可変安定応答実験機 (VSRA) について (II)*

——周波数応答による安定・操縦微係数の同定——

古茂田 真幸**・川 幡 長 勝***
塚 野 雄 吉**・小 野 孝 次**

1. ま え が き

VSRA⁴⁾ のモデル追従精度を向上するには、母機 (ビーチクラフト・B65) の安定操縦微係数を精度よく把握することが肝要である。VSRA は各種センサーならびに空力3舵とスロットルにサーボ系を備えており、機上計算機で任意の操舵入力を作り機体を励起できる¹⁾ので、比較的容易に安定操縦微係数同定のための飛行試験を行い、データを収集できる。近年、電子計算機の発達によって、データ処理能力が向上し、計測データを時間領域で処理して (Least Square, Max. Likelihood 等)、システム同定を行うことが多い。ここでは、VSRA システムによって3舵およびスロットルを種々の周波数で持続的に加振し、機体を強制振動させる飛行試験を行い、その周波数特性から伝達関数を推定して安定操縦微係数を同定する伝統的手法を採用した。強制振動法では、(i) 加振周波数で信号が無限のパワーをもつので、原理的には風および計測ノイズにまったく影響されることなく入出力関係の検出が可能であり、S/Nがよく、同定精度が格段に向上する、(ii) 入出力間の振幅比・位相差のみが重要であり、センサーバイアスと無関係である、(iii) 種々の周波数で持続的な加振を行うので、各運動モードを十分に励起できる等の長所が期待できる。ちなみに、その短所は、(i) 減衰の小さい固有振動数付近ではビート現象を起こし、基本波成分の分離がしばしば困難なこと、(ii) 実験に時間を要するなどである。

本報告のような航空機の周波数特性に関する飛行試験データや、安定操縦微係数の同定例はきわめて少ない。今回、周波数特性のみでなく、一般入力に対する時間応答のシミュレーションも飛行試験データとよく

一致する比較的精度よい同定結果を得た。試験は昭和54年9月から55年4月にかけて、高度8,000~9,000 ft, フラップ角 $\delta_f=0^\circ$, トリム速度 120 mph IAS で行った。

2. 周波数応答法による同定

航空機の運動方程式のモデル化、および、周波数応答による安定操縦微係数の同定原理の概略を述べる。

2.1 線形モデル 航空機の運動は、通常のごとく定常直線飛行のあるトリム状態回りで線形化された方程式で記述され、縦および横/方向の運動は互いに分離可能とする²⁾。線形化運動方程式は、センサー軸 (機体軸の一つで3.1節参照) に関するものとし、縦および横/方向運動ともに、1階のベクトル常微分方程式で表現する。

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B\delta(t) + A_\xi \xi(t) \quad (1)$$

ここに、 $x(t)$ は状態ベクトル、 $\delta(t)$ は操舵入力ベクトル、 $\xi(t)$ は風を表わすベクトル、 A は安定微係数マトリクス、 B は操縦微係数マトリクス、 A_ξ は風の影響を表わすマトリクスである。

縦運動では、トリムからの昇降舵角 δ_e およびエンジン吸気管圧力 (manifold pressure) の変動 δ_{map} を二つの操舵入力とする。Map の変動 δ_{map} に対する推力変動 τ を測ることはできないが、2次遅れで応答すると仮定する。 u および w はトリム状態からの速度擾乱をセンサー軸の X および Z 軸に沿って表わしたもの、 q および θ はセンサー軸の Y 軸まわりのピッチ角速度およびピッチ姿勢角、また、 τ および ϵ をトリムからの推力の変動および変化率とすれば、状態ベクトルを $x(t) = [u, w, q, \theta, \tau, \epsilon]^T$ 、操舵ベクトルを $\delta(t) = [\delta_e, \delta_{map}]^T$ と見なして (1) の型の運動方程式を書くことができる。当航空宇宙学会編集の航空宇宙工学便覧および文献 2) におけると同様な有次元の安定操縦微係数を使うと、センサー軸に関する運動方程式の具体的な表現は次のようになる。

* 昭和55年11月7日、第18回飛行機シンポジウムにて講演。昭和57年5月28日原稿受理 Identification of Stability and Control Derivatives by Frequency Response Method Using VSRA System

** 航空宇宙技術研究所飛行実験部 Masaki Komoda, Yukichi Tsukano and Takatsugu Ono

*** 航空宇宙技術研究所新型航空機研究グループ Naga-katsu KAWAHATA

* ($\cdot$)^T はベクトルあるいはマトリクスの転置を表わす。

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{w} \\ \dot{q} \\ \dot{\theta} \\ \vdots \\ \dot{\tau} \\ \dot{t} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} X_u & X_w & -W_0 + X_q & -g \cos \Theta_0 & X_\tau & X_t \\ Z_u' & Z_w' & U_0 + Z_q' & -g \sin \Theta_0 + Z_{\theta}' & Z_\tau' & Z_t' \\ M_u' & M_w' & M_q' & M_{\theta}' & M_\tau' & M_t' \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\omega_r^2 & -2\zeta_r \omega_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ w \\ q \\ \theta \\ \vdots \\ \tau \\ t \end{bmatrix} \\
 &+ \begin{bmatrix} X_{\delta_e} & 0 \\ Z_{\delta_e}' & 0 \\ M_{\delta_e}' & 0 \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \\ 0 & H_{\text{map}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_e \\ \vdots \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -X_u & -X_w & 0 \\ -Z_u' & -Z_w' & -2Z_w' + Z_q'/U_0 \\ -M_u' & -M_w' & -2M_w' + M_q'/U_0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_s \\ w_s \\ \dot{w}_s \end{bmatrix} \quad (2)
 \end{aligned}$$

ここに、 $X_{\dot{w}}=0$ を仮定した。 Z および M の primed 微係数 ($\cdot'$) については、 $Z_q' \triangleq (Z_q + U_0 Z_{\dot{w}})/(1 - Z_{\dot{w}})$, $Z_{\theta}' \triangleq -g Z_{\dot{w}} \sin \Theta_0/(1 - Z_{\dot{w}})$, $M_q' \triangleq M_q + M_{\dot{w}} Z_q' + U_0 M_{\dot{w}}$, $M_{\theta}' \triangleq M_{\dot{w}}(-g \sin \Theta_0 + Z_{\theta}')$ を除いては $Z_{\cdot,\cdot}' \triangleq Z_{\cdot,\cdot}/(1 - Z_{\dot{w}})$ および $M_{\cdot,\cdot}' \triangleq M_{\cdot,\cdot} + M_{\dot{w}} Z_{\cdot,\cdot}'$ で定義される。また、 u_s, w_s は突風のセンサー軸成分

である。

横/方向の運動では、補助翼角 δ_a および方向舵角 δ_r の 2 操舵入力を考える。すなわち、 $\delta(t) = [\delta_a, \delta_r]^T$ 。また、状態ベクトルは $x(t) \triangleq [v, p, \varphi, r]^T$ とする。文献 2) に従って、横/方向の線形化運動方程式を (1) 式の型に書けば

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \dot{v} \\ \dot{p} \\ \dot{\varphi} \\ \dot{r} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} Y_v & W_0 + Y_r & g \cos \Theta_0 & -U_0 + Y_r \\ L_v'' & L_p'' & L_\varphi'' & L_r'' \\ 0 & 1 & 0 & \tan \Theta_0 \\ N_v'' & N_p'' & N_\varphi'' & N_r'' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ p \\ \varphi \\ r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Y_{\delta_a} & Y_{\delta_r} \\ L_{\delta_a}'' & L_{\delta_r}'' \\ 0 & 0 \\ N_{\delta_a}'' & N_{\delta_r}'' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_a \\ \delta_r \end{bmatrix} \\
 &+ \begin{bmatrix} -Y_v & -Y_p & -Y_r/U_0 \\ -L_v'' & -L_p'' & -(L_r')_g - L_v'(U_0 + Y_r)/U_0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -N_v'' & -N_p'' - N_\varphi' Y_p & -[(N_r')_g + N_\varphi'(U_0 + Y_r)]/U_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_s \\ p_s \\ \dot{v}_s \end{bmatrix} \quad (3)
 \end{aligned}$$

ここに、 $Y_{\dot{v}}=0$ を仮定した。文献 2) にあるごとく primed 微係数は慣性乗積が直接表面に現われないように、それ自身に取り込んだもので、 $J \triangleq 1 - I_{xx}^2/I_x I_x$ とすれば、 $L_{\cdot,\cdot}' \triangleq [L_{\cdot,\cdot} + (I_{xx}/I_x) N_{\cdot,\cdot}]/J$ および $N_{\cdot,\cdot}' \triangleq [N_{\cdot,\cdot} + (I_{xx}/I_x) L_{\cdot,\cdot}]/J$ である。とくに、 $(L_r')_g \triangleq (I_{xx}/I_x) N_r/J$ および $(N_r')_g \triangleq N_r/J$ である。また、double primed 微係数 ($\cdot''$) は (1) 式のような 1 階の微分方程式に書き表すための便宜上のパラメータであり、 $L_p'' \triangleq L_p' + L_\varphi' Y_p + W_0 L_\varphi'$, $L_\varphi'' \triangleq L_\varphi' \cos \Theta_0$, $L_r'' \triangleq L_r' + L_\varphi' Y_r - U_0 L_\varphi'$; $N_p'' \triangleq N_p' + N_\varphi'(Y_p + W_0)$, $N_\varphi'' \triangleq N_\varphi' g \cos \Theta_0$, $N_r'' \triangleq N_r' + N_\varphi'(Y_r - U_0)$ の他は $L_{\cdot,\cdot}'' \triangleq L_{\cdot,\cdot}' + L_\varphi' Y_{\cdot,\cdot}$ および $N_{\cdot,\cdot}'' \triangleq N_{\cdot,\cdot}' + N_\varphi' Y_{\cdot,\cdot}$ で定義されるようなものである。 v_s および p_s は、縦の場合同様、センサー軸の突風擾乱である。

計測される量は、推力変化 τ および t を除いた縦および横/方向の運動に関するすべての状態量、すなわち、

$$y_{\text{mes}}(t) = y(t) + \eta_s(t) \triangleq Cx(t) + \eta_s(t) \quad (4)$$

縦の場合 : $C = [I_4 : O_{4 \times 2}]$

横/方向の場合 : $C = I_4$

および操舵入力

$$\delta_{\text{mes}}(t) = \delta(t) + \eta_s(t) \quad (5)$$

ここに、 I_4 は 4×4 の単位マトリクス、 $O_{4 \times 2}$ は 4×2 の零マトリクスで、以後も同様の表現を使用する。また、 $\eta_{\cdot,\cdot}(t)$ は計測ノイズを表すベクトルである。その他、補助として、3 軸方向の加速度もまた同様に測ることができる。(5) を (1) へ代入して

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B\delta_{\text{mes}}(t) + A_\xi \xi(t) - B\eta_s(t) \quad (6)$$

となるから、操舵入力の計測ノイズ $\eta_s(t)$ を見かけ上、システムノイズとみなすこともできる。

2.2 強制振動による周波数特性データ 同定問題

は、(6), (4) 式で書けるシステムで $y_{\text{mes}}(t)$ および $\delta_{\text{mes}}(t)$ を知って安定操縦微係数を求めることである。 $y_{\text{mes}}(t)$ は風等の未知入力に対する応答および計測ノイズを含むため、一般には高い同定精度を得ることはむずかしいので、強制振動によって機体の周波数特性を求める。風や計測ノイズは一般にランダムであり、スペクトル密度関数が線スペクトルを含むとは思にくい。したがって、操舵量 $\delta_i(t)$ (添字 $i=e, \text{map}, a, r$) を正弦波状に変動させて (たとえば $\omega_i \text{ rad/s}$) 機体を加振し、調和解析によって応答の基本波成分 ($\omega_i \text{ rad/s}$ 成分) を取り出せば、それらは $\xi(t), \eta_s(t), \eta_s(t)$ と無関係である。その基本波成分における入出力の振

幅比および位相差から、伝達関数 $Y/D_i(s)$ の $s=j\omega_i$ における値を実験的に求めることができる。

$$Y_{\text{mes}}(j\omega_i)/D_{\text{mes}}(j\omega_i) \approx Y/D_i(j\omega_i) \quad (7)$$

$$Y/D_i(s) \triangleq C(sI - A)^{-1}b_i, \quad i=1, 2 \quad (8)$$

ここに、 s はラプラス変換のパラメータ、 $Y(j\omega_i)$ および $D_i(j\omega_i)$ は $y(t)$ および $\delta_i(t)$ のフーリエ変換である。また、 b_i は B の i 列要素である。周波数 ω_i をいろいろに変えて、あるいは、いくつかの周波数を重ねて実験することにより、航空機の各運動モードを十分に励起して、入出力間の周波数特性 (Bode diagram) を比較的精度よく求めることができる。とくに、(7) のように入出力間の振幅比および位相差のみがデータとして意味をもつので、センサーにバイアスがあっても本質的障害にはならない。

2.3 周波数特性による安定操縦微係数の導出 ある入力 $\delta_i(t)$ (たとえば補助翼角 δ_a) に対する各状態量の周波数特性が実験的に得られたとき、それらに見あう s の有理多項式である状態量伝達関数 $X/D_i(s)$ ($v/\delta_a, p/\delta_a, q/\delta_a, r/\delta_a$) を周波数領域で ($X/D_i(j\omega_i)$ と実験データ間で) 最小2乗法あるいは繰返し等によって推定する。このとき、注意すべきことは、①各状態量伝達関数の分母の多項式を共通 (極の位置を共通) にすること、②(2), (3) 式のようなモデルに対応する各伝達関数の分子の次数 (零点の数) を知っておくことである。

次に、安定操縦微係数を求めるために、推定した状態量伝達関数を時間領域で表現する。これは実現問題として知られ、一般には一意ではない。しかしながら、ここでは、安定操縦微係数の物理的意味を失わないように、所望の物理的状態量に関する時間領域表現を求めねばならない。その結果、ここでの系の“実現”は唯一に決まる。今回は、いったん可制御正準形の実現を考え、相似変換によって微係数を求める方法をとった。昇降舵、補助翼および方向舵の加振については、可制御運動方程式は4次であり、すべての状態量を直接計測でき、推定した状態量伝達関数を $\hat{X}/D_i(s) \triangleq \text{col}\{\hat{X}_k/D_i(s)\}$ とすれば ($i=e, a, r$)

$$\frac{\hat{X}_k}{D_i}(s) = \frac{\beta_{k4}(s)s^3 + \beta_{k3}(s)s^2 + \beta_{k2}(s)s + \beta_{k1}(s)}{s^4 + \alpha_4s^3 + \alpha_3s^2 + \alpha_2s + \alpha_1} \quad (9)$$

のごとく表現できる。 δ_i に対するこれらの伝達特性を実現する可制御正準形は次のように書ける。

$$\dot{\hat{x}}(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 \end{bmatrix}}_{\hat{A}_4} \hat{x}(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\hat{b}_4} \delta_i(t) \quad (10. a)$$

$$\hat{x}(t) = \begin{bmatrix} \beta_{11}(t) & \beta_{12}(t) & \beta_{13}(t) & \beta_{14}(t) \\ \beta_{21}(t) & \beta_{22}(t) & \beta_{23}(t) & \beta_{24}(t) \\ \beta_{31}(t) & \beta_{32}(t) & \beta_{33}(t) & \beta_{34}(t) \\ \beta_{41}(t) & \beta_{42}(t) & \beta_{43}(t) & \beta_{44}(t) \end{bmatrix} \hat{x}(t) \equiv T_i \hat{x}(t) \quad (10. b)$$

相似変換 $\hat{x}(t) = T_i \hat{x}(t)$ によって (10. a) を書き直すと

$$\dot{\hat{x}}(t) = \hat{A}_i \hat{x}(t) + \hat{b}_i \delta_i(t), \quad i=e, a, r \quad (11)$$

$$\hat{A}_i = T_i \hat{A}_4 T_i^{-1}, \quad \hat{b}_i = T_i \hat{b}_4 \quad (12)$$

したがって、伝達関数の分子の係数マトリクス T_i で、分母を表わす Companion matrix $\hat{A}_4$ を相似変換することによって δ_i ($i=e, a, r$) 加振に対する安定操縦微係数の推定 $\hat{A}_i$ および $\hat{b}_i$ を求めることができる。

δ_{map} 加振については、6個の状態量のうちしか測れない (推力およびその変化率は測れない) ので上述の方法を直接使うことはできない。直接測れる4個の状態量の推定伝達関数の分子・分母の係数をもとに、6次の可制御正準型を (10) 式同様に書くと

$$\dot{\hat{x}}(t) = \hat{A}_6 \hat{x}(t) + \hat{b}_6 \delta_{\text{map}}(t) \quad (13. a)$$

$$y(t) \equiv \hat{x}_1(t) = T_{m1} \hat{x}(t) \quad (13. b)$$

ここに、 $\hat{A}_6$ は 6×6 の companion, $\hat{b}_6$ は 6×1 のベクトルで $[0, 0, \dots, 0, 1]^T$; $\hat{x}_1(t)$ は測れる状態量 $x_1(t) \triangleq [u, w, q, \theta]^T$ の推定であり、 $x_2(t) \triangleq [\tau, \dot{\tau}]^T$ とすれば $x(t) = [x_1^T(t); x_2^T(t)]^T$ と分割される。 T_{m1} は推定された伝達関数の分子の係数マトリクスで 4×6 であり正則ではないので、(12) のように安定操縦微係数 $\hat{A}_m$ を求めることはできない。しかしながら、 2×6 の適当なマトリクス T_{m2} を補充して $T_m = [T_{m1}^T; T_{m2}^T]^T$ を正則とし、(12) 同様 $\hat{A}_6$ の相似変換を行ったとき、(11) 相当の式が (2) のような型

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{x}}_1(t) \\ \dot{\hat{x}}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{A}_{11} & \hat{A}_{12} \\ \mathbf{0}_{2 \times 4} & \hat{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_1(t) \\ \hat{x}_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{4 \times 1} \\ \hat{H}_{\text{map}} \end{bmatrix} \delta_{\text{map}}(t) \quad (14)$$

にできれば、 $\hat{A}_m$ を求めることができる。(2) から δ_{map} VS. τ の伝達関数は $\tau/D_{\text{map}}(s) = H_{\text{map}}/(s^2 + 2\zeta_r \omega_r s + \omega_r^2) \equiv H_{\text{map}}/\Delta_r(s)$ 。これを、 δ_{map} VS. $x_1(t)$ の伝達関数と同様に6次の共通分母で表わせば、

$$\frac{\tau}{D_{\text{map}}}(s) = \frac{\Delta_r(s) H_{\text{map}}}{\Delta_r(s) \Delta_r(s)} = \frac{\Delta_r(s) H_{\text{map}}}{|s \hat{A}_6 - \hat{A}_6|}$$

ここに、

$$\Delta_r(s) \triangleq (s - \lambda_p)(s - \bar{\lambda}_p)(s - \lambda_{sp})(s - \bar{\lambda}_{sp}) \equiv s^4 + \gamma_4 s^3 + \gamma_3 s^2 + \gamma_2 s + \gamma_1 \quad (15)$$

なる長・短周期モードの特性方程式で $\bar{\lambda}_i$ は λ_i の共役を表わす。 γ_i は ω_r, ζ_r (あるいは $\lambda_r, \bar{\lambda}_r$) とともに $\hat{A}_6$ として既知である。したがって、(10. b) 同様に $\tau/D_{\text{map}}(s)$ および $\dot{\tau}/D_{\text{map}}(s)$ の分子の係数からなる T_{m2} は次のごとくなる。

$$T_{m2} = H_{map} \begin{bmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & \gamma_4 & 1 & 0 \\ 0 & \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & \gamma_4 & 1 \end{bmatrix} \triangleq H_{map} T_{m2}' \quad (16)$$

すなわち、 T_{m2}' が既知で、 H_{map} のみが未知である。 H_{map} がわかれば、この T_{m2} を補充して T_m は正則となり、 $\hat{A}_6$ の相似変換として (14) の型の A の推定 $\hat{A}_m$ が得られる。とくに、 $\hat{A}_m T_m = T_m \hat{A}_6$ の一行ブロックは (14) の分割参照

$$[\hat{A}_{11m} : \hat{A}_{12m}] \begin{bmatrix} I_4 & O_{4 \times 2} \\ O_{2 \times 4} & H_{map} I_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{m1} \\ T_{m2}' \end{bmatrix} = T_{m1} \hat{A}_6 \quad (17. a)$$

$$\therefore [\hat{A}_{11m} : \hat{A}_{12m}] = T_{m1} \hat{A}_6 \begin{bmatrix} T_{m1} \\ T_{m2}' \end{bmatrix}^{-1} \times \begin{bmatrix} I_4 & O_{4 \times 2} \\ O_{2 \times 4} & I_2 / H_{map} \end{bmatrix} \quad (17. b)$$

となり、 $\hat{A}_{11m}$ は H_{map} と独立で一意に決まる。一方、 $\hat{A}_{12m}$ (すなわち、 $X_r, Z_r', M_r'; X_r, Z_r', M_r'$) は H_{map} に逆比例し、 H_{map} が決まらぬ限り $\hat{A}_{12m}$ の絶対値は決まらない。しかしながら、航空機のおよその重量 W は既知であり、推力 1 kg 当たりの加速度 g/W を推定でき、それはまた、定常外力変化 $\sqrt{X_r^2 + (Z_r')^2}$ と表わせる (σ の寄与省略)

$$g/W = \sqrt{X_r^2 + (Z_r')^2} \equiv \sqrt{(\bar{X}_r)^2 + (\bar{Z}_r')^2} / H_{map}$$

ここに、 $\bar{X}_r, \bar{Z}_r'$ は H_{map} を単位 (1 kg/inHg/s^2) としたときの推定値である ((17) 参照)。上式の第 1, 第 3 辺から H_{map} を推定でき、絶対値 X_r, Z_r' を一意に定めることができる。

2.4 冗長データによる同定精度の向上 状態量の周波数応答のほかに、加速度データや高度のような状態量や操舵量の線形結合もまた計測される。(12) のように推定した $\hat{A}_i, \hat{\delta}_i$ を使って対応する加速度等を計算したとき、それらが実験データと矛盾しないように $\hat{A}_i, \hat{\delta}_i$ が決められるべきである。また、(1) 式が異なる舵 δ_i および δ_j (たとえば δ_a, δ_r) から見て、それぞれ可制御なとき、 $\hat{A}_i$ および $\hat{A}_j$ のごとく 2 通りの微係数が推定されるが、この両者は当然一致すべきである* (compatibility)。

このように、互いに異なった側面から同一のものを測定した真の (単なるセンサーやデータの数ではない) 冗長データを考慮して矛盾なく伝達関数を推定すれば、きわめて高い同定精度が得られる。

上述のごとく、異なる操舵入力から得られる安定微係数が compatible ($\hat{A}_i = \hat{A}_j$) なための周波数領域の

* δ_a 加振のときは可制御次数 4 で、 τ および σ は非可制御であるから 4×4 の推定 $\hat{A}_a$ は Map 加振の 6×6 の推定 $\hat{A}_m$ の最初の 4 行 4 列ブロック $\hat{A}_{11m}$ に一致すべきである。

条件を知れば、最小 2 乗法あるいは繰返し演算の付帯条件として利用できる。簡単のため、二つの入力に対する可制御次数が等しく、すべての状態量が測れる横/方向の場合を述べる。補助翼角 δ_a 、方向舵角 δ_r に対する伝達関数の分母は $\hat{A}_i$ を通じて共通に設定されたとすると、(12) から得られる $\hat{A}_a, \hat{A}_r$ を等しいとして

$$\hat{A}_a = T_a \hat{A}_i T_a^{-1} = T_r \hat{A}_i T_r^{-1} \equiv \hat{A}, \quad \therefore S \hat{A}_i = \hat{A}_i S, \quad S \triangleq T_r^{-1} T_a \quad (18)$$

伝達関数の分子の係数行列から作る S は companion $\hat{A}_i$ と可換なことが、 $\hat{A}_a = \hat{A}_r$ なための必要十分条件である。 $\hat{A}_i$ は相異なる固有値をもつ companion であるから、Vandermonde 行列による相似変換で容易に対角化される。

$$P \triangleq \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 & \lambda_4^2 \\ \lambda_1^3 & \lambda_2^3 & \lambda_3^3 & \lambda_4^3 \end{bmatrix} \quad (19)$$

$$\hat{A}_i = P \Lambda_i P^{-1}; \quad \Lambda_i \triangleq \text{diag}\{\lambda_i\}, \quad i=1, 2, 3, 4$$

ここに、 $\lambda_i (i=1, 2, 3, 4)$ は、スパイラル、ロール、ダッチロールの各モードの根 $\lambda_{spi}, \lambda_r, \lambda_d, \lambda_a$ を表わす。したがって、(18) は次のように書ける。

$$\hat{S} \Lambda_i = \Lambda_i \hat{S}; \quad \hat{S} \triangleq P^{-1} S P \quad (20)$$

対角行列と可換な $\hat{S}$ は任意の対角行列であり³⁾、 $\hat{S} \equiv \text{diag}\{k_i\}$ (任意)、結局、(18) および (20) より、

$$T_a P = T_r P K; \quad K = \text{diag}\{k_i\} \text{ (任意)} \quad (21)$$

(9) のような δ_i に対する k 番目の状態量伝達関数の分子の多項式を $n_i^{(k)}(s)$ とし、これを要素とするベクトル $n^{(k)}(s) \triangleq \text{col}\{n_i^{(k)}(s)\}$ を定義すると、 T_i および P の定義から

$$T_i P = [n^{(1)}(\lambda_1) : n^{(1)}(\lambda_2) : \dots : n^{(1)}(\lambda_4)] \triangleq N^{(1)}, \quad i=a, r$$

となり、(21) は伝達関数の分子に関して次のことを示す。

$$n^{(1)}(\lambda_l) = k_l n^{(1)}(\lambda_l), \quad l=1, 2, 3, 4 \quad (22)$$

可制御次数が異なる δ_a, δ_{map} 加振の縦運動においては上の議論をそのまま当てはめることはできないが、伝達関数の 6 個の極 $\lambda_i (i=1, 2, \dots, 6)$ を $\lambda_p, \bar{\lambda}_p, \lambda_{sp}, \bar{\lambda}_{sp}, \lambda_r, \bar{\lambda}_r$ (長・短周期、推力特性根) の順に並べるとにすれば、付録にあるごとく (22) と同様の結論を得る。結局、(22) および (A. 6) より、compatibility requirement は『 δ_a と δ_r あるいは δ_a と δ_{map} に対する状態量伝達関数の分子の $\lambda_i (l=1, 2, 3, 4)$ における値の比は等しい：

$$\frac{n_1^{(1)}(\lambda_l)}{n_1^{(2)}(\lambda_l)} = \frac{n_2^{(1)}(\lambda_l)}{n_2^{(2)}(\lambda_l)} = \dots = \frac{n_4^{(1)}(\lambda_l)}{n_4^{(2)}(\lambda_l)} \equiv k_l, \quad l=1, 2, 3, 4 \quad \text{』}$$

また、 $n^{(1)}(\lambda_i)$ は $\hat{A}_i$ の λ_i に応ずる固有ベクトルであ

第1図 信号流れのブロック図

るから*, compatibility requirement は『異なる舵から見た入出力特性において、各モードの固有ベクトルは互いに平行なこと』と言い換えられる。

3. 飛行試験とデータ解析

試験高度 8,000~9,000 ft, フラップ角 $\delta_f=0^\circ$, 脚上げ, IAS 120 mph で水平トリム後 VSRA システムをエンゲージして, 3 舵およびスロットルを $\omega=0.2\sim 8$ rad/s で各個に加振した。試験中の機体重量は略 3,400 kg 程度である。加振のための信号はモデル追従型 VSRA のモデルとして発振モデルを設定し, 機上計算機で発生させ, サーボ系を介して舵を振動させた。データは VSRA 組込みの信号整合器 (アナログフィルターあるいは A/D-D/A 変換器) を通した後, アナログ信号としてデータレコーダーに記録した。同定のためのおもな計測項目は, 縦: $u, \alpha_{vane}, q, \theta, A_x, A_z, \delta_e, \delta_{map}$; 横/方向: $\beta_{vane}, p, \phi, r, A_v, \delta_a, \delta_r$; そのほか各サーボへのコマンド量 δ_c (サーボ特性を調べるため) 等である。信号の流れの概略を第1図に示す。

3.1 センサー軸 (機体軸) の決定 一般に, 航空機は左右対称に近いので, 機体軸の Y 軸は重心を通り対称面に垂直と考えればよい。しかしながら, X 軸 (あるいは Z 軸) の向きはまったく任意である。計測データの座標変換の容易さから見て, X 方向加速度計, あるいはロールレートジャイロの入力軸と平行に X 軸を選ぶのが妥当と思われる。運動方程式の状態量として p, q, r が直接使われること, VSRA では加速度より角速度のフィードバックを主に考えることなどから, ロールレートジャイロの入力軸方向にセンサ

一系の X 軸を選ぶ。はじめに, このセンサー軸の水平トリム状態における迎角 ($\alpha_0=\theta_0$: $\gamma_0=0$) を決定せねばならない*。ピトー管は迎角に対する感度が鈍く, 迎角計や姿勢ジャイロの基準がセンサー軸に一致するわけでもなく, 縦運動の実験によって対称面内のセンサー軸の向きを決定することはむずかしい。結局, センサー軸に平行な入力軸をもつレートジャイロに定常出力 P, Q, R が得られるような運動を行うのがよい。すなわち, 水平定常旋回 (coordinated turn) によって地球の局所鉛直を向く定常旋回角速度ベクトル Ω を発生させ, その成分として P, Q, R が現われることを利用して旋回中のセンサー軸を決定し, 水平定常飛行中のセンサー軸迎角を推定する方法を採用した。すなわち, 地球の局所水平を基準とする機体軸 (センサー軸) のオイラー角 (Ψ, θ, ϕ) と機体軸角速度ベクトル (P, Q, R) の関係において, 水平定常旋回では $\dot{\phi}=\dot{\theta}=0, \dot{\Psi}=\Omega (=|\Omega| \equiv \sqrt{P^2+Q^2+R^2})$ であるから

$$P = -\Omega \sin \theta \quad (29. a)$$

$$Q = \Omega \cos \theta \sin \phi \quad (29. b)$$

$$R = \Omega \cos \theta \cos \phi \quad (29. c)$$

$\dot{\theta}=0$ あるいは (29. b, c) より $Q/R=\tan \phi$, すなわち, パーチカルジャイロ出力 ϕ_{vg} と Q/R の間に $Q/R=\tan \theta_{vg} + \text{bias}$ なる関係がある。したがって, 速度 $V=120$ mph IAS を保ち, いろいろなバンク角で水平定常旋回を行い, Q/R と $\tan \phi_{vg}$ の関係を調べて $\dot{\theta}=0$ の検定をするとともに, パーチカルジャイロの取り付け角等によるバイアスを校正できる。第2図はその実験結果を示すが計算値ときわめてよい一致を示し, バンクの補正も必要としない。

また, (29. a) から, P と Ω を調べることによって旋回中のピッチ姿勢角 θ を求めることができる。これを第3図に示すが, P vs. Ω はほぼ直線となり, 120

* $H(s)=(sI-A)^{-1}b$ において, A の Modal matrix を $X=\text{row}\{x_i\}$ とすれば, $A=XX^{-1}$ より $H(s)=X(sI-A)^{-1}b, \bar{b} \triangleq \text{col}\{\bar{b}_i\}=X^{-1}b$. $H(s)$ の $s=\lambda_i$ における留数は $\text{Res}\{H(s)\}_{s=\lambda_i}=x_i\bar{b}_i$. $H(s)$ の分子の多項式列ベクトルは $n(\lambda_i)=\text{Res}\{H(s)\}_{s=\lambda_i} \cdot \prod_{i \neq j} (\lambda_i - \lambda_j)$ である。したがって, $n(\lambda_i)$ は固有ベクトル x_i に比例する (平行)。

* 線形システムの可同定性を示せば, $g \cos \theta_0, g \sin \theta_0$ 等のパラメータは理論的には同定されるはずであるが, 実際には g が 9.8 m/s^2 を大きくはずれず結果になる等の不具合が生ずるので, 別途知るのが望ましい。

 第2図 $\dot{\theta}=0$ および $\phi_{V/G}$ の検定

第3図 トリム姿勢角の決定

mph IAS で水平定常飛行中 (トリム中) の姿勢角 θ はバンク角とはほぼ無関係に $\theta=7.4\text{deg}$ となる。理論的にも、同じ速度で旋回する限り、 θ はほとんど変わらないことを示すことができる。したがって、基準水平トリム状態におけるレートジャイロ基準のセンサー軸の迎角は $\alpha_0=\theta_0=7.4\text{deg}$ と決定した*。また、釣合旋回時に adverse yaw を消すため、方向舵を使ったとしても $Y_{\delta r} \delta r \doteq 0$ とみなせるならば (簡単化のために仮定)、旋回中の横すべり角 $\beta_{\phi} \doteq 0$ であり、速度ベクトル V に対するセンサー軸の方位角は $\tan \varphi \doteq \sin \theta \tan \phi$ である。このとき、釣合旋回の条件 ($A_y=0$) より、 $\cos \theta \tan \phi = (V\Omega/g)\sqrt{1 + \sin^2 \theta \tan^2 \phi} \doteq V\Omega/g$ となる。第2, 3図より $\phi = \phi_{V/G}$, $\theta \doteq \theta_0$ として、 $\Omega = (g \cos \theta_0 / V) \tan \phi_{V/G}$ となるので、第4図のごとく Ω vs. $\tan \phi_{V/G}$ を描き、 V (対地真速度) = 58.74 m/s を得た**。このようにして、基準状態である水平トリム中のセンサー軸の迎角 ($\alpha_0=\theta_0$) および対地真速度 V を水平定常旋回データから決定した。

3.2 データの補正 第1図に見られるように、取

* この θ_0 はレートジャイロを基準として得たものであり、姿勢ジャイロの読み $\theta_{V/G}$ は 7.4deg とは異なる。

** トリム速度 120 mph IAS は VSRA 母機の装備計器によるものであり、対地真速度ではない。

第4図 対地トリム速度の決定

第5図 信号整器の周波数特性

得られるデータは、(4), (5)式の y_{mes} や δ_{mes} をさらにフィルターや A/D-D/A 変換器等の信号整合器を通した量である。制御系には一般に何らかの信号整合器を入れるのがふつうであるが、システム同定のためには制御時より高い周波数まで系を励起する。したがって、制御系を介したシステム同定では生データから信号整合器の周波数特性 (とくに位相遅れ) を除かねばならない。VSRA システムの信号整合器の周波数特性の一部を第5図に示す。これらの量は以外に大きく無視できない。同定モデルの次数を拡大することなく、容易にデータを補正できるのは周波数応答法による同定の長所である。

また、迎角や横すべり角は機首のブームに付けた高感度のペーンで測られるので、角速度 q, r を用いて重心における量に換算した。本機の場合、重心からペーンまでの距離を 4.37 m とした。

第1表 センサー軸まわりの安定・操縦微係数

Longitudinal Derivatives				Lateral-Directional Derivatives			
X_u (1/s)	-0.05317	Z_z' (m/s $\cdot$ kg)	0.0000246	Y_o (1/s)	-0.1609	$L_{\alpha''}$ (1/s 2)	6.776
X_w (1/s)	0.1371	$Z_{\dot{u}}'$ (m/s 2)	-15.811	Y_p (m/s)	0.3402	$L_{\dot{\alpha}''}$ (1/s 2)	0.6149
X_q (m/s)	0.2365	M_u' (1/m $\cdot$ s)	0.0084	Y_r (m/s)	1.162	$N_{\dot{\alpha}''}$ (1/m $\cdot$ s)	0.02745
X_r (m/s 2)	0.0	M_w' (1/m $\cdot$ s)	-0.07226	$Y_{\dot{\alpha}}$ (m/s 2)	-0.5012	$N_{\dot{\alpha}''}$ (1/s)	-0.4984
$X_{\dot{z}}$ (m/s 2 ·kg)	0.002875	$M_{\dot{u}}'$ (1/s)	-2.977	$Y_{\dot{\alpha}r}$ (m/s 2)	3.411	$N_{\dot{\alpha}''}$ (1/s 2)	-0.0711
$X_{\dot{z}}$ (m/s 2 ·kg)	0.0002396	$M_{\dot{w}}'$ (1/s 2)	0.04287	$L_{\dot{\alpha}''}$ (1/m $\cdot$ s)	-0.07477	$N_{\dot{\alpha}''}$ (1/s)	-0.1801
$X_{\dot{\alpha}}$ (m/s 2)	0.3081	$M_{\dot{r}}'$ (1/s 2 ·kg)	0.0008191	$L_{\dot{\alpha}''}$ (1/s)	-2.709	$N_{\dot{\alpha}''}$ (1/s 2)	0.6086
Z_u' (1/s)	-0.1921	$M_{\dot{z}}'$ (1/s 2 ·kg)	-0.0001024	$L_{\dot{\alpha}''}$ (1/s 2)	0.04412	$N_{\dot{\alpha}''}$ (1/s 2)	-1.967
Z_w' (1/s)	-1.0104	$M_{\dot{\alpha}}'$ (1/s 2)	-11.704	$L_{\dot{\alpha}''}$ (1/s)	1.187		
Z_q' (m/s)	-2.740	ω_r (1/s)	3.7				
Z_r' (m/s 2)	-0.1948	ζ_r (-)	0.37	$H=8,000\sim9,000$ (ft)		$V_o=58.74$ (m/s)	
$Z_{\dot{r}}'$ (m/s 2 ·kg)	-0.0001965	H_{map} (kg/s 2 ·inHg)	317.12	$\delta_f=0$ (deg)		$\theta_o=7.4$ (deg)	
				$W=3,400$ (kg)		$\tau_o=0$ (deg)	

3.3 周波数応答データによる同定結果 各周波数で、生データに前節の補正を施した後、(7)式のごとく入出力間の振幅比・位相差から周波数特性データを求め、それを第6～23図に記号で示した。加速度データはきわめてノイズに汚されているので、再生時にカットオフ 5Hz の low pass フィルターを通して処理し、後にゲイン・位相の補正を加えた。この加速度データをもとに、次の関係

$$j\omega u = A_z - W_o q - (g \cos \theta_o) \theta$$

$$j\omega w = A_z + U_o q - (g \sin \theta_o) \theta$$

$$j\omega v = A_y + W_o p + (g \cos \theta_o) \phi - U_o r$$

を利用して、 ω rad/s で加振したときの A_z , A_y , q , θ および A_v , p , ϕ , r から u , α および β 特性に関する慣性データ (Inertial data) を求め、対気データ (Air data) に補充した。このように、加速度を積分することなく速度特性 (u , v , w 特性) が得られるのは周波数応答法のよい点である。とくに、縦の速度特性 (u) に関する第6, 11図のごとく、低い周波数ではピトー管による対気データと慣性データがきわめてよい一致を示すが、1 rad/s 以上の周波数では両者の整合が悪く、ピトー管の動特性がきわめて悪化するものと思われる。

比較的低い周波数でかつ減衰の悪いフゴイドモードに近い周波数で加振すると、強制振動法の欠点であるビート現象が起こる上、周期にくらべてデータ長が短く、読み取り精度が悪いので*、自由振動によるフゴイド周期、減衰比およびモード形 (shape) を利用した。またダッチロールモードについても自由振動の結果を参考に同定を進めた。

実験データをもとに、1入力に対する各状態量伝達関数の極と零点の位置および定常ゲインあるいは高周

波におけるゲインを curve-fit によって推定する。推定した伝達関数を2.3節の方法で時間領域に変換し、安定操縦微係数を求める。その結果、トリム速度、重力加速度あるいはトリム姿勢角が所定の値になるように、また、得られた時間領域表現から計算される加速度の周波数特性が実験データとよく合うように、元の状態量伝達関数のゲインや零点を(必要な場合は極も)改訂し、これをマイクロコンピュータ (YHP-9835 A) によって繰り返した。操縦微係数は高周波のゲインで決まるので、加速度計等で高周波の特性がよくわかるものについては、比較的容易に得られた。さらに、別の入力に対しても2.4節の compatibility を考慮しながら同様のことを繰り返し、双方の入力に対して得られた安定微係数が矛盾のないように同定を行った。

このようにして同定されたセンサー軸に関する安定操縦微係数を第1表に示す。また、これを使った周波数応答およびその漸近線を第6～23図に実線で示し、実験データとの一致具合を示した。各図には、対応する伝達関数の型、定常ゲインおよび零点が記入されている。分母の極は第7, 12図および第16図に併記されている。

縦運動のトリムの実験は外乱によってフゴイドが励起されるため、きわめてむずかしく、低周波におけるデータの信頼性を欠いた。そのため、低周波の運動を支配する X_u , X_w , Z_u' , Z_w' 等の安定微係数の同定は困難であった。また、Map 加振では、推力を測ることはできないが、第11～15図から τ/δ_{map} は2章で仮定したとおり2次遅れとみなすことができ、その周波数は短周期 ($\omega_{sp}=2.66$ rad/s) より少し上の $\omega_r=3.7$ rad/s 程度であることが容易にわかる。しかしながら、いわゆるパワー効果の推定はむずかしかった。結局、推力の変化率の影響を含める必要があり、しかも、X軸およびZ軸方向でパワー効果の動特性が異なるも

* 現在は、FFT 調和解析で、計算機による自動読み取りとなり、短いデータ (1.5周期程度) で、かなりのビートがあっても比較的精度よく読みとれる。

第6図 u/δ_e の周波数特性 第7図 α/δ_e の周波数特性 第8図 $(q, \theta)/\delta_e$ の周波数特性 第9図 A_x/δ_e の周波数特性 第10図 A_z/δ_e の周波数特性 第11図 u/δ_{map} の周波数特性 第12図 α/δ_{map} の周波数特性 第13図 $(q, \theta)/\delta_{map}$ の周波数特性 第14図 A_x/δ_{map} の周波数特性

第15図 A_z/δ_{map} の周波数特性 第16図 β/δ_a の周波数特性 第17図 $(p, \phi)/\delta_a$ の周波数特性 第18図 r/δ_a の周波数特性 第19図 A_y/δ_a の周波数特性 第20図 β/δ_r の周波数特性 第21図 $(p, \phi)/\delta_r$ の周波数特性 第22図 r/δ_r の周波数特性 第23図 A_y/δ_r の周波数特性

のと思われた。すなわち、 δ_{map} による Z 方向の正味の力の変化を $(\Delta Z)_\tau$ として、

$$\frac{(\Delta Z)_\tau}{D_{map}}(s) = (Z_t s + Z_\tau) \left[\frac{\tau}{D_{map}}(s) \right]$$

において、 $Z_\tau/Z_t < 0$ で、 Z 軸に関するパワー効果は非最小位相推移系のように思われた (X 軸方向では $X_\tau/X_t > 0$)。さもなくば、第 14, 15 図の加速度データと計算される加速度の位相特性との整合が得られなかった。ひいては、 u/δ_{map} の高周波特性も合わなかった (もちろん、対気データとも合わない (第 11 図))。この理由は、プロペラによる直接推力にくらべ、ナセルや主翼の流れ場が変化して発生する空気が遅れて応答するためかと思われるが、レートジャイロ基準のセンサー軸に対する加速度計の取付角に推定誤差があることも考慮せねばならない。

横/方向の運動についても、低周波加振のデータ精度は悪かった。とくに、スパイラルモードは緩かな発散傾向にあり、右回頭では強く、左回頭では弱く非対称であったが、他に支障がない程度の中間的値で代表することにした。また、前述のごとく得られた安定操縦微係数から横加速度特性を計算し、実験データと比較したが、第 19 図のように高周波の位相特性を合わせるためには $Y_{\delta_a} \neq 0$ とする必要があった。この原因は明らかではないが、操舵応答を調べるうえで $Y_{\delta_a} = 0$ としても大した影響はないと思われる。補助翼入力に対するすべての Bode 線図は $Y_{\delta_a} \neq 0$ とした計算値が描かれている。

4. 一般入力の応答実験と計算の比較

一般に時間領域での同定を取り扱ったほとんどの文献では、同定に使用した状態量の時間歴 (インパルス応答等) と、それをもとに同定した結果の時間歴を比較して同定精度を論ずることが多い。これは、その特定入力に対する解の収束程度を表わすものであり、できれば、得られた同定結果がまったく別の一般の操舵に対しても実際の応答をよく記述しうることを示すのが望ましい。第 24, 25 図は、縦および横/方向の飛行試験結果 (実線) と、同定した安定操縦微係数 (第 1 表) をもつモデルの同一入力に対するシミュレーション結果 (点線) の比較である。実験データは VSRA の PCM 出力¹⁾であり、 $\dot{\theta} = q$, $\dot{\psi} = r/\cos \theta_0$, $\phi = p + r \tan \theta_0$ より最小 2 乗法によりレートジャイロのバイアスを除去した。計算値については、実際のトリム状態が不正確なので文献 1) の (57) 式のごとく考え (ただし、 $K_s = 0$)、風の影響を無視して計算し ($\dot{\xi} = 0$)、さらに前述のような信号整合器による補正を行ったうえで、トリム未知量に関する最小 2 乗法によって実験

第 24 図 縦応答の計算値と計測値の比較

第 25 図 横/方向応答の計算値と計測値の比較

値と合わせた。強制振動による周波数応答法から得た VSRA 母機の線形モデルが、同定のための入力と無関係な一般入力に対して、実機の時間応答とかなりよ

く一致することがわかる。

5. あ と が き

3 舵およびスロットルによる VSRA 母機 (ビーチクラフト B・65) の強制振動から状態量および加速度の周波数応答を求め、安定操縦微係数を比較的精度よく同定した。機体軸の決定に当たっては水平定常旋回のデータをもとにすること、加振データは信号整合器の特性を考慮して処理すべきこと、同定精度の向上に当たっては冗長計測によりデータを多方面から照合して整合性を調べること等、留意すべき点は多かった。しかしながら、周波数応答法であるがゆえに、これらの処理は比較的容易であった。

最後に、同定結果と風洞試験結果⁴⁾との対応は Z_w' 以外はきわめて悪く、風洞試験結果から実機の安定操縦微係数を推定する方法の研究が望まれる。

参 考 文 献

- 1) 古茂田真幸, 川幡長勝, 塚野雄吉, 小野孝次: 可変安定応答実験機 (VSRA) について (I)—VSRA の構成と飛行実験—, 日本航空宇宙学会誌, 第31巻, 第349号 (1983), pp. 75-91.
- 2) McRUER, D. ASHKENAS, I. and GRAHAM, D.: Aircraft Dynamics and Automatic Control, Princeton University Press, New Jersey (1973), pp. 255-262.
- 3) GANTMACHER, F. R.: The Theory of Matrices, Vol. I, Chelsea Publishing Co., New York (1960), pp. 220-224.
- 4) 広末健一, 矢沢健司, 塚野雄吉, 田村征一, 佐野四郎, 能村 実, 別府信宏: クイーンエア機の風洞試験, 航空宇宙技術研究所報告, TM-61 (1965).

付録 可制御次数の異なる2入力に対する微係数の compatibility

δ_e , δ_{map} 加振の縦運動では互いに可制御次数が異なる (前者は4次, 後者は6次). 6個の極 λ_i を λ_p , $\bar{\lambda}_p$, λ_{sp} , $\bar{\lambda}_{sp}$, λ_r , $\bar{\lambda}_r$ の順に並べる. δ_e 加振による安定微係数の推定 $\hat{A}_{11e}$ は(12)式のごとく

$$\hat{A}_{11e} = T_e \hat{A}_1 T_e^{-1} = T_e P A_1 (T_e P)^{-1} \quad (A.1)$$

ここに, $A_1 \triangleq \text{diag} \{ \lambda_p, \bar{\lambda}_p, \lambda_{sp}, \bar{\lambda}_{sp} \}$, P は対応する 4×4 の Vandermonde 行列. δ_{map} 加振では, (17. a) か

ら,

$$\hat{A}_{11m} T_{m1} + \hat{A}_{12m} T_{m2} = T_{m1} \hat{A}_6 \quad (A.2)$$

λ_r , $\bar{\lambda}_r$ も含めた6個の λ_i からなる Vandermonde 行列を V とすれば, (15)および(16)から,

$$T_{m2} V = H_{map} [O_{2 \times 4} : UZ] \quad (A.3)$$

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_5 & \lambda_6 \end{bmatrix}; \quad Z = \begin{bmatrix} \Delta_e(\lambda_5) & 1 \\ 1 & \Delta_e(\lambda_6) \end{bmatrix}$$

$\Delta_e(s)$ は(15)のように長・短周期特性根を決める特性多項式であり, δ_{map} 加振でも $\lambda_i (i=1, 2, 3, 4)$ は δ_e 加振と共通に選ぶから (伝達関数の分母), $\Delta_e(\lambda_i) = 0 (i=1, 2, 3, 4)$. (A.2)の右から V を掛けて

$$\hat{A}_{11m} T_{m1} V + \hat{A}_{12m} [O_{2 \times 4} : UZ] = T_{m1} \hat{A}_6 V \quad (A.4)$$

compatibility は A_{11} に関するものであるから, 上式の初めの4列を調べればよい. $n_1^{(m)}(s)$ を δ_{map} VSRA の伝達関数 $X_1/D_{map}(s)$ の分子を表わす多項式列ベクトルとすれば, 定義から,

$$T_{m1} V = [n_1^{(m)}(\lambda_1), n_1^{(m)}(\lambda_2), \dots, n_1^{(m)}(\lambda_6)] \quad (A.5)$$

また, $\lambda_i (i=1, 2, \dots, 6)$ は $\hat{A}_6$ の特性根であるから

$$\hat{A}_6 V = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4 & \lambda_5 & \lambda_6 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda_1^4 & \lambda_2^4 & \lambda_3^4 & \lambda_4^4 & \lambda_5^4 & \lambda_6^4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 : O_{4 \times 2} \\ \vdots \\ O_{2 \times 4} : A_2 \end{bmatrix}$$

ここに, $A_1 \triangleq \text{diag} \{ \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \}$; $A_2 \triangleq \text{diag} \{ \lambda_5, \lambda_6 \}$. さらに, (13) から (14) へ変換するに当たって ((12) 参照), $T_m \delta_e = [O_{1 \times 4} : 0, H_{map}]^T$ より, T_{m1} の最後の列は零である. これを利用すれば, 上式によって, (A.4) の右辺は

$$T_{m1} \hat{A}_6 V \equiv T_{m1} V \begin{bmatrix} A_1 : O_{4 \times 2} \\ \vdots \\ O_{2 \times 4} : A_2 \end{bmatrix}$$

(A.5) および上の関係から (A.4) の初めの4列は, $N_1^{(m)} \triangleq [n_1^{(m)}(\lambda_1), n_1^{(m)}(\lambda_2), \dots, n_1^{(m)}(\lambda_4)]$ を使って, $\hat{A}_{11m} = N_1^{(m)} A_1 [N_1^{(m)}]^{-1}$. (A.1) の $\hat{A}_{11e}$ と等値することによって, (22)と同様に

$$n_1^{(m)}(\lambda_l) = k_l n_1^{(e)}(\lambda_l), \quad l=1, 2, 3, 4 \quad (A.6)$$

なる関係を得る. ここに, $n_1^{(e)}(s)$ は $X_1/D_e(s)$ の分子の多項式列ベクトルである.