曲線座標による流れの数値的解析法について*

内 田 茂 男**

Key words: Fluid dynamics; aerodynamics; internal flows; computational methods; curvilinear coordinates

1. ま え が き

流体力学の計算に、曲線座標を使って解く方法が考えられている。その原理は二つの種類に大別される。

第1の分類は、流線座標のように物理的な意味をもつ座標を使うことにより、方程式を簡単化して積分を容易にする方法である。座標は逐次計算で修正していき、収束したものが解になる。特別な性質をもつ特性方向に沿って積分しながら、座標を組み立てていく特性曲線理論も、その一つと考えることができる。

第2の分類は、任意の形をした物体の境界面を含む曲線座標網によって、境界面で内挿誤差を除こうとするものである。ふつうの座標による数値計算では、境界面が内挿されることによる誤差が、重要な境界条件の誤差をまねき、それがそのまま解の誤差に反映する。また境界形の影響を、一様な重みで格子点に分配することがむずかしい。これを改善するため、最近では物体の境界面上に格子点をもつような、境界適合座標が使われるようになった。

以下に第1の分類に属するものを前半に、第2の分類に属するものを後半に分けて概説したいと思う。なお有限要素法の網目はもっと自由にとれるものであるが、それは他に譲ってここでは触れないことにする。

2. 直交曲線座標の性質とその構成法

曲線座標の代表として、第1図のような直交曲線座標 α, β をとると、座標の要素はつぎようになる。

拡大率: $h_\alpha \equiv \partial s / \partial \alpha$, $h_\beta \equiv \partial n / \partial \beta$

$$\text{変向角: } \frac{\partial \theta}{\partial \alpha} = -\frac{1}{h_\beta} \frac{\partial h_\alpha}{\partial \beta}, \quad \frac{\partial \sigma}{\partial \beta} = \frac{\partial \theta}{\partial \beta} = \frac{1}{h_\alpha} \frac{\partial h_\beta}{\partial \alpha} \quad (1)$$

曲 率:

$$C_\alpha \equiv \frac{\partial \theta}{\partial s} = -\frac{1}{h_\alpha h_\beta} \frac{\partial h_\alpha}{\partial \beta}, \quad C_\beta \equiv \frac{\partial \sigma}{\partial n} = \frac{1}{h_\alpha h_\beta} \frac{\partial h_\beta}{\partial \alpha}$$

* 昭和57年6月1日原稿受理 On the Computational Method by the Use of Curvilinear Coordinate Systems

** 名城大学理工学部交通機械学科 Shigeo UCHIDA

α 座標の曲線群を表わす点の列が、座標値として与えられている場合、これらに直交する曲線の座標点を求めて、直交曲線座標を構成する方法が、McNALLY¹⁾によって提案されている。McNALLYの方法は、まず α 座標の点列間を三次曲線でスプライン補間しておく。第2図(a)のように、点Aから曲線 β_j (β —一定の曲線) に垂線を立て、交点Bから β_{j+1} に切線を引き、これにAから垂線ACを下ろす。BCの中点MとAを結び、曲線 β_{j+1} との交点Dを得る。ADを曲線 β_j と β_{j+1} の両方に対し平均した直交線とする。

後の流線座標のように、 α 座標(曲線 β) が逐次修正されていく場合には、第2図(b)のように、そのつど直交線が引き直されて、直交曲線座標が構成されていく。この場合の直交線は線分の折線近似になるので、よい結果を得るにはもっと精度を上げる必要がある。

3. 流線曲率法と流線解析法

流線座標(第3図参照)を使う解法の一つである流線曲率法は、FLÜGEL²⁾の考出した方法である。座標の弧長 s と n を変数と考え、渦なしの式とその積分

$$\zeta \equiv -\frac{\partial u}{\partial n} + C_\alpha u = 0, \quad \frac{u}{u_\infty} = \exp\left(\int_0^n C_\alpha dn\right) \quad (2)$$

を使うので、直交線に沿う流線曲率の積分をする必要がある。この方法は最近また注目され、翼列間の流れを BINDON & CARMICHAEL³⁾ や BINDON⁴⁾ が、またノズル内の流れを BARGER⁵⁾ が扱っている。 s, n は独立変数ではないので、複雑な式のときは注意を要する。

流線解析法は、UCHIDA^{6), 10)} による方法で、独立変数を α, β にとり、正規の直交曲線座標表式に基づいている。複雑な偏微分方程式を近似的な常微分方程式におきかえ、境界条件を入れながら逐次代入法で解く点に特長がある。境界値問題の解法として一般的に扱えることができる。

単純な渦なし流れの場合には、渦なしの式とその積分

$$\zeta \equiv -\frac{1}{h_\alpha h_\beta} \frac{\partial(u h_\alpha)}{\partial \beta} = 0, \quad \frac{u}{u_\infty} = \frac{h_\alpha}{h_\alpha} \quad (3)$$

を使う。直交線に沿う拡大率の比は、2本の直交線($\partial \alpha$)間の弧長 ∂s の比 $h_\alpha/h_\alpha \equiv \partial s/\partial s_\infty$ で近似できる。

第1図 直交曲線座標の要素

第2図 直交曲線座標の構成法
(a)直交線の引き方, (b)座標格子点の修正過程

第3図 流線解析法の座標

境界 a, b 間の定常圧縮性流れを解くには, 連続方程式とその積分 (δ 二次元=0, δ 軸対称=1 を導入)

$$\frac{1}{h_\alpha h_\beta r^3} \frac{\partial(\rho u r^3 h_\beta)}{\partial \alpha} = 0, \quad \psi \equiv \int_{\beta_a}^{\beta} \rho u r^3 h_\beta d\beta \quad (4)$$

と, 等エントロピー式 $p/\rho^\gamma = C$ と全エネルギー式

$$E \equiv (1/2)u^2 + [\gamma/(\gamma-1)](p/\rho) = \text{一定} \quad (5)$$

から出る $\rho = [(E - u^2/2)(\gamma-1)/(\gamma C)]^{1/(\gamma-1)}$ を使う。

まず流線座標の形を仮定して, 式(3)を全流量の式

$$\psi_{\text{tot}} \equiv \int_{\beta_a}^{\beta_b} \rho u r^3 h_\beta d\beta \quad (6)$$

に代入し, 境界 b 上の境界条件を満たすように速度の境界値 $u_a(\alpha)$ を求める。これを式(4)に代入すると, 流線 ($\psi = \text{一定}$) の通るべき位置 β (したがって n) が求まり, 第2図(b)のようにして流線座標が修正される。この計算をくり返して収束したものが解となる。

この方法で, ノズル⁶⁾, タービン翼列⁷⁾, 離脱衝撃波後方の流れ⁸⁾, 任意の壁速分布をもつノズル¹⁰⁾, 管内旋回流¹¹⁾などが UCHIDA ら^{6)-8), 10), 11)}により, 軸流圧縮機用翼列間の流れが中村・大塚⁹⁾により解かれてい

る。実用的には便利な方法で収束も早い。しかし現在

第4図 軸対称流面座標

のところ, 網目をあまり細かくとつても, 直交線の折線近似のためや, それがスプライン補間区間にまたがった場合の変形などにより, 精度はある程度以上には上がらないようである (後の第5図参照)。

渦度を含む非粘性流体の管内旋回流¹¹⁾ (軸対称) の例を示そう。子午面内に流線座標 α, β , 円周方向に座標 φ をとる (第4図)。子午面内速度 u , 円周方向速度 w , 全速度 $V \equiv \sqrt{u^2 + w^2}$ を使い, 全エネルギー $E = (V^2/2) + e + p/\rho = E(\psi)$, エントロピー $S = S(\psi)$ を導入すると, 運動方程式から CROCCO の式

$$\mathbf{V} \times \text{rot} \mathbf{V} = \text{grad} E - T \text{grad} S \quad (7)$$

を得る。軸対称流面座標 α, β, φ 方向の渦度成分は

$$\xi = \frac{1}{r h_\beta} \frac{\partial(w r)}{\partial \beta}, \quad \eta = -\frac{1}{r h_\alpha} \frac{\partial(w r)}{\partial \alpha}, \quad (8)$$

$$\zeta = -\frac{1}{h_\alpha h_\beta} \frac{\partial(u h_\alpha)}{\partial \beta}$$

式(7)の α, φ 成分から $\eta = 0$ 。∴ 循環関数 $K \equiv w r$

は流面上で一定となり, $K = K(\psi)$ 。式(7)の β 成分

$$w \xi - u \zeta = (E' - T S') (1/h_\beta) (d\psi/d\beta) \quad (9)$$

の T に, $C_p T = E - (u^2 + w^2)/2$ を代入すると

$$u \zeta = -\frac{u}{h_\alpha} \frac{\partial(u h_\alpha)}{h_\beta \partial \beta} = \left[\frac{K K'}{r^2} - E' + \left(E - \frac{u^2 + w^2}{2} \right) \frac{S'}{C_p} \right] \frac{d\psi}{h_\beta d\beta}$$

これを $w = K/r$ と, $d\psi = \rho u r h_\beta d\beta$ で整理すると

$$\frac{\partial(u h_\alpha)^2}{\partial \psi} - \frac{S'}{C_p} (u h_\alpha)^2 = 2 h_\alpha^2 \left[\left(E' - \frac{K K'}{r^2} \right) - \left(E - \frac{K^2}{2 r^2} \right) \frac{S'}{C_p} \right] \quad (10)$$

積分して, 境界 a で $\psi = 0$ の境界条件を入れると

$$u^2 = \left(\frac{h_{\alpha a}}{h_\alpha} \right)^2 e^{\frac{S - S_a}{C_p}} \left\{ u_a^2 + \int_0^\psi 2 \left(\frac{h_\alpha}{h_{\alpha a}} \right)^2 e^{-\frac{S - S_a}{C_p}} \times \left[\left(E' - \frac{K K'}{r^2} \right) - \left(E - \frac{K^2}{2 r^2} \right) \left(\frac{S'}{C_p} \right) \right] d\psi \right\} \quad (11)$$

非圧縮流のときは, E が $E_1 = (V^2/2) + p/\rho$ に変わり

第5図 格子点数の収束過程への影響¹¹⁾

$$u^2 = \left(\frac{h_{\alpha\alpha}}{h_\alpha}\right)^2 \left[u_\alpha^2 + \int_0^\psi 2 \left(\frac{h_\alpha}{h_{\alpha\alpha}}\right)^2 \left(E_1' - \frac{KK'}{r^2} \right) d\psi \right] \quad (12)$$

計算法は、まず流面座標の格子網を仮定すると $h_\alpha/h_{\alpha\alpha}$ も仮定される。上流で与えられた E (または E_1)、 K に対し、 u が計算される。境界値 u_α は式(6)の ϕ_{tot} (bでの境界条件)から定められる。つぎに各流面の ϕ を与える β (または n) の値から、修正されるべき流面の位置 (第2図bの×印) が求まり、直交線を引くと、修正された流面座標の格子点 (第2図bの○印) が求められる。これをくり返して収束に至らせる。

拡大管内の旋回流に関する計算例¹¹⁾について、代表格子点における流面修正量のくり返し数による変化を求め、収束性を調べた。格子点数 (縦 M 、横 N) の影響を第5図に示す。厳密解と比較した結果は、第6図のように良好であった。

4. 流線ベクトル法

流れ関数に注目して、流れ場の座標から速度ベクトルを求めた流線解析法に対し、ISHII^{12), 13)} は、速度の大きさ V と方向 θ の変化に注目して、流れ場を求める速度ベクトル法とでもいうべき方法を提案している。

流線座標の傾斜角 θ により

$$\frac{\partial y}{\partial \alpha} = (\partial x / \partial \alpha) \tan \theta, \quad \frac{\partial x}{\partial \beta} = -(\partial y / \partial \beta) \tan \theta \quad (13)$$

また、 $h_\alpha = (\partial x / \partial \alpha) / \cos \theta$, $h_\beta = (\partial y / \partial \beta) / \cos \theta$ 。諸量は局所音速状態の量で無次元化しておく。連続方程式(4): $\partial(\rho V y h_\beta) / \partial \alpha = 0$ と、渦なしの式(3): $\partial(V h_\alpha) / \partial \beta = 0$ を変形すると、それぞれつぎようになる。

$$\frac{\partial \theta}{\partial \beta} = -\frac{\partial y / \partial \beta}{y} \tan \theta - \frac{\partial y / \partial \beta}{\partial x / \partial \alpha} \frac{1 - V^2}{1 - [(\gamma - 1) / (\gamma + 1)] V^2} \frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial \alpha} \quad (14a)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \alpha} = \frac{\partial x / \partial \alpha}{\partial y / \partial \beta} \frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial \beta} \quad (14b)$$

式(15)(16)を連立させ、 V と θ の α 方向の変化から β

第6図 拡大管内の旋回流 (厳密解との比較)¹¹⁾
(a) 流線の収束過程, (b) 軸 α 、壁 b に沿う子午面速度成分と圧力の分布 第7図 超音速ノズルの音速線¹³⁾

方向の変化を求めて、速度ベクトルと流線座標を求めていく。一例として、軸上で亜音速から超音速に至る速度分布を与え、ノズルの形や音速線を求めているが¹³⁾、第7図のようによい結果を得ている。

5. 流線関数座標または流線座標による解析

流れ関数 ψ と直交関数 ϕ を独立変数として問題を解く方法も考えられている。渦度の式 $\zeta = -(1/h_\alpha h_\beta) \cdot \partial(uh_\alpha)/\partial\beta$ から, $\zeta h_\alpha h_\beta + \partial(uh_\alpha)/\partial\beta = 0$ 。したがって

$$\partial \left[uh_\alpha + \int \zeta h_\alpha h_\beta d\beta \right] / \partial\beta = 0 \quad (15)$$

[] 内の量は α だけの関数となるから, これを

$$\partial\phi/\partial\alpha = uh_\alpha + \int \zeta h_\alpha h_\beta d\beta; \quad \partial\phi/\partial\beta = 0 \quad (16)$$

とおき, ϕ を定義する。または式 (15) の前の式を uh_α で割った式: $(\zeta/u)h_\beta + [\partial(uh_\alpha)/\partial\beta]/(uh_\alpha) = 0$ から

$$\partial \left\{ uh_\alpha \exp \left[\int (\zeta/u) h_\beta d\beta \right] \right\} / \partial\beta = 0 \quad (17)$$

$$\therefore \partial\phi/\partial\alpha = uh_\alpha \exp \left[\int (\zeta/u) h_\beta d\beta \right], \quad \partial\phi/\partial\beta = 0 \quad (18)$$

において ϕ を定義する。HONDA^{14), 15)} は後の方式により

$$\frac{\partial\phi}{\partial s} = ue^u; \quad \frac{\partial\Omega}{\partial n} = \frac{\zeta}{u} = \frac{1}{(\gamma-1)M^2} \frac{\partial(S/C_p)}{\partial n} \quad (19)$$

を導いた。連続方程式から導かれる関係

$$\partial\phi/\partial\beta = \rho ur^* h_\beta, \quad \partial\phi/\partial\alpha = 0 \quad (20)$$

(ここで δ -二次元=0, δ 軸対称=1) と連立させると

$$dx + i dy = (e^{i\theta}/u) [e^{-\theta} d\phi + i(\rho y^*) d\psi] \quad (21)$$

により, 物理面との関係がつけられる。HONDA はこれを流線関数座標と名づけ, ϕ, ψ を独立変数にとって, 湾曲衝撃波の後の流れ^{14), 15)} を解いている。

非圧縮性流体の NAVIER-STOKES 方程式

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_t + \nabla(V^2/2) - \mathbf{V} \times \boldsymbol{\zeta} \\ = D\mathbf{V}/Dt = -\nabla p/\rho + \nu \nabla^2 \mathbf{V} \end{aligned} \quad (22)$$

(ここで $\boldsymbol{\zeta} = \text{rot } \mathbf{V} = \nabla \times \mathbf{V}$) から, 渦方程式が導かれる。

$$\mathbf{V} \times \text{rot } \mathbf{V} = \mathbf{V}_t + \text{grad } E_1 + \nu \nabla \times \text{rot } \mathbf{V} \quad (23)$$

定常流の場合, 流線座標 α, β 成分から

$$\begin{aligned} \frac{1}{h_\alpha} \frac{\partial E_1}{\partial \alpha} &= -\nu \frac{1}{h_\beta} \frac{\partial \zeta}{\partial \beta} \\ \frac{1}{h_\beta} \frac{\partial E_1}{\partial \beta} &= -V\zeta + \nu \frac{1}{h_\alpha} \frac{\partial \zeta}{\partial \alpha} \end{aligned} \quad (24)$$

$E_1 \equiv V^2/2 + p/\rho$ を消去すると, 渦方程式

$$\frac{\partial(V\zeta h_\beta)}{\partial \alpha} = \nu \left[\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{h_\beta}{h_\alpha} \frac{\partial \zeta}{\partial \alpha} \right) + \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{h_\alpha}{h_\beta} \frac{\partial \zeta}{\partial \beta} \right) \right] \quad (25)$$

を得る。YEN & TOBA¹⁶⁾ はこれに境界層近似を加えて湾曲面に沿う境界層の解を試み, UCHIDA & SUZUKI¹⁷⁾, UCHIDA, KUWABARA & KISHI¹⁸⁾ はこれによって湾曲した半噴流の相似解を求めた。HONDA & KIYOKAWA¹⁹⁾ は式 (24) を流線関数座標に変換して, 層流境界層の二次効果を求めている。

6. 境界適合座標 (boundary-fitted coordinates)

流体運動の解析は, 偏微分方程式の境界値問題や初期値問題となることが多い。数値解析の解は, 有限数の格子点における関数値で表わされるから, 連続関数の微分方程式も, 離散化された有限階差の方程式で近似しなければならない。また境界条件も格子点における関数値で満たされなければならない。

格子点が境界面上にないときは, 内挿法を使わなければならないが, 境界の傾斜が急変したり, 大きい曲率をもつようなところでは, 精度が悪くなる。とくに境界付近で大きい微係数をもつような流れの境界条件の場合, 精度の低下は著しい。ある一つの微分方程式に関する境界値問題において, その解の特性は, 境界条件に左右されるわけであるから, 境界条件の精度はただちに解の精度に影響する。

境界条件からの精度低下を防ぐために, 内挿を必要としない座標系として, 境界面上に格子点をもつ曲線座標系が使われるようになってきた。このような座標系は境界適合座標 (boundary-fitted coordinates) とよばれ, 1980年の格子形成技術の会議²⁰⁾でも多数の研究が発表された。

数値解析用座標の最近の傾向は, 物理面 (xy 平面) の物体まわりの場を, 計算面 ($\xi\eta$ 平面) の長方形領域内に写すようになってきている。独立変数を ξ, η に変換し, 計算面上の等間隔直角格子で, 数値解析を行い, 結果を物理面上の量に戻すわけである。計算面または変換面における直角座標 ($\xi, \eta = \text{一定}$) は, 物理面上で物体とそれを囲む曲線座標に対応する。両面の対応のさせ方によって, 第8図のような3種の曲線座標格子 (流れ型またはチャンネル型, O型, C型) が形成される。第9図に翼列についての一例を示す。

これら曲線座標格子網の形成法の満たすべき要件は任意の境界形に適合すること, 境界上に格子点を任意に分布できること, 流れ場で微分可能なように滑らかに変化していること, 計算が速いこと, 使いやすいくこと, などである。

7. 境界を含む直交曲線座標

等角写像は, 昔から行われていた座標の変換法で JOUKOWSKI や KÁRMÁN-TREFFITZ の変換

$$z = \zeta + (1/\zeta), \quad (26a)$$

$$(z-\delta)/(z+\delta) = [(\zeta-1)/(\zeta+1)]^2 \quad (26b)$$

また KÖNIG らの使った直線翼列変換

$$z = e^{i\theta} \ln \frac{\zeta - \kappa}{\zeta + \kappa} + e^{-i\theta} \ln \frac{\kappa \zeta - 1}{\kappa \zeta + 1} \quad (27)$$

などはよく知られている。

SELLS²¹⁾ は LAURENT 級数と逆数変換

第8図 境界適合座標の3型式

第9図 翼列における3型式の例

$$z = \zeta + a_0 + a_1/\zeta + \dots, \quad \zeta = 1/\sigma \quad (28)$$

を使って物理面 $z (=x+iy)$ の翼外部を $\sigma (=re^{i\theta})$ の単位円内部に等角写像し、これを $r\theta$ 面の長方形領域内へ写した。 $r\theta$ 面の直角格子に対応して、 xy 面の翼表面を含むO型の直交曲線網が形成される。 GARABEDIAN & KORN²²⁾ や BAUER, GARABEDIAN, KORN & JAMESON²³⁾ は、この方式の格子網を使って遷音速翼まわりの流れを計算した。

WU & GULCAT²⁴⁾ は、任意の境界形を単位円に写像する有限 LAURENT 級数の解を求めた。境界上の格子点 $z_k (k=1, 2, \dots, K \text{ 奇整数})$ に対応する単位円上の等間隔点 ζ_k を、 $\zeta_k = \exp(i2\pi k/K)$ とおくと、有限 LAURENT 級数

$$z = \sum_{n=-N}^N C_n \zeta^n; \quad N=(K-1)/2 \quad (29)$$

の係数 C_n はつぎの演算によって求められる。

$$\begin{aligned} & \sum_{k=-N}^N z_k \exp(i2\pi km/K) \\ &= \sum_{n=-N}^N C_n \sum_{k=-N}^N \exp[i2\pi k(m-n)/K] \\ &= \begin{cases} KC_n & (m=n \text{ のとき}) \\ 0 & (m \neq n \text{ のとき}) \end{cases} \end{aligned}$$

$$\therefore C_n = (1/K) \sum_{k=-N}^N z_k \exp(i2\pi kn/K)$$

したがって

$$z = (1/K) \sum_{n=-N}^N \left[\sum_{k=-N}^N z_k \exp(i2\pi kn/K) \right] \zeta^n \quad (30)$$

河合・石黒・神谷²⁶⁾ は SCHWARTZ-CHRISTOFFEL 変換

$$dz/d\zeta_1 = (1-\zeta_1^{-1})^{1-(\delta/\pi)} \exp \left[\sum_{n=0}^N (C_n/\zeta_1^n) \right]; \quad (31)$$

で翼外部を単位円外部へ、 $\zeta_1 = 1/\sigma$ で σ の単位円内部へ、 $\sigma = re^{i\theta}$ で $r\theta$ 面の長方形領域内へ写像した。 $r\theta$ 面の等間隔格子網に対応する z 面のO型曲線座標格子と計算例を第10図に示す。なお計算結果は境界層効果を加算することにより、実験結果に近いものとなることが確かめられている。

石黒²⁵⁾ はまた第11図のように、 ζ_1 の単位円外部を

第10図 等角写像による格子網と計算例²⁴⁾
(a) O型格子網, (b) 遷音速流の計算例

第11図 等角写像の例 (C型格子網)²⁴⁾

第12図 C型格子網の例²⁴⁾

$w = (x_1 + iy_1) = \sqrt{\zeta_1} + 1/\sqrt{\zeta_1}$ で w 面の半平面に, w 面から

$$\xi = \begin{cases} 2(1+1/x_1): x_1 \leq -2 \\ -x_1/2: -2 < x_1 < 2 \\ 2(-1+1/x_1): 2 \leq x_1 \end{cases}, \quad (32)$$

$$\eta = y_1/(1+y_1): 0 \leq y_1$$

で ζ 面の長方形領域へ写像することにより, 第12図のようなC型の格子網を形成する方式を提案した.

GNOFFO²⁷⁾ はこれらと似た考え方を, 軸対称体を含む具体的な問題に應用している. 物理空間の直角座標 x, y, z をつぎの関数形で変換空間の極座標 r, θ, φ (二次元のときは $\varphi=0$) に変換するもので, 計算の便宜上 $r \leq 0$ とする.

$$\begin{aligned} x &= (-B \sinh r + C \cosh r) \cos \theta \\ &\quad - \sum_{n=2}^N A_n e^{nr} \cos n\theta \\ y &= [(B \cosh r - C \sinh r) \sin \theta + \sum A_n e^{nr} \sin n\theta] \cos \varphi \\ z &= [(B \cosh r - C \sinh r) \sin \theta + \sum A_n e^{nr} \sin n\theta] \sin \varphi \end{aligned} \quad (33)$$

$(\partial y / \partial x)_r = -1 / (\partial y / \partial x)_\theta = -1$ から $r = \text{一定}$ と $\theta = \text{一定}$ の曲線は直交する. 遠方の $r \rightarrow -\infty$ では, $x \approx (B+C) \cosh r \cdot \cos \theta$, $y \approx [(B+C) \cosh r \cdot \sin \theta] \cos \varphi$, $z \approx [(B+C) \cosh r \cdot \sin \theta] \sin \varphi$ となるから, 原点からの距離 $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \approx (B+C) \cosh r$ となり, 格子点は半径 $(B+C) \cosh r$ の円 (二次元) または球面 (軸対称) 上にならぶことになる. 物体表面の形は

$$\begin{aligned} x_b &= C \cos \theta - \sum_{n=2}^N A_n \cos n\theta \\ y_b &= [B \sin \theta + \sum_{n=2}^N A_n \sin n\theta] \cos \varphi \\ z_b &= [B \sin \theta + \sum_{n=2}^N A_n \sin n\theta] \sin \varphi \end{aligned} \quad (34)$$

で表わされる. 式中の係数 A_n, B, C などは FOURIER 変換で容易に求められる.

二次元の場合, 等角写像との関係は $\sigma = \theta + ir$ から

$$x(\theta, r) + iy(\theta, r) \equiv W = D e^{i\sigma} - \sum_{n=1}^N A_n e^{-in\sigma} \quad (35)$$

$$D = (B+C)/2, \quad A_1 = (B-C)/2$$

とおいたことになる.

GNOFFO²⁸⁾ は, 軸対称のバイキング突入体に適用して第13図の座標系を得, これを使って第14図のような結果を導いている.

回転機の翼列間の流れは複雑な三次元性をもっている. 第15図のような回転翼列のブレード中間面やブレードを結ぶ面内の流れについて, 数値解析が行われている. KATSANIS & McNALLY²⁹⁾ は, 第16図のように内側 (hub) と外側 (tip) の境界を含む曲線群と, これに立てた幾何学的直交線¹⁾ から成る直交曲線座標

第17図 多体を含む物理面と変換面の対応^{*)~**)}

ここで、 $\alpha = x_v^2 + y_v^2$, $\beta = x_\xi x_v + y_\xi y_v$, $\gamma = x_\xi^2 + y_\xi^2$, $J = x_\xi y_v - x_v y_\xi$. 式(37)を、 Γ_1^* , Γ_2^* , Γ_7^* , Γ_8^* 上で、境界条件

$$\begin{aligned} \Gamma_1^*: x &= f_1(\xi, \eta_1), y = f_2(\xi, \eta_1) \\ \Gamma_2^*: x &= g_1(\xi, \eta_2), y = g_2(\xi, \eta_2) \\ \Gamma_7^*: x &= h_1(\xi, \eta_1), y = h_2(\xi, \eta_1) \\ \Gamma_8^*: x &= q_1(\xi, \eta_1), y = q_2(\xi, \eta_1) \end{aligned} \quad (38)$$

を満たすように、また第17図のカットの両側で x, y ともに等しい値をとるようにして解く。

P, Q は格子間隔を調節するための関数で

$$\begin{aligned} P &= - \sum_{i=1}^n a_i \operatorname{sgn}(\xi - \xi_i) \exp[-C_i |\xi - \xi_i|] \\ &\quad - \sum_{i=1}^m b_i \operatorname{sgn}(\xi - \xi_i) \exp[-d_i \sqrt{(\xi - \xi_i)^2 + (\eta - \eta_i)^2}] \\ Q &= - \sum_{i=1}^n a_i' \operatorname{sgn}(\eta - \eta_i) \exp[-C_i' |\eta - \eta_i|] \end{aligned} \quad (39)$$

$$- \sum_{i=1}^m b_i' \operatorname{sgn}(\eta - \eta_i) \exp[-d_i' \sqrt{(\xi - \xi_i)^2 + (\eta - \eta_i)^2}]$$

とおくことができる。物体境界 ($\eta = \text{一定}$) から離れる方向に η が増加している座標の場合に、 Q 関数の a_i' や b_i' を正数として増加させるにつれて、 $\eta (= \text{一定})$ の線の間隔が縮小して境界に近づいてくる。 a_i' の増大は η 線を η_i 線に、また b_i' の増大は η 線を ξ_i, η_i 点に近づける。その影響は指数関数的に減衰するが、接近効果の及ぶ範囲は c_i', d_i' によって調節される。また接近効果は、符号変更関数 sgn により、 $\eta_i (= \text{一定})$ の線や ξ_i, η_i 点の両側で行われる。 sgn がないと、 η_i 線の片側で縮小、反対側で拡大となる。 P 関数では、 $\xi (= \text{一定})$ の線について、同様なことがおこる。

a_i', b_i' の増大によって境界付近の η 線を密にする場合、 P 関数の作用で ξ 線と境界 (η 線) とのなす角が変化する。境界面上の点が固定していて、 ξ 線が ξ の減少する方向に移動するためである。

KÁRMÁN-TREFFTZ 翼に同じ翼型のフラップをつけた場合について、この方法で得られた O 型の座標を第18図(a)に、また翼面付近を密にした座標を第18図(b)に示す。

二次元非圧縮性流体の NAVIER-STOKES 方程式への適用例を示そう。流れ関数 ψ , 渦度 ω を導入すると、変換面上の微分方程式は

$$\begin{aligned} \omega_i + (\psi_v \omega_\xi - \psi_\xi \omega_v) / J \\ = (\alpha \omega_{\xi\xi} - 2\beta \omega_{\xi v} + \gamma \omega_{vv} + \sigma \omega_v + \tau \omega_\xi) / (J^2 Re) \end{aligned} \quad (40)$$

$$\alpha \psi_{\xi\xi} + 2\beta \psi_{\xi v} + \gamma \psi_{vv} + \sigma \psi_v + \tau \psi_\xi = -J^2 \omega \quad (41)$$

ただし、 $\sigma = (y_\xi D_x - x_\xi D_y) / J$, $\tau = (x_v D_x - y_v D_y) / J$, また Re はレイノルズ数。これらを境界条件

$$\begin{aligned} \text{物体面上で } \psi &= \text{一定}, (\sqrt{\gamma} / J) \psi_v = 0 \\ \text{遠方境界で } \psi &= y \cos \theta - x \sin \theta, \omega = 0 \end{aligned} \quad (42)$$

第18図 KÁRMÁN-TREFFTZ 翼フラップの O 型座標^{*)~**)}
(a) 通常の格子網, (b) 翼面付近を密にした格子網

第19図 KÁRMÁN-TREFFTZ 翼フラップまわりの速度ベクトルと表面圧力分布³¹⁾

第20図 翼列用境界適合型座標の例
(a) 流れ形(チャンネル型)の例³⁴⁾, (b) C型の例³⁵⁾

を満たしながら、時間依存方式により t のステップを進めつつ積分していく。レイノルズ数 $Re=1,000$ における計算例³¹⁾を第19図に示した。

物体表面からの η 線までの間隔 $\Delta\eta$ や、 ξ 線と表面の傾斜角 ϕ などを指定して、曲線座標を求める方法が SORENSON & STEGER³³⁾ によって提案されている。

このほか偏微分方程式の選び方により、多数の格子網形成法が考えられる。ここでは翼列用格子網の例として、GHIA & GHIA³⁴⁾ の求めた流れ型(チャンネル型)の例を第20図(a)に、また SOCKOL³⁵⁾ の求めたC型の例を第20図(b)に示す。

9. む す び

曲線座標による流れの解析法について、特性的な座標を組み立てて流れを解く方法と、任意形物体の境界適合型曲線座標網を形成する方法を概説した。前者が積分の形を簡易化する方式であるのに対し、後者は微分方程式は複雑な形になるにしても、変換面での直角座標網で積分できる、という利点を有し、計算機に適

した解法と考えられる。後者の網目は小四辺形から成っているが、これを適当な規則に従って二分割すれば全面が三角形の網目でおおわれ、有限要素法に適合する網目が得られる。物体表面付近での網目の縮小率などを考慮する場合に、有力な手段を与えるものと考えられる。

参考文献

- 1) McNALLY, W. D.: FORTRAN Program for Generating a Two-dimensional Orthogonal Mesh between Two Arbitrary Boundaries, NASA TN D-6766 (1972).
- 2) FLÜGEL, G.: Ein neues Verfahren der graphischen Integration, angewandt auf Strömungen idealer Flüssigkeiten in Kreiselrädern, Ztschr. f. d. gesamte Turbinenwesen, Vol. 12, No. 7 (1915), pp. 73-77, 89-91, 100-103.
- 3) BINDON, J. P. and CARMICHAEL, A. D.: Streamline Curvature Analysis of Compressible and High Mach Number Cascade Flows, J. Mech. Eng. Sci., Vol. 13, No. 5 (1971), pp. 344-357.
- 4) BINDON, J. P.: Stability and Convergence of Streamline Curvature Flow Analysis Procedures, Int. J. Numer. Meth. Eng., Vol. 7, No. 1 (1973), pp. 69-83.
- 5) BARGER, R. L.: Streamline Curvature Design Procedure for Subsonic and Transonic Ducts, NASA TN D-7368 (1973).
- 6) UCHIDA, S.: A New Approximate Solution in Boundary Value Problems by the Use of Orthogonal Curvilinear Coordinates, J. Phys. Soc. Japan, Vol. 3, No. 1 (1948), pp. 33-40.
- 7) UCHIDA, S.: Calculation of Compressible Cascade Flow by the Method of Flux Analysis, J. Aero. Sci., Vol. 21, No. 4 (1954), pp. 237-250.
- 8) UCHIDA, S. and YASUHARA, M.: The Rotational Field behind a Curved Shock Wave Calculated by the Method of Flux Analysis, J. Aero. Sci., Vol. 23, No. 9 (1956), pp. 830-845; Vol. 25, No. 3 (1958), p. 200.
- 9) 中村敏明, 大塚新太郎: 流線解析法による翼列の解法の研究, 流体熱工学研究, 第11巻, 第1号 (1976), pp. 27-40.
- 10) UCHIDA, S.: Theory of Streamline Analysis Method Referred to the Orthogonal Curvilinear Coordinates, Memo. Fac. Eng., Nagoya Univ., Vol. 32, No. 1 (1980), pp. 1-85.
- 11) UCHIDA, S., NAKAMURA, Y. and KONDO, T.: Swirl Flow Studies in Diffusers Using the Flux Analysis Method with Orthogonal Curvilinear Coordinates, Int. J. Numer. Meth. Eng., Vol. 18, No. 9 (1982), 1385-1399.
- 12) ISHII, R.: A New Method of Nozzle Design, AIAA J., Vol. 16, No. 7 (1978), pp. 756-759.
- 13) ISHII, R.: Transonic Flow in Axially-Symmetric Nozzles, Trans. Japan Soc. Aero. Space Sci., Vol. 24, No. 63 (1981), pp. 1-16.
- 14) HONDA, M.: Stream-function Co-ordinates in Rotational Flow and an Analysis of the Flow in a Shock Layer, I. Two-dimensional Flow, J. Inst. Maths. Applics, Vol. 1, No. 2 (1965), pp. 127-148.
- 15) HONDA, M.: *ibid*, II. Axisymmetric Flow, J. Inst.

- Maths. Applies, Vol. 2, No. 1 (1966), pp. 55-75.
- 16) YEN, K. T. and TOBA, K.: A Theory of the Two-Dimensional Laminar Boundary Layer over a Curved Surface, *J. Aero. Sci.*, Vol. 28, No. 11 (1961), pp. 877-884.
- 17) UCHIDA, S. and SUZUKI, T.: On a Similar Solution for a Turbulent Half-Jet along a Curved Streamline, *J. Fluid Mech.*, Vol. 33, No. 2 (1968), pp. 379-395.
- 18) UCHIDA, S., KUWABARA, K. and KISHI, M.: On a Similar Solution for a Laminar Half-Jet along a Curved Streamline, *Trans. Japan Soc. Aero. Space Sci.*, Vol. 16, No. 34 (1973), pp. 264-279.
- 19) HONDA, M. and KIYOKAWA, Y.: An Analysis of Second-Order Effects on Laminar Boundary-Layer Flow, *J. Fluid Mech.*, Vol. 35, No. 1 (1969), pp. 145-169.
- 20) NASA: Numerical Grid Generation Techniques, NASA CP 2166 (1980).
- 21) SELLS, C. C. L.: Plane Subcritical Flow Past a Lifting Aerofoil, *Proc. Roy. Soc. A*, Vol. 308, No. 1494 (1968), pp. 377-401.
- 22) GARABEDIAN, P. R. and KORN, D. G.: Analysis of Transonic Airfoils, *Comm. Pure Appl. Math.*, Vol. 24, No. 6 (1971), pp. 841-851.
- 23) BAUER, F., GARABEDIAN, P., KORN, D. and JAMESON, A.: Supercritical Wing Sections II, *Lect. Notes Econ. Math. Syst.*, Vol. 108, Springer-Verlag, New York (1975).
- 24) WU, J. C. and GULCAT, U.: A Body-Fitted Conformal Mapping Method with Grid-Spacing Control, NASA CP 2166 (1980), pp. 545-560.
- 25) 石黒登美子: 二次元翼まわりの非粘性圧縮流の数値計算, 日本航空宇宙学会誌, 第25巻, 第278号 (1977), pp. 118-124, 航空宇宙技術研究所報告, 第489号 (1977).
- 26) 河合伸坦, 石黒登美子, 神谷信彦: 二次元翼まわり遷音速流数値計算の汎用プログラム, 航空宇宙技術研究所資料, NAL TM-357 (1978).
- 27) GNOFFO, P. A.: A Generalized Orthogonal Coordinate System for Describing Families of Axisymmetric and Two-Dimensional Bodies, NASA TMX-3468 (1977).
- 28) GNOFFO, P. A.: Forebody and Afterbody Solutions of the NAVIER-STOKES Equations for Supersonic Flow over Blunt Bodies in a Generalized Orthogonal Coordinate System, NASA TP 1075 (1978).
- 29) KATSANIS, T. and McNALLY, D.: Revised FORTRAN Program for Calculating Velocities and Streamlines on the Hub-Shroud Midchannel Stream Surface of an Axial-, Radial-, or Mixed-Flow Turbomachine or Annular Duct, NASA TN D-8430 (1977).
- 30) THOMPSON, J. F., THAMES, F. C. and MASTIN, C. W.: Automatic Numerical Generation of Body-Fitted Curvilinear Coordinate System for Fields Containing Any Number of Arbitrary Two-Dimensional Bodies, *J. Comput. Phys.*, Vol. 15, No. 3 (1974), pp. 299-319.
- 31) THOMPSON, J. F., THAMES, F. C., MASTIN, C. W. and SHANKS, S. P.: Use of Numerically Generated Body-Fitted Coordinate Systems for Solution of the NAVIER-STOKES Equations, *Proc. AIAA 2nd Comput. Fluid Dyns. Conf.*, Hartford, Conn. (1975).
- 32) THOMPSON, J. F., THAMES, F. C. and MASTIN, C. W.: TOMCAT-A Code for Numerical Generation of Boundary-Fitted Curvilinear Coordinate Systems on Field Containing Any Number of Arbitrary Two-Dimensional Bodies, *J. Comput. Phys.*, Vol. 24, No. 3 (1977), pp. 274-302.
- 33) SORENSON, R. L. and STEGER, J. L.: Numerical Generation of Two-Dimensional Grids by the Use of Poisson Equations with Grid Control, NASA CP 2166 (1980), pp. 449-461.
- 34) GHIA, U. and GHIA, K. N.: Boundary-Fitted Coordinates for Regions with Highly Curved Boundaries and Reentrant Boundaries, NASA CP 2166 (1980), pp. 295-305.
- 35) SOCKOL, P. M.: Generation of C-Type Cascade Grids for Viscous Flow Computation, NASA CP 2166 (1980), pp. 437-447.