy} - 2(F + F), w_{,xy} w, w_{,y}] \\
 + q_x = 0 \quad (22)
 \end{aligned}$$

である。

2.2 剪断座屈を考慮した非線形振動方程式 面内境界条件が周辺 ($x=0, a, y=0, b$) で

$$\begin{aligned}
 u &= \bar{u}(x, y) = \varepsilon_1 x + \gamma_2 y, \\
 v &= \bar{v}(x, y) = \gamma_1 x + \varepsilon_2 y \quad (23)
 \end{aligned}$$

なる矩形板の問題を解析する。変位 w を周辺単純支持の境界条件を満たすモード $\phi_{ij}(\xi, \eta)$ で

$$w = h \sum_i \sum_j W_{ij}(t) \phi_{ij}(\xi, \eta) \quad (24)$$

$$\phi_{ij}(\xi, \eta) = \sin i\xi \sin j\eta, \quad \xi = \pi x/a, \quad \eta = \pi y/b \quad (25)$$

と展開する。(24)式を(21)式に代入し、 F の特解 F^p を求める。斉次解 F^h を

$$\begin{aligned}
 F^h &= \sigma_x^h (y^2/2) + \sigma_y^h (x^2/2) - \tau_{xy}^h (xy) \\
 &\quad + \sum_{i=1}^4 \alpha_i^h (x-a/2)^{i-1} (y-b/2)^{i-1} \quad (26)
 \end{aligned}$$

と仮定する。分布外力は

$$p(\xi, \eta, \tau) = p_0(\tau) \Psi(\xi, \eta) \quad (27)$$

$$\left(\int_0^\pi \int_0^\pi \{ \Psi(\xi, \eta) \}^2 d\xi d\eta = \pi^2 \right)$$

第1図 矩形板の剪断変形

のように空間的には確定関数 $\Psi(\xi, \eta)$ で表わされる場合を扱う。(24)式の w および $F = F^p + F^h$ を I_4 に代入し、 W_{ij} および σ_x^h, α_i^h などの未定係数で微分して連立方程式系を求める。これから σ_x^h などを消去して W_{ij} だけについての非線形の振動方程式系

$$\begin{aligned}
 \frac{4ab}{\pi^4 D h} \frac{\partial I_4}{\partial W_{pq}}; M_{pq} \dot{W}_{pq} + K_{pq} \left(W_{pq} + \eta_0 \frac{\omega_0}{\omega_r} \dot{W}_{pq} \right) \\
 + (K_{1pq} \bar{\varepsilon}_1 + K_{2pq} \bar{\varepsilon}_2) W_{pq} + \gamma_{12} \sum_i \sum_j K_{3pqij} W_{ij} \\
 + \sum_i \sum_j \sum_k \sum_l \sum_m \sum_n (D_{pqijklmn} W_{ij}) W_{kl} W_{mn} \\
 + \eta_0 \frac{\omega_0}{\omega_r} \bar{D}_{pqijklmn} \dot{W}_{ij}) W_{kl} W_{mn} \\
 - F_{pq} f = 0 \quad (28)
 \end{aligned}$$

を得る。ここで(28)式のパラメータはそれぞれ

$$\bar{\varepsilon}_1 = \varepsilon_1 / \varepsilon_{cr}, \quad \bar{\varepsilon}_2 = \varepsilon_2 / \varepsilon_{cr}, \quad \gamma_{12} = (\gamma_1 + \gamma_2) / \varepsilon_{cr} \quad (29)$$

$$\varepsilon_{cr} = \pi^2 (1 + \lambda^2) h^2 / \{ 12(1 + \nu) a^2 \} \quad (30)$$

$$\tau = \omega_0 t \quad (31)$$

$$\omega_0 = \{ \pi^2 (1 + \lambda^2) h / a^2 \} \sqrt{E / \{ 12(1 + \nu^2) \rho \}} \quad (32)$$

$$f(\tau) = \{ 4a^2 b^2 / (\pi^6 D h) \} p_0(\tau) \quad (33)$$

$$\lambda = a/b \quad (34)$$

である。また $(\cdot)$ は τ に関する微分を表わす。(27)式の各係数は

$$\begin{aligned}
 M_{pq} &= 1/\beta_{1,1}, \quad K_{pq} = 1/\beta_{p,q} \\
 K_{1pq} &= a_0(p^2 - \nu \lambda^2 q^2), \\
 K_{2pq} &= a_0(\lambda^2 q^2 - \nu p^2) \\
 K_{3pqij} &= \{ a_0(1 - \nu) / 2\pi^2 \lambda \} \bar{\mathcal{B}}^0_{pqij} \\
 D_{pqijklmn} &= \mathcal{A}_{pqijklmn} + \sum_{s=0}^2 b_s \mathcal{B}^s_{pqij} \mathcal{B}^s_{klmn} \\
 \bar{D}_{pqijklmn} &= 2\mathcal{A}_{pqijklmn} + 2 \sum_{s=0}^2 b_s \mathcal{B}^s_{pqij} \bar{\mathcal{B}}^s_{klmn} \\
 F_{pq} &= \int_0^\pi \int_0^\pi \Psi(\xi, \eta) \phi_{pq}(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad (35)
 \end{aligned}$$

と書ける。ここで

$$\begin{aligned}
 \mathcal{A}_{pqijklmn} &= \{ 3(1 - \nu^2) / 8 \} \sum_K' \sum_L' \sum_P' \sum_Q' K L P Q \\
 &\quad \times (il - K L j k)^2 (mq - P Q n p)^2 \beta_{i+Kk, j+Ll} \\
 &\quad \times \delta_{i+Kk, m+Pp}^* \delta_{j+Ll, n+Qq}^* \\
 &\quad + 3(i^2 k^2 / \lambda^2 + \lambda^2 j^2 l^2 + \nu i^2 l^2 + \nu j^2 k^2) \\
 &\quad \times \delta_{i,p} \delta_{k,m} \delta_{j,q} \delta_{l,n} \\
 \bar{\mathcal{B}}^0_{ijkl} &= \bar{\mathcal{B}}^0_{ijkl} - \sum_K' \sum_L' \mathcal{U}_{ijkl}(K, L) \bar{\rho}_{i+Kk} \bar{\rho}_{j+Ll} \\
 \bar{\mathcal{B}}^1_{ijkl} &= \sum_K' \sum_L' (K il + L j k) \bar{\rho}_{i+Kk} \bar{\rho}_{j+Ll} \\
 \mathcal{B}^1_{ijkl} &= \bar{\mathcal{B}}^1_{ijkl} + \sum_K' \sum_L' \lambda \mathcal{U}_{ijkl}(K, L) \psi_{i+Kk} \bar{\rho}_{j+Ll}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{\mathcal{B}}^1_{ijkl} &= -\sum'_K \sum'_L \{(\lambda j l - \nu i k / \lambda) \delta_{i, k} / 2 \\
&\quad + \lambda (K i l + L j k) (j + L l) \phi_{i+Kk} \} \varphi_{j+Ll} \\
\bar{\mathcal{B}}^2_{ijkl} &= \bar{\mathcal{B}}^1_{ijkl} + \sum'_K \sum'_L \mathcal{U}_{ijkl}(K, L) \bar{\rho}_{i+Kk} \phi_{j+Ll} \\
\bar{\mathcal{B}}^2_{ijkl} &= -\sum'_K \sum'_L \{ (i k / \lambda - \nu j l) \delta_{j, l} / 2 \\
&\quad + \lambda (K i l + L j k) (i + K k) \phi_{j+Ll} \} \varphi_{i+Kk} \\
\mathcal{U}_{ijkl}(K, L) &= 2(1+\nu) K L (i + K k) (j \\
&\quad + L l) (i l - K L j k)^2 \times \beta_{i+Kk, j+Ll} \\
a_0 &= (1+\lambda^2) / \{ \lambda^2 (1+\nu) \} \\
b_0 &= 3(1-\nu) / 4\pi^4 \\
b_1 &= 12b_0 / (2\lambda^2 + 1 - \nu) \\
b_2 &= 12b_0 / (2 + \lambda^2 - \nu \lambda^2)
\end{aligned} \quad (36)$$

$$\begin{aligned}
\delta_{i,j} &= \begin{cases} 1 & (i=j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases} \\
\delta^*_{i,j} &= \begin{cases} 2 & (i=j=0) \\ 1 & (i^2=j^2 \neq 0) \\ 0 & (i^2 \neq j^2) \end{cases} \\
\bar{\rho}_i &= \int_0^\pi \sin i \xi d\xi \\
&= \begin{cases} 2/i & (i \text{ 奇数}) \\ 0 & (i \text{ 偶数}) \end{cases} \\
\varphi_i &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (\xi - \pi/2) \cos i \xi d\xi \\
&= \begin{cases} -\bar{\rho}_i / \pi i & (i \neq 0) \\ 0 & (i=0) \end{cases} \\
\phi_i &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (\xi - \pi/2) \sin i \xi d\xi \\
&= \begin{cases} -1/i & (i \neq 0 \text{ かつ偶数}) \\ 0 & (i=0 \text{ または奇数}) \end{cases} \\
\beta_{i,j} &= \begin{cases} \{ \lambda / (i^2 + \lambda^2 j^2) \}^2 & (i^2 + \lambda^2 j^2 \neq 0) \\ 0 & (i^2 + \lambda^2 j^2 = 0) \end{cases} \\
\sum'_I f(I) &= f(-1) + f(1)
\end{aligned} \quad (37)$$

2.3 注目応答量の表示式 パネル中央点の無次元変位 W は

$$W = w(a/2, b/2)/h = \sum_i \sum_j W_{ij} \phi_{ij}(\pi/2, \pi/2) \quad (38)$$

と書ける。またパネル表面に生じる歪成分 ε_x などは、面内歪 ε_{x0} と曲げ歪 ε_{xb} の和として

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \varepsilon_{x0} + \varepsilon_{xb} \\
&= -(h/2) w_{,xx} + (F_{,yy} - \nu F_{,xx}) / E \\
\varepsilon_y &= \varepsilon_{y0} + \varepsilon_{yb} \\
&= -(h/2) w_{,yy} + (F_{,xx} - \nu F_{,yy}) / E \\
\gamma_{xy} &= \gamma_{xy0} + \gamma_{xyb} \\
&= -h w_{,xy} - 2(1+\nu) F_{,xy} / E
\end{aligned} \quad (39)$$

によって計算される。したがって、同寸法の周辺単純支持矩形板の2方向一様圧縮の場合の座屈時の歪 (30式参照) で無次元した歪はそれぞれ

$$\bar{\varepsilon}_x = \varepsilon_x / \varepsilon_{cr}$$

$$\begin{aligned}
&= \bar{\varepsilon}_1 + \sum_i \sum_j D^{(1)}_{xij} W_{ij} \\
&\quad + \sum_i \sum_j \sum_k \sum_l D^{(2)}_{xijkl} W_{ij} W_{kl} \\
\bar{\varepsilon}_y &= \varepsilon_y / \varepsilon_{cr} \\
&= \bar{\varepsilon}_2 + \sum_i \sum_j D^{(1)}_{yij} W_{ij} \\
&\quad + \sum_i \sum_j \sum_k \sum_l D^{(2)}_{yijkl} W_{ij} W_{kl} \\
\gamma_{xy} &= \gamma_{xy} / \varepsilon_{cr} \\
&= \bar{\gamma}_{12} + \sum_i \sum_j D^{(1)}_{xyij} W_{ij} \\
&\quad + \sum_i \sum_j \sum_k \sum_l D^{(2)}_{xyijkl} W_{ij} W_{kl}
\end{aligned} \quad (40)$$

と書き下せる。ここで

$$\begin{aligned}
D^{(1)}_{xij} &= -(a_1/\lambda) \phi_{ij, \xi \xi}(\xi, \eta) \\
D^{(1)}_{yij} &= -\lambda a_1 \phi_{ij, \eta \eta}(\xi, \eta) \\
D^{(1)}_{xyij} &= -2a_1 \phi_{ij, \xi \eta}(\xi, \eta) \\
D^{(2)}_{xijkl} &= (a_1/4) [(\lambda j)^2 \delta_{i, k} \delta_{j, l} \\
&\quad + \sum'_K \sum'_L K L (i l - K L j k)^2 \{ \lambda (j + L l)^2 \\
&\quad - \nu (i + K k)^2 / \lambda \} \\
&\quad \times \beta_{i+Kk, j+Ll} \cos (i + K k) \xi \cos (j \\
&\quad + L l) \eta] + a_2 \bar{\mathcal{B}}^2_{ijkl} (\xi - \pi/2) \\
D^{(2)}_{yijkl} &= (a_1/4) [(\lambda j)^2 \delta_{i, k} \delta_{j, l} \\
&\quad + \sum'_K \sum'_L K L (i l - K L j k)^2 \{ (i + K k)^2 / \lambda \\
&\quad - \nu \lambda (j + L l)^2 \} \\
&\quad \times \beta_{i+Kk, j+Ll} \cos (i + K k) \xi \cos (j + L l) \eta] \\
&\quad + a_3 \bar{\mathcal{B}}^1_{ijkl} (\eta - \pi/2) \\
D^{(2)}_{xyijkl} &= (a_1/4) \sum'_K \sum'_L [\bar{\mathcal{B}}^0_{ijkl} / \pi^2 \\
&\quad + \mathcal{U}_{ijkl}(K, L) \sin (i + K k) \xi \sin (j \\
&\quad + L l) \eta] + \{ 2/(1-\nu) \} \{ \lambda a_3 \bar{\mathcal{B}}^1_{ijkl} (\xi \\
&\quad - \pi/2) + a_2 \bar{\mathcal{B}}^2_{ijkl} (\eta - \pi/2) \}
\end{aligned} \quad (41)$$

ある。ここで

$$\begin{aligned}
a_1 &= 6/(\lambda a_0) \\
a_2 &= -18(1-\nu^2) \lambda^2 / \{ \pi^3 (1+\lambda^2) (2+\lambda^2 - \nu \lambda^2) \} \\
a_3 &= -18(1-\nu^2) \lambda / \{ \pi^3 (1+\lambda^2) (2\lambda^2 + 1 - \nu) \}
\end{aligned}$$

である。さらに x 軸から θ 傾いた方向の歪 (第1図参照) は、

$$\bar{\varepsilon}_\theta = \bar{\varepsilon}_x \cos^2 \theta + \bar{\varepsilon}_y \sin^2 \theta + \bar{\gamma}_{xy} \cos \theta \sin \theta \quad (42)$$

として計算できる。本論文においては

$$S_1 = \bar{\varepsilon}_{45^\circ}, \quad S_2 = \bar{\varepsilon}_{-45^\circ} \quad (43)$$

に注目する。

3. 計 算 方 法

3.1 ランダム振動特性 本論文においては、 $\lambda=1$, $\nu=0.3$, $\eta_0=0.0025$ なるパネルの振動特性を (1, 1), $\{(1, 3) + (3, 1)\}/2$, (3, 3) の三つの対称モードと (2, 2) の一つの逆対称モードを考慮して4自由度近似で計算した。またこのとき α_i^h , σ_x^h などを決める連

 第2図 外力 f の PSD

ω_{ij} は、 $\tau=0$ の場合の ϕ_{ij} モードの固有円振動数を表す

立方程式から、 $\sigma_x^h, \sigma_y^h, \tau_{xy}^h$ 以外の $\alpha_i^h (i=1\sim 4)$ はすべて零となることが導かれた。(ただし、 α_i^h は、(1,2), (2,1)などの項を用いると零でなくなる) 剪断変形が0の場合は(2,2)の項は常に零となる。また代表振動数 ω_r として ω_0 を用いる。

以下外力 $p(\xi, \eta, t)$ として、パネルの振動によって生ずる空気力の影響は省略し、 ξ, η につき一様分布の音圧が作用する場合について計算する。無次元外力 f は、その PSD の一定部分の大きさが Φ_0 の有限帯域幅のガウスホワイトノイズ (第2図一点鎖線) を用いた。外力の大きさを表す無次元パラメータ Q は

$$Q = \sqrt{\Phi_0 / \eta_0} \quad (44)$$

である。 Q と実際の音圧の関係は $\eta_0 = 0.0025$, $a=b=200$ mm, $h=0.5$ mm の場合には $Q = \sqrt{10}$ は 1 Hz あたり 95.8 dB, $Q=10$ は 105.8 dB, $Q=10\sqrt{10}$ は 115.8 dB, $Q=100$ は 125.8 dB に相当する。音圧の帯域幅が 1,000 Hz のとき SPL (sound pressure level) で 125.8 dB, 135.8 dB, 145.8 dB, 155.8 dB に相当する。

剪断変形の大きさを表すパラメータ γ は

$$\gamma = (\gamma_1 + \gamma_2) / \gamma_{cr} = \gamma_{12} (\varepsilon_{cr} / \gamma_{cr}) \quad (45)$$

である。ここで γ_{cr} は上記 4 自由度近似で得られた座屈時の剪断歪で、正方形板の場合

$$\gamma_{cr} / \varepsilon_{cr} = 17.50 \quad (46)$$

である。

応答の計算は、 $\Delta\tau = 0.1$ ($Q=100$ の場合は $\Delta\tau = 0.05$) として NEWMARK の β 法を用いて行った。

3.2 疲労寿命 応答計算に関しては無次元量だけですみ、具体的な板の寸法を必要としないが、疲労寿命の計算には実際の歪の値を必要とする。本論文では $a=b=200$ mm, h は第7表に示す4通りの場合について計算した。

本計算に用いた SN 曲線を第3図に示した。前論文³⁾では縦軸を応力にとったが、弾性と考えると得られた歪から応力を算出する際塑性域をも考慮する必要が生じ、取扱いが複雑となったので本論文では取扱いを簡潔にするため、縦軸を歪にとった SN 曲線を用い

第3図 SN 曲線

ることにした。疲労損傷の計算手法は前論文³⁾と同じ方法を用いた。すなわち、一つの歪の極大値から次の極小値 (または極小値から極大値) までの波形から算出される平均歪 ε_m と歪振幅 ε_A から、著者らの両端固定の薄板についての実験結果から得られた式

$$\varepsilon_A' = \varepsilon_A / \{1 - \alpha_A (\varepsilon_m / \varepsilon_{TU})^m\} \quad (47)$$

$$\alpha_A = 1.39, m = 0.92$$

$$E\varepsilon_{TU} = 44.5 \text{ kg/mm}^2, E = 7,000 \text{ kg/mm}^2$$

を用いて相当歪振幅 ε_A' を求め、線形累積損傷の仮定により疲労損傷を計算した。疲労寿命 t_{cr} は単位時間あたりの疲労損傷度の期待値 $E[D]$ の逆数として求めた。多軸応力状態の疲労寿命の計算に一軸での疲労実験データを用いることに問題も残るが、本論文では t_{cr} のオーダおよび相対的評価を知ることを第一の目的とし、一軸実験の歪についてのデータを用いて t_{cr} を算出した。

4. 解析結果の考察

4.1 外力の特性 文献4)の(27)式に従って $\Delta\tau = 0.1$, $N=2,048$, $L=1,024$ として得られた外力のパワースペクトル (PSD, power spectral density) を第2図に実線で示した。これは一点鎖線で示した標的 (target) PSD によく一致している。また図示は省略したが、確率密度関数 (PDF, probability density function) は、ガウス分布曲線とよく一致している。したがって外力は有限帯域幅ガウスホワイトノイズと考えられる。

4.2 統計値のばらつき 4.1で説明した外力に対する応答1,024点を1サンプルとし、64サンプルの平均をもって応答の確率量とした。この近似値の収束の状態を知る目安として、パネル中央点の変位 W について各サンプルごとの時間平均 (temporal mean) $\langle W \rangle$ および2乗の時間平均 $\langle W^2 \rangle$ の標準偏差を計算し、チェビシェフの不等式に従って母集団の分散 (variance) の平方根 $\sigma_w = \sqrt{E[W^2] - (E[W])^2}$ の存在範囲を求めると、少なくとも0.9の確率で第1表の範囲にあるといえる。解の存在範囲は σ_w の値に比して小さいので64サンプルは妥当な数と考えられる。し

第1表 σ_W の存在範囲

Q	r		
	0	2	5
$\sqrt{10}$	0.92~1.11	(0.93~1.07)	(0.16~0.43)
10	1.41~1.68	1.24~1.44	(1.86~2.25)
$10\sqrt{10}$	2.29~2.50	2.10~2.34	2.03~2.12
100	3.18~3.50	3.13~3.49	3.08~3.41

かし、表中に括弧で示した、加振力が小さくて大部分が座屈変形位置まわりで微小振動していて、 $W=0$ をまれにしかまたはまったく越えない場合は、64 サンプルで十分とはいえないかもしれないが、本論文では計算時間との関係でこれらの場合にも 64 サンプルの結果を用いる。

4.3 W のピークの PDF 中央点の変位 W は正の側と負の側で対称な分布を有するので、正のピークの PDF のみ図示し、負のピークの PDF は省略する。 $Q=\sqrt{10}$ の場合の W_p の PDF を第4図に示した。図中の細い縦線は座屈後の静的平衡位置を示す。 $r=5$ の場合飛び移りを起こさず、 $W>0$ または $W<0$ の領域で座屈後の平衡位置の近傍ではほぼ 0.9~3.3 の範囲で振動していることが見られる。 $W_p<0$ の領域の正のピークの PDF の分布は $W_p>0$ の領域の負のピークの PDF と本質的に同じ分布形状に収束するものであるから、 $W_p<0$ の領域の正のピークの PDF を表示することは $W_p>0$ の領域の負のピークの PDF を表示するのと同じ意味をもっている。 $r=2$ の場合には $W>0$ および $W<0$ に存在する静的平衡位置近傍で大部分が振動しているが、ときどき $W=0$ を越えて振動することを示している。 $Q=100$ の場合を第5図に示した。このように外力が大きくなると $r=5$ の場合にもほとんどすべての振動が $W=0$ を越えて振動し、 $r=0, 2, 5$ の結果にほとんど差がなくなっている。 $Q=10, 10\sqrt{10}$ の場合は $Q=\sqrt{10}$, 100 の中間の状態であった。このことから外力が大きくな

第4図 W の正のピークの PDF ($Q=\sqrt{10}$ の場合) 第5図 W の正のピークの PDF ($Q=100$ の場合) 第6図 W の正のピークの PDF ($r=2$ の場合)

ると中央点の変位に関しては座屈の影響が目たなくなると考えられる。さらに、 $r=2$ の場合の Q の変化による W_p の PDF の変化を第6図に示した。 Q が大きくなるに従って静的平衡位置まわりの振動が卓越した状態から $W=0$ を中心とした振動が卓越した状態に移ることが見られる。 $r=5$ の結果の図示は省略したが、 $r=2$ と同様な傾向を示している。

4.4 S_2 のピークの PDF S_1 も計算したが S_1 は S_2 に比べて小さいので、 S_2 のピークの PDF のみを第7, 8図に示した。 $Q=\sqrt{10}$ の場合、座屈後の平衡位置で生じる応力の影響が非常に大きく、 $r=0, 2, 5$ では互いにまったく違った分布形状を有している。とくに $r=5$ の場合、座屈後の平衡位置まわりを小さく振動していることを示しているが、正の側の負のピーク分布は零を越えないが零の方向に大きく伸びている。 $r=2$ の場合には大部分の振動が座屈後の平衡位置まわりで振動していることを示しているが、正の平衡点まわりの振動に対応する負のピークの分布の範囲が広がっている。 $r=0$ で正のピークの分布と負のピークの分布が対称でないのは、すでに非線形効果が大きく、撓みによる面内引張歪の発生を意味して

 第7図 S_2 のピークの PDF ($Q=1/10$ の場合)

 第8図 S_2 のピークの PDF ($Q=100$ の場合)

 第9図 S_2 の正のピークの PDF ($\gamma=5$ の場合)

いる。 $Q=100$ となると $\gamma=0, 2, 5$ の分布形状の差は小さくなっている。しかし、 γ が大きくなると負のピークの絶対値が大きく、PDF が負の側に大きく広がっている。また正のピークの分布は正の側にも負の側

にも伸び広い分布となっている。さらに $\gamma=5$ の場合の正のピークの分布形状の Q による変化を第9図に示した。 S_2 に関しても W と同様な形状の推移が見られる。

4.5 W の PSD $Q=1/10$, 100 の場合の PSD を第10, 11図に示した。 $Q=1/10$ のとき、 $\gamma=0$ の場合にはかなり広帯域な分布を示し、すでに非線形の効果小さくないことを示している。 $\gamma=2$ の場合には座屈後の静的平衡位置まわりの振動に対応する成分が $\omega/\omega_0 \approx 1$ の近傍に現われている。このときの振動の中心が零でないことに起因する成分が $\omega \approx 0$ で極度に大きい分布となって現われている。 $\gamma=5$ の場合、図示は省略したが振動の中心が零でないことによる成分が $\omega=0$ に存在し、非常に大きな値 ($\Phi_{WW}=172$) となっている。また座屈後の静的平衡位置まわりの振動に起因する成分が $\omega/\omega_0 \approx 4$ の近傍に分布している。また静的平衡位置まわりでの振幅が $\gamma=0$ の場合の W の振幅に比べて小さいことが見られる。 $Q=100$ と加振力が大きくなると $\gamma=0, 2, 5$ の分布に大差がなく、帯域幅が非常に大きくなり非線形効果が非常に強くなっていることがわかる。

4.6 W_{22} の PDF 逆対称な項 W_{22} の影響を知る目的で $\gamma=5$ の場合の W_{22} の PDF を第12図に示した。 $Q=10$ のときには静的平衡点まわりで小さく

 第10図 W の PSD ($Q=1/10$ の場合)

ω_{ij} は $\gamma=0$ の場合の ϕ_{ij} モードの固有円振動数を表わす

 第11図 W の PSD ($Q=100$ の場合)

第12図 W_{22} の PDF ($\gamma=5$ の場合) 第13図 W_{11} の PDF ($\gamma=5$ の場合)

振動しているが、 $Q=100$ となると $W_{22}=0$ を中心とした振動にかわっている。その中間で $Q=10\sqrt{10}$ の場合には静的平衡点まわりの振動がかなり存在している。この結果の特徴を理解するため、 $\gamma=5$ の場合 W_{11} の PDF が Q の値によりいかに変わるかを第13図に示したが、 W_{11} は Q の増加に伴い振動範囲が広がるのに対し、 W_{22} はその振動範囲が Q の値によりあまり変わらないことが見られる。この特性は第3表

の σ_4 の欄にも示されている。

4.7 一般座標の平均値、分散の平方根、相関係数
各一般座標 W_{ij} の平均値を第2表に、分散の平方根および相関係数を第3表に示した。ここで

$$W_1 = W_{11}, \quad W_2 = (W_{13} + W_{31})/2, \\ W_3 = W_{33}, \quad W_4 = W_{22} \quad (48)$$

$$\mu_i = E[W_i], \quad \sigma_i = \sqrt{E[W_i^2] - \mu_i^2},$$

$$\rho_{ij} = (E[W_i W_j] - \mu_i \mu_j) / \sigma_i \sigma_j \quad (49)$$

である。本問題のように座屈したパネルの振動を考える場合、 $W > 0$ と $W < 0$ の側にそれぞれ一つずつ静的平衡位置があり、 $W=0$ が不安定平衡点であるために、分散の平方根 σ_i が必ずしも振幅の大きさを表す指標とはならない⁵⁾。

上記 W_p の分布および $\mu_i, \sigma_i, \rho_{ij}$ の特性から、生じている振動は次の三つの型に分類される。

- (A) 大部分の振動が $W=0$ を通過する (下記以外の場合)。
- (B) 大部分の振動は座屈平衡位置近傍の振動だが、ときどき $W=0$ を越えて反対側の座屈平衡位置近傍の振動に飛び移る。($Q=\sqrt{10}, \gamma=2$), ($Q=10, \gamma=5$), ($Q=10\sqrt{10}, \gamma=5$) の場合。
- (C) 座屈平衡位置まわりで振動し、 $W=0$ を通過しない。(反対側に飛び移る確率はきわめて小さい) ($Q=\sqrt{10}, \gamma=5$) の場合。

第2表は、 μ_i は、(A)の場合はほとんど0、(B)の場合は0ではないが、 σ_i に比べて小さな値、(C)の場合は静的平衡位置と大差ない値であることを示している。

第3表は、 σ_i は、(A)の場合は $W=0$ を中心とした振動の平均振幅の大きさを、(C)の場合は座屈平衡位置まわりの振動の平均振幅の大きさを表す指標

第2表 静的平衡位置の W_i と W_i の平均値 μ_i

Q	γ	μ_1	μ_2	μ_3	μ_4	$E[W]$
静的平衡位置	2	± 0.87	∓ 0.25	± 0.093	± 0.45	± 1.2
	5	± 1.45	∓ 0.58	± 0.31	± 1.05	± 2.3
$\sqrt{10}$	0	-9.6×10^{-4}	-5.6×10^{-4}	7.2×10^{-4}	—	-9.5×10^{-4}
	2	-0.053	0.015	-5.6×10^{-3}	-0.027	-7.4×10^{-3}
	5	-1.41	0.58	-0.31	-1.04	(-2.3)
10	0	2.4×10^{-4}	2.0×10^{-4}	9.8×10^{-4}	—	4.1×10^{-4}
	2	-2.7×10^{-3}	2.2×10^{-3}	-6.9×10^{-4}	-3.1×10^{-3}	-5.6×10^{-3}
	5	0.30	-0.13	0.068	0.22	(0.49)
$10\sqrt{10}$	0	1.9×10^{-3}	1.6×10^{-3}	5.4×10^{-3}	—	3.2×10^{-3}
	2	2.8×10^{-3}	4.4×10^{-4}	-5.5×10^{-4}	-2.2×10^{-3}	1.8×10^{-3}
	5	0.018	-8.6×10^{-3}	4.0×10^{-3}	0.014	3.0×10^{-3}
100	0	-7.2×10^{-4}	1.4×10^{-3}	5.7×10^{-4}	—	-2.0×10^{-3}
	2	-1.4×10^{-3}	-1.0×10^{-3}	-5.2×10^{-4}	-1.7×10^{-4}	8.4×10^{-3}
	5	-3.8×10^{-3}	2.6×10^{-3}	-1.2×10^{-3}	-2.6×10^{-3}	-7.6×10^{-3}

第3表 W_i の分散の平方根 σ_i と相関係数 ρ_{ij}

Q	γ	σ_1	σ_2	σ_3	σ_4	ρ_{12}	ρ_{13}	ρ_{14}	ρ_{23}	ρ_{24}	ρ_{34}
$\sqrt{10}$	0	1.04	0.114	0.015	—	0.189	0.020	—	0.20	—	—
	2	0.81	0.24	0.086	0.401	-0.77	0.83	0.89	-0.92	-0.94	0.98
	5	0.38	0.052	0.025	0.041	0.80	-0.84	0.19	-0.60	-0.12	0.22
10	0	1.59	0.22	0.026	—	0.24	0.043	—	0.34	—	—
	2	1.18	0.30	0.103	0.42	-0.29	0.42	0.67	-0.46	-0.67	0.77
	5	1.43	0.57	0.30	0.98	-0.81	0.83	0.90	-0.94	-0.96	0.98
$10\sqrt{10}$	0	2.45	0.53	0.112	—	0.19	0.0025	—	0.37	—	—
	2	2.17	0.41	0.135	0.45	0.014	0.17	0.55	0.088	-0.25	0.51
	5	1.52	0.60	0.31	0.88	-0.47	0.50	0.78	-0.59	-0.78	0.79
100	0	3.39	0.96	0.24	—	0.17	-0.028	—	0.41	—	—
	2	3.34	0.79	0.23	0.54	0.13	0.013	0.31	0.38	0.070	0.34
	5	3.06	0.74	0.34	0.84	-0.044	0.15	0.54	-0.014	-0.38	0.51

$$W_1=W_{11}, W_2=(W_{11}+W_{21})/2, W_3=W_{11}, W_4=W_{11}, \sigma_i=\sigma W_i, \rho_{ij}=\rho W_i W_j$$

となっているが、(B)の場合はそれぞれ静的平衡位置に近い値になっていることが見られる。

第3表の ρ_{ij} は、(B)の場合は、 μ_i が0に近く σ_i が静的平衡位置に近い値を表わすことから、必然的に ρ_{ij} が +1 または -1 に近い値になっている。ただし ($Q=10\sqrt{10}, \gamma=5$) の場合は飛移回数が多いため $|\rho_{ij}|$ が1から離れている。(C)の場合は、 W_4 を除いては比較的相関のある振動モードであることを示している。(A)の場合は概して各 W_i 間にほとんど相関がないといえる。したがって前論文¹⁾で行なったように W_1 と W_4 との関係を座屈変形の係数で結ぶことは不適当であったと結論せざるをえない。

4.8 W の RMS と S_2 の分散の平方根 第4表に W の RMS すなわち $\sqrt{E[W^2]}$ を示したが、括弧をつけて示した (B)、(C) の場合はほぼ座屈変形位置を表わし、(A) の場合は平均振幅の大きさを表わす指標となっている。なお、 W の分散の平方根 $\sigma_W = \sqrt{E[W^2] - (E[W])^2}$ は ($Q=\sqrt{10}, \gamma=5$) の場合 0.32, ($Q=10, \gamma=5$) の場合 2.20 となった以外は $\sqrt{E[W^2]}$ と差がなかった。($Q=\sqrt{10}, \gamma=5$) の場合の σ_W は、座屈変形まわりの振動の平均振幅を表わす指標となっていると考えられる。

第5, 6表に $E[S_2]$ と $\sigma_{S_2} = \sqrt{E[S_2^2] - (E[S_2])^2}$ を示した。第7, 8図に見られるように、歪 S_2 の平

 第4表 $\sqrt{E[W^2]}$

Q	γ		
	0	2	5
$\sqrt{10}$	1.02	(1.09)	(2.32)
10	1.55	1.35	(2.26)
$10\sqrt{10}$	2.40	2.23	(2.08)
100	3.34	3.32	3.25

 第5表 $E[S_2]$

Q	γ		
	0	2	5
$\sqrt{10}$	1.8	-11.5	44.9 (-42.9)
10	4.3	-9.1	7.8
$10\sqrt{10}$	11.2	-1.9	-10.7
100	24	11.3	-1.7

 第6表 $\sigma_{S_2} = \sqrt{E[S_2^2] - (E[S_2])^2}$

Q	γ		
	0	2	5
$\sqrt{10}$	4.6	17.0	4.9 (3.7)
10	7.9	18.6	43.0
$10\sqrt{10}$	15.3	23.5	43.4
100	27.2	33.6	51.3

均値は一般に0ではない。 $\gamma=0$ の場合は撓むことによる面内伸歪の発生により $E[S_2]$ は正だが、 $\gamma=5$ の場合は S_2 が -45° 方向の歪であるから $E[S_2]$ が負になることが起こりうる。(A)の場合は σ_{S_2} は平均歪振幅の大きさを表わす指標となるが、(B)の場合の σ_{S_2} はほぼ両座屈変形位置間の歪差に対応しているので比較的大きな値となっているが、これは平均歪振幅を表わさない。(C)の場合は $W>0$ か $W<0$ かいずれか片側で振動して飛び移らないので、 -45° 方向の表面歪 S_2 は、 $W>0$ なら伸び歪、 $W<0$ なら縮み歪で、その平均値および σ_{S_2} は $W>0$ の側での振動か $W<0$ の側での振動かにより若干違うので、 $W<0$ の側での値を括弧に入れて併記した。

4.9 疲労寿命 第7表に疲労寿命の期待値 t_{cr} を示した。疲労寿命が非常に長く計算されるものは除外してある。まず、同一の (k, Q) に対し、 γ が大きいほど、すなわち剪断座屈変形が大きいほど疲労寿命が短くなることが示されている。この結果は、大きな剪断座屈変

第7表 疲労寿命 $t_{cr}=1/E[D]$

h (mm)	Q	r			1 Hz あた りの dB
		0	2	5	
0.5	100	3.3×10^9 年	69 年	25 日	125.8
0.66	$10\sqrt{10}$	1.1×10^9 年	2.7 年	5.3 日	124.6
	100	7.6 日	1.6 日	1.7 時間	134.6
0.8	10	1.5×10^9 年	1.1×10^4 年	49 日	120.1
	$10\sqrt{10}$	4.0 年	5.2 日	3.4 時間	130.1
	100	3.2 時間	1.5 時間	13 分	140.1
1.0	$\sqrt{10}$	2.7×10^4 年	1.7×10^9 年	1.2×10^4 年	116.9
	10	6.2×10^7 年	5.0 日	15 時間	126.9
	$10\sqrt{10}$	17 時間	2.2 時間	16 分	136.9
	100	13 分	8.6 分	5.5 分	146.9

形を起こしている状態では座屈変形により大きな歪が生じているので、同一の Q に対し、 $r=2$ で $W=0$ を中心に振動している場合よりも、 $r=5$ で座屈変形まわりで振動していて、ときどき反対側に飛移りを起こすほうが疲労寿命は短いということを意味している。 r により寿命が短くなる変化率を大、中、小に分けると、($h=0.5, Q=100$)、($h=0.66, Q=10\sqrt{10}$)、($h=0.8, Q=10$)、($h=1.0, Q=\sqrt{10}$) の場合は大、($h=0.66, Q=100$)、($h=0.8, Q=10\sqrt{10}$)、($h=1.0, Q=10$) の場合は中、($h=0.8, Q=100$)、($h=1.0, Q=10\sqrt{10}$)、($h=1.0, Q=100$) の場合は小といえることができる。

このような結果が得られる理由として次の二つが考えられる。i) SN 曲線で相当歪振幅の大きいところでは歪振幅の寿命に対する影響がさほど大きくなく、歪振幅が小さいところでは影響が大きい。ii) (47) 式は相当歪振幅に対し平均歪 ε_m の影響が大きいことを示しており、したがって大きな座屈撓みが生じて大きな平均歪が生じている場合は、歪振幅がさほど大きくなくても疲労寿命は短い。つまり第 5, 6 表を参照して第 7 表を考察するとき、(A) の場合振幅 σ_s 、だけでなく $E[S_2]$ も重要である。(B)、(C) の場合は、座屈平衡位置の S_2 の値が大きいことが疲労寿命を短くする要因になっていることに留意しなければならない。

5. 結 論

境界で任意の面内変位条件を与えることができるよう、仮想仕事の原理を用いて剪断座屈変形を考慮した粘弾性非線形振動方程式を導いたことにより、本問題の解析が可能となった。

4 自由度近似方程式をシミュレーション法により数値実験的に解いて、剪断座屈をした正方形パネルの一樣音圧作用の下での非線形ランダム振動特性につい

て、次の結論が導かれたものと考えられる。

1) 剪断座屈をしたパネルの場合、音圧の増大に伴い振動モードが大きく変わっていくので、座屈波形を用いた 1 自由度近似によって特性を述べることはできない。

2) 音圧が小さく座屈後の平衡点まわりで微小振動をする場合の振動モードも座屈変形形状とはかなり異なっている。

3) 音圧が大きくなって、 $W=0$ を飛び越えて振動する場合には、その振動モードが平板の振動モードに近くなる。すなわち、大振幅での振動では、中央点変位の振動特性に対する剪断座屈変形量 r の影響は小さくなる。しかし中央点の歪 (応力) の振動特性に対する座屈変形量の影響は小さくない。

4) 逆対称モードの振動は、一樣分布音圧が逆対称モードを直接加振せず、対称モードとの連成により生ずるので、その振動範囲は座屈変形量 r に依存するが、音圧の大きさ Q の影響をほとんど受けない。したがって音圧が大きくなると σ_4/σ_1 は相対的に小さくなる。

5) 同じ音圧に対し、剪断座屈変形量が多いほど疲労寿命は短い。すなわち、音圧があまり大きくない場合、座屈変形量が多くて座屈変形位置まわりの振動となりときどき反対側に飛移るか飛移りがまったく起こらない場合のほうが、飛移り回数が多くほとんど $W=0$ を中心とした振動となる場合よりも疲労寿命は短い。

本研究の発端は四方力君 (現在日産自動車株式会社) の東京大学工学部航空学科の卒業論文である。同君の貢献に感謝の意を表す。また本研究を進めるにあたり、東京大学工学部境界領域研究施設の小林昭教授にはご激励とご協力をいただいた。厚く謝意を表す。

る。

参考文献

- 1) 小林繁夫, 小林 孝: 剪断座屈した矩形パネルのランダム加振に対する応答, CAS 研究報告, No. 18, (1975. 3), pp. 47-54.
- 2) WASHIZU, K.: Variational Method in Elasticity and Plasticity, Pergamon Press (1968).
- 3) 末益博志, 小林繁夫: 浅い円筒形パネルの外圧による

座屈と非線形ランダム振動応答の解析 II. 非線形ランダム振動応答, 日本航空宇宙学会誌, 第 29 巻, 第 328 号 (1981. 5), pp. 268-274.

- 4) 小林繁夫, 末益博志: シミュレーション法による周辺単純支持矩形板の非線形ランダム振動応答解析, 日本航空宇宙学会誌, 第 26 巻, 第 291 号 (1978. 4), pp. 206-214.
- 5) 小林繁夫: 座屈した矩形パネルのランダム加振に対する応答, 日本航空宇宙学会誌, 第 18 巻, 第 197 号 (1970. 6), pp. 223-233.

— 論 文 —

接着結合多層板の熱応力解析* Thermal Stress Analysis of Adhesively Bonded Multilayer Plates

渡 辺 光 庸**
Mitsunobu WATANABE

Abstract

Thermal stresses of adhesively bonded multilayer plates were analyzed including the bending effects. In the present analysis, the bending displacements in each layer were assumed to be the same. This assumption simplified the thermal stress analysis in general multilayer plates.

Solutions obtained in the analysis were compared with other analytical and finite element solutions for 2-layer and 3-layer plates as examples. These results are shown as follows;

1. The present analysis is very simple to predict the shear stresses in adhesives and the normal stresses in members irrespectively of bending constraints.

2. When the bending is constrained, the shear stresses in adhesives and the normal stresses in members calculated by the present analysis agree with those by FEM. When the bending is free, the maximum shear stresses in adhesives are higher than those by FEM and the maximum normal stresses in members agree with those by FEM.

The present analysis is useful in the design of adhesively bonded multilayer plates.

1. ま え が き

宇宙・航空および電子機器実装の分野で軽量化, 小型化の要請から異種材の接着結合が多用されてきてい

る。異種材を接合する場合には温度変化に伴う熱応力が発生するため, この熱応力を許容値以下に設計することが実用化において不可欠である。

異種材の接合に関する熱応力については, 砂川¹⁾が O. VOLKERSON²⁾ による鋸接手の応力解析を発展させることにより解析的に求めているが, 曲げ変位が無視できる場合に限定されていた。一般の対象物では曲げ変位は完全拘束と完全自由の間になるため, 曲げ変位を完全拘束した場合には接着層のせん断応力を過大に見積ることになる。70 年代になり L. M. KEER^{3), 4)}, W. J. RENTON, J. R. VINSON⁵⁾ が接合構造に引張りおよび曲げモーメントを负荷した場合の応力解析を行った。W. T. CHEN, C. W. NELSON⁶⁾ はその手法に基づいて温度を外力として取り込むことにより曲げ変位を自由にした場合についての接着層の熱応力を解析的に導いた。この解析では接着層に関してせん断変形と引張あるいは圧縮による変形の両者が考慮されているが, 解析が煩雑で一般の多層板の解析に発展させることは困難である。しかも材料, 寸法等のパラメータが応力に与える影響は陽の形式で導かれていないため解析解としての意味が薄れたものになっている。

筆者は CHEN, NELSON の解析における解析解の煩雑性を改良し, 材料および寸法等のパラメータが陽になる形式で解を求められるようにするため, 接合構造物接着層のせん断応力に着目し, 接着層の変形はせん断変形に限定するとともに被接着層である部材の曲げ変位はすべて等しいと仮定した。この仮定により解析が簡単化され, 2 層または 3 層の接合構造物に限定さ

* 昭和 56 年 7 月 18 日, 第 23 回構造強度に関する講演会にて発表。昭和 56 年 11 月 25 日原稿受理

** 日本電信電話公社横須賀電気通信研究所