浅い球形殻のランダム加振に対する非線形応答の解析*

An Analytical Study of Nonlinear Response of Shallow Spherical Shells to Random Excitation

小林 繁 夫**・甲 斐 高 志***

Shigeo KOBAYASHI, Takashi KAI

末 益 博 志****

and Hiroshi SUEMASU

Abstract

Probabilistic properties of nonlinear response of shallow spherical shells with clamped edges to random excitation are analytically investigated with the aid of simulation method in order to disclose the effects of the curvature on the acoustic fatigue lives. The deflection is expressed as a series expansion of the axisymmetric normal modes of vibration, and the nonlinear equations of vibration for the generalized coordinates are derived. The equations in the three modes approximation are numerically solved by NEW-MARK's β method for random excitation forces. The probabilistic quantities of the response are calculated for various combinations of the pressure level and the curvature. The results have revealed the following properties. At high pressure levels the large amplitude vibration includes the snap-through buckling. The change of vibrational mode occurs during the snap-through. At very high pressure levels the probabilistic properties of the center deflection approach those of the flat panel. The fatigue lives of the shells can be shorter than those of the flat plate when the vibration includes the snap-through. The fatigue properties cannot be explained by the mean value and the standard deviation of the stress but explained by its probability density function (PDF), because the PDF is quite different from the Gaussian distribution. Then the static equilibrium load-deflection curves are calculated from the same discretized nonlinear equations and show good agreement with the previous results.

1. 緒 言

著者らは、航空機外板パネルの音響疲労問題解明を目的として、ランダム加振に対するパネルの非線形振動応答ならびに疲労寿命についてシミュレーション法

による解析研究を行ってきたが、その一環として浅い球形殻について研究を行ったものである。この問題に関しては、これまで著者の一人が1自由度近似を用いて Fokker PLANCK の方程式の解を求める方法によりその特性について議論した¹⁾ 以外には、研究論文は見られない。1自由度近似では不十分であるので、多自由度近似し、その解をシミュレーション法により求め、非線形振動応答特性および疲労寿命に対する殻の深さと音圧の大きさの関連した影響を明らかにしようとしたものである。なおこの問題は、殻構造力学で注目されている問題である“一様外圧による浅い球殻の座屈”と関連した問題であり、座屈域も含む振動なので、振動特性の理解を助けるため、飛移り座屈域を含む静的平衡曲線を計算し、あわせて計算精度の目安とした。

2. 非線形振動方程式

第1図のような浅い球形殻の形状を近似的に

$$Z(r) = (a^2 - r^2)/(2R) \quad (1)$$

で表し、浅い殻の理論を用いて解析する。殻の深さを表すのに板厚 h で割った無次元形状パラメータ

$$H = Z(0)/h = a^2/(2Rh) \quad (2)$$

を用いる。外力は一様分布圧力とし、変形は軸対称変形のみを考える。境界条件は $r=a$ で周辺固定、すなわち

$$w = \frac{\partial w}{\partial r} = 0 \quad (3)$$

$$u = 0 \quad (4)$$

とする。変位 u , w の方向を第1図に示した。

応力 $\{\sigma\}^T = [\sigma_r, \sigma_\theta]$ と歪 $\{\epsilon\}^T = [\epsilon_r, \epsilon_\theta]$ との間に

$$\{\sigma\} = \{\sigma^e\} + \{\sigma^v\} \quad (5)$$

$$\{\sigma^e\} = [B]\{\epsilon\} \quad (6)$$

$$\{\sigma^v\} = \frac{\eta}{\omega_R} [B] \frac{\partial}{\partial t} \{\epsilon\} \quad (7)$$

$$[B] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu \\ \nu & 1 \end{bmatrix} \quad (8)$$

なる線形粘弾性の関係が成り立つと考える。ここで、

* 昭和55年7月18日、第22回構造強度に関する講演会で発表。昭和57年3月26日原稿受理

** 東京大学工学部航空学科

*** 航空宇宙技術研究所機体二部

**** 東京大学工学部境界領域研究施設

添字 ρ , θ はそれぞれ ρ 方向, 円周方向を表し, E はヤング率, ν はポアソン比, η は減衰係数, ω_R はある基準振動数 (後述) である。

軸対称な有限変形の場合, 歪と変位の関係は

$$\varepsilon_\rho = \varepsilon_{\rho 0} - \zeta \frac{\partial^2 w}{\partial r^2}, \quad \varepsilon_\theta = \varepsilon_{\theta 0} - \zeta \frac{r}{R} \frac{\partial w}{\partial r} \quad (9)$$

$$\varepsilon_{\rho 0} = \frac{\partial u_0}{\partial r} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 - \frac{r}{R} \frac{\partial w}{\partial r}, \quad \varepsilon_{\theta 0} = \frac{u_0}{r} \quad (10)$$

与えられる。ここで ζ は中央面の法線方向にとった座標, 添字 0 は中央面の値を表す。

r 方向の力の平衡方程式は, r 方向の慣性力を省略すると,

$$\frac{\partial \sigma_{\rho 0}}{\partial r} + \frac{\sigma_{\rho 0} - \sigma_{\theta 0}}{r} = 0 \quad (11)$$

その弾性成分 $\sigma_{\rho 0}$, $\sigma_{\theta 0}$ について

$$\sigma_{\rho 0} = \frac{\chi}{r}, \quad \sigma_{\theta 0} = \frac{\partial \chi}{\partial r} \quad (12)$$

なる応力関数 χ を導くと, (7) と (6) の関係から, (11) 式をみたすことがわかる。 z 方向の力の平衡方程式は $\sigma_{\rho 0}$ を χ を用いて表し

$$D \Delta \Delta \left(w + \frac{\eta}{\omega_R} \frac{\partial w}{\partial t} \right) - \frac{h}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \left(\chi + \frac{\eta}{\omega_R} \frac{\partial \chi}{\partial t} \right) \times \left(\frac{\partial w}{\partial r} - \frac{r}{R} \right) \right\} + \rho_m h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = p(t) \quad (13)$$

となる。ここで

$$D = \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)}, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}$$

ρ_m は材料密度, $p(t)$ は一様圧力 (z 方向正) である。一方 (10) 式から u_0 を消去して, (6) と (12) を用い, 適合条件式

$$r \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \chi) \right\} + E \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 - \frac{r}{R} \frac{\partial w}{\partial r} \right\} = 0 \quad (14)$$

が導かれる。(13), (14) 式が粘弾性効果を考慮して w と χ で表した浅い球形殻の非線形振動方程式である。

(14) 式の χ は, 2 回積分により導かれる特解に, 齊次解 $C_0 r$ を付け加え, (4) 式の境界条件 $u_0 = 0$ から導かれる $(\partial \chi / \partial r - \nu \chi / r)_{r=a} = 0$ に代入して C_0 の値を

決めると

$$\begin{aligned} \chi(r) = & \frac{E r}{4} \int_a^r \frac{1}{r_1} \left(\frac{\partial w}{\partial r_1} \right)^2 dr_1 + \frac{E}{r} \left[\frac{1}{R} \int_0^r r_1 w dr_1 \right. \\ & + \frac{1}{4} \int_0^r r_1 \left(\frac{\partial w}{\partial r_1} \right)^2 dr_1 \left. \right] \\ & + \frac{(1+\nu) E r}{(1-\nu) a^2} \left[\frac{1}{R} \int_0^a r_1 w dr_1 \right. \\ & + \left. \frac{1}{4} \int_0^a r_1 \left(\frac{\partial w}{\partial r_1} \right)^2 dr_1 \right] \end{aligned} \quad (15)$$

となることが導かれる。この計算には (3) 式の条件を用いている。

(15) 式を (13) 式に代入すると w のみで書き表された非線形振動方程式が得られる。その方程式で $\eta = p(t) = 0$ とし, w の 2 次以上の項を省略して導かれる非減衰の線形振動方程式に

$$w(r, t) = \phi(r) \sin \omega t \quad (16)$$

を代入すると, ϕ が満たすべき方程式

$$\Delta \Delta \phi - \alpha^4 \phi + K \int_0^a r \phi dr = 0 \quad (17)$$

$$\alpha^4 = h(\omega^2 \rho_m - E/R^2)/D \quad (18)$$

$$K = 24[(1+\nu)/(Rha)]^2 \quad (19)$$

が導かれる。(17) 式の齊次方程式の四つの基本解のうち $Y_0(\alpha r)$, $K_0(\alpha r)$ は $r=0$ で特異性をもつので捨て, 特解は定数となるゆえ, これを C_0 と記すと, (17) 式の一般解は

$$\phi = C_1 J_0(\alpha r) + C_2 I_0(\alpha r) + C_0 \quad (20)$$

と表される。これを (17) 式に代入して定数 C_0 を C_1 と C_2 で表す関係式が導かれる。そこで $r=a$ で $\phi = d\phi/dr = 0$ なる境界条件 (3) に代入して得られる C_1 と C_2 の齊次連立方程式の C_1 , C_2 の係数の行列式を零とおいて固有振動数方程式

$$\frac{J_0(\alpha a)}{J_1(\alpha a)} + \frac{I_0(\alpha a)}{I_1(\alpha a)} + \frac{2aK}{\alpha(\alpha^4 - Ka^2/2)} = 0 \quad (21)$$

が導かれる。これから固有振動数 ω_i を求め, 対応する固有振動モード

$$\phi_i = A_i \left[\frac{J_0(\alpha_i r)}{J_1(\alpha_i a)} + \frac{I_0(\alpha_i r)}{I_1(\alpha_i a)} + \frac{2aK}{\alpha_i(\alpha_i^4 - Ka^2/2)} \right] \quad (22)$$

が求められる。本論文では A_i は正規化条件

$$2\pi \int_0^a r \phi_i^2 dr = \pi a^2$$

から決まる定数である。 $H=0, 2.5, 5, 10$ の 4 通りの殻の 3 次までの固有振動数, 固有振動モードを第 2 図に示した。ここで

$$\omega_R = \frac{h}{a^2} \sqrt{\frac{E}{\rho_m}} \quad (23)$$

この固有振動モード $\phi_i(r)$ を用いて

$$w(r, t) = h \sum_{i=1}^N W_i(t) \phi_i(r) \quad (24)$$

第1図 浅い球形殻と座標

第2図 固有振動数と固有振動モード

と表す。(13)式の χ に(15)式を代入して導かれた $w(r, t)$ のみの非線形振動方程式に(24)式を代入して GALERKIN 法を適用すると非線形連立微分方程式

$$\begin{aligned} \dot{W}_l + B_l(W_l + \eta \dot{W}_l) + \sum_i \sum_j C_{lij} W_i W_j \\ + \eta \sum_i \sum_j D_{lij} \dot{W}_i W_j + \sum_i \sum_j \sum_k E_{lijk} (W_i W_j W_k \\ + 2\eta \dot{W}_i W_j W_k) = 2f\phi_i(1) \quad (l=1, 2, \dots) \end{aligned} \quad (25)$$

が得られる。ただし

$$f = (p(\tau)/E)(h/a)^4 \quad (26)$$

$$\tau = \omega_R t, \quad \xi = r/a \quad (27)$$

$$\begin{aligned} B_{li} = \frac{1}{6(1-\nu^2)} \int_0^1 \left(\frac{1}{\xi} \phi_i' \phi_j' + \xi \phi_i'' \phi_j'' \right) d\xi \\ + 8H^2 \left\{ \int_0^1 \xi \phi_i \phi_j d\xi + 2 \frac{1+\nu}{1-\nu} \phi_i(1) \phi_j(1) \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_{lij} = 2H \left[\frac{1+\nu}{1-\nu} T_{ij}(1) \phi_i(1) + G_{ijl} \right. \\ \left. + 2 \left[\frac{1+\nu}{1-\nu} T_{ji}(1) \phi_j(1) + G_{jil} \right] \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_{lij} = 4H \left[\frac{1+\nu}{1-\nu} T_{ij}(1) \phi_i(1) + G_{ijl} \right. \\ \left. + \frac{1+\nu}{1-\nu} T_{ji}(1) \phi_j(1) + G_{jil} \right] \end{aligned}$$

$$E_{lijk} = \frac{1}{2} \left[\frac{1+\nu}{1-\nu} T_{ij}(1) T_{kl}(1) + H_{ijkl} \right]$$

$$\phi_i(x) = \int_0^x \xi \phi_i d\xi$$

$$T_{ij}(x) = \int_0^x \xi \phi_i' \phi_j' d\xi \quad (28)$$

$$G_{ijl} = \int_0^1 \frac{1}{\xi} \phi_i' \phi_j' \phi_l d\xi$$

$$H_{ijkl} = \int_0^1 \left(\frac{1}{\xi} \phi_i' \phi_j' T_{kl} + \frac{1}{\xi} \phi_k' \phi_l' T_{ij} \right) d\xi$$

とおいたもので、 $(\cdot)$ は τ による微分、 $(\cdot')$ は ξ による微分を表す。(28)式中の ϕ は(22)式の r に $a\xi$ を代入したものである。

注目する応力値として $r=r$ の点における上下両表面の ρ 方向応力の弾性成分を求めておく。一般に (r, ζ) の点における ρ 方向応力の弾性成分 σ_{ρ}^e は(6), (9), (12)式を用いて

$$\sigma_{\rho}^e = \frac{\chi}{r} - \frac{E}{1-\nu^2} \zeta \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{\nu}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \right) \quad (29)$$

と表される。 χ に(15)式を、 w に(24)式を代入し、 $\zeta = \pm h/2$ なる上下両表面での応力を $E(h/a)^2$ で割り無次元化して表すと

$$\begin{aligned} \frac{(\sigma_{\rho}^e)_{\zeta=\pm h/2}}{E(h/a)^2} = \left\{ \begin{array}{l} S_U \\ S_L \end{array} \right\} = \sum_i \left[2H \left\{ \frac{1+\nu}{1-\nu} \phi_i(1) + \frac{1}{\xi^2} \phi_i(\xi) \right\} \right. \\ \left. \mp \frac{1}{2(1-\nu^2)} \left\{ \phi_i''(\xi) + \frac{\nu}{\xi} \phi_i'(\xi) \right\} \right] W_i \\ + \frac{1}{4} \sum_i \sum_j \left[\int_0^1 \frac{1}{\xi} \phi_i' \phi_j' d\xi \right. \\ \left. + \frac{1+\nu}{1-\nu} T_{ij}(1) + \frac{1}{\xi^2} T_{ij}(\xi) \right] W_i W_j \end{aligned} \quad (30)$$

3. 静的平衡曲線

前節で得られた振動方程式(25)式において、慣性項と粘性項とを省略すれば、静的な場合の平衡方程式

$$\begin{aligned} B_l W_l + \sum_i \sum_j C_{lij} W_i W_j + \sum_i \sum_j \sum_k E_{lijk} W_i W_j W_k \\ = 2f\phi_i(1) \quad (l=1, 2, \dots) \end{aligned} \quad (31)$$

が得られる。この方程式を、荷重増分法と変位増分法

とを組み合わせで解き²⁾, 静的平衡曲線 (第3図) を得た。横軸 W は中央点の変位を板厚で割って無次元化したものである。図中 dof は自由度 (degree of freedom) を表す。

$H=0, 2.5, 5$ の3個の殻において, 1次から5次までの固有振動モードを用いた5自由度による計算結果は文献³⁾ に示されている結果とよく一致している。 $H=10$ の場合, 図示は省略したが, 3自由度による計算結果は5自由度によるそれと若干異なっている。 $H=10$ の殻は文献の中に形状パラメータが一致する殻がないが, それに近いもの³⁾ と5自由度による計算結果は似た傾向を示しており, W については5自由度では収束していると考えられる。

次に, 座屈荷重と形状パラメータ λ との関係を第4図に示した。なお, λ と H の関係は

$$\lambda = 2[3(1-\nu^2)]^{1/4} \sqrt{H} \quad (32)$$

で与えられる。図中の実線は, BUDIANSKY⁴⁾, WEINITSCHKE⁵⁾, THURSTON⁶⁾ らによって求められた対称変形する浅い球形殻の座屈荷重 f_{cr} の曲線であるが, 本解析法による5自由度の計算結果はよく一致している。 f_{cl} は古典理論値である。

第3, 4図から, 変形を殻の線形振動モードで展開することの保証が得られたものと考えられる。第3図から, $H=5$ までは3自由度近似でほぼ収束していると考えられるので, 次節以降の振動応答のシミュレーション計算は3自由度で行った。

平衡状態にあるときの圧力と固定辺上下両面の ρ 方向応力との関係を第5図に示す。ただし計算は3自由度で行ったものである。 $H=5$ の殻では飛び移りに伴って曲線がループを描く。

4. シミュレーション法によるランダム振動応答の計算

ランダムな外力 $f(t)$ が, 平均 $E[f(t)] = 0$ で $\Phi_{ff}(\omega)$ なるパワースペクトル密度 (PSD) をもつガウスランダム過程の場合を取り扱う。本論文では第6図に示すような有限帯域幅のホワイトノイズを扱うので, この外力の大きさを表す無次元パラメータとして, その一定部分の Φ_{ff} の値から導かれる

$$Q = \sqrt{\Phi_{ff}/\eta} \quad (33)$$

を用いることにし, $Q=25, 50, 100, 200, 400$ の5通りの場合について計算した。

ランダムな外力の作り方は文献⁷⁾ と同じである。この外力 $f(t)$ に対する応答は NEWMARK の β 法 ($\beta=1/6$) を用いて3次の固有振動モードまでを用いた3自由度近似の連立非線形振動方程式 (25) 式を解いて求めた。それらの結果から中央点変位 $W=w(0, t)/h$,

第3図 静的平衡曲線

第4図 座屈荷重と形状パラメータ λ との関係

第5図 固定辺上面応力 S_U および下面応力 S_L と圧力 f との関係 (3自由度)

第1表 系の数値モデル

h	0.5mm
a	100mm
E	7,000 kg/mm ²
ρ_m	2.8×10^{-10} kg·sec ² /mm ⁴
η	8.088×10^{-4}

第2表 Q と1HzあたりのSPLとの関係

Q	25	50	100	200	400
SPL(dB)	134.7	140.7	146.7	152.7	158.7

第6図 外力 $f(t)$ のパワースペクトル密度 (PSD)

固定辺上下両面の ρ 方向応力 S_U , S_L を計算し, 種々の統計量を文献7) の方式に従って求めた. ちなみに, シミュレーションは $\Delta t = 0.01$ で行い, 1 サンプルは 1,024 個の時刻点からなり, 64 サンプルのデータから統計量を計算した. この統計量をもってこの系の確率

量とした.

後で疲労寿命計算の際に必要な系の数値モデルを第1表に示す. 減衰係数 η は, 円板 ($H=0$) の1次固有振動数 $\omega_1 = 3.091 \omega_R$ に対して, $(\omega_1/\omega_R)\eta$ がジュラルミン板等の構造減衰係数 0.0025 と等しくなるように定めた値である. この場合の Q と 1 Hz あたりの音圧レベル (SPL: Sound Pressure Level) との関係を示す.

外力 $f(t)$ の PSD を第6図に示す. 一点鎖線で示す target の有限帯域幅ホワイトノイズをよく近似していると考えられる.

W , S_U , S_L の平均 (mean) および標準偏差 (SD: standard deviation) を第3表に示す. W の SD に注目すると, $Q=25$ では H が大きくなるにつれて小さくなるが, $Q=50$ では $H=2.5$ の SD は $H=0$ のそれとかなり近づいており, $Q=100$ では $H=2.5$ が最も大きくなる. さらに $Q=200$ では $H=5$ が最大となり, $Q=400$ では $H=10$ の SD も他と同じオーダーになっている. このことから, $Q=25$ では曲率をつけたことによって剛性が高まるが, Q が 50 を越える場合は曲率をつけたために代えて大振幅で振動することがあるということがわかる.

以下, W , S_U , S_L のピークの確率密度関数 (PDF: probability density function) の Q に対する変化について述べる. 紙面の都合上, Q は 25, 100, 400 の3

第3表 W , S_U , S_L の平均と標準偏差

Q	H	W		S_U		S_L	
		Mean	SD	Mean	SD	Mean	SD
25	0	-6.52 ₋₁ *	1.20	8.29 ₋₁	7.06	7.79 ₋₁	7.06
	2.5	-3.42 ₋₁	7.72 ₋₁	-1.60 ₋₁	2.94	-3.37 ₋₁	3.87
	5	-4.18 ₋₁	2.48 ₋₁	-4.76 ₋₁	1.77	-2.28 ₋₁	2.24
	10	-3.53 ₋₁	7.11 ₋₁	-6.48 ₋₁	1.09	4.99 ₋₁	1.06
50	0	2.74 ₋₁	1.75	1.89	1.16 ₊₁	1.90	1.15 ₊₁
	2.5	-1.24	1.66	2.02	7.38	-2.87	8.45
	5	-1.70 ₋₁	5.34 ₋₁	-1.80 ₋₁	3.78	-1.00 ₋₁	5.08
	10	-1.41 ₋₁	1.43 ₋₁	-2.65 ₋₁	2.18	2.17 ₋₁	2.11
100	0	7.18 ₋₁	2.47	4.10	1.84 ₊₁	4.14	1.84 ₊₁
	2.5	-1.96	2.49	8.57	1.79 ₊₁	-5.56	1.54 ₊₁
	5	-1.07	1.87	-1.79	8.83	1.07	9.55
	10	-5.61 ₋₁	2.97 ₋₁	-1.23 ₋₁	4.32	1.13 ₋₁	4.14
200	0	4.97 ₋₁	3.32	7.95	2.80 ₊₁	7.74	2.81 ₊₁
	2.5	-2.35	3.38	1.66 ₊₁	2.91 ₊₁	-5.72	2.38 ₊₁
	5	-4.14	3.64	2.92	2.08 ₊₁	-4.56 ₋₁	1.87 ₊₁
	10	-2.65 ₋₁	7.40 ₋₁	-6.66 ₋₁	8.12	7.60 ₋₁	7.67
400	0	-8.20 ₋₁	4.34	1.36 ₊₁	4.06 ₊₁	1.40 ₊₁	4.03 ₊₁
	2.5	-2.27	4.11	2.38 ₊₁	3.88 ₊₁	-4.94	3.35 ₊₁
	5	-4.71	4.52	1.42 ₊₁	3.24 ₊₁	-5.52	3.23 ₊₁
	10	-1.49	2.36	-2.77	1.77 ₊₁	8.81	3.22 ₊₁

* -6.52₋₁ = -6.52×10^{-1}

第7図 中央点変位 W のピークの確率密度関数 (PDF)
 $Q=25$ の場合

第8図 中央点変位 W のピークの確率密度関数 (PDF)
 $Q=100$ の場合

通りについて示す。

まず W のピークの PDF の結果について考察する。 $Q=25$ (第7図) では、 H が大きくなるにつれて分布の幅が狭くなるので、曲率をつけることによる剛性の増加の効果があることがわかる。また、 $H=2.5$ の正のピークは大部分が正側に存在しているが、負側にもわずかに存在し、 $W \approx -4$ 付近まで達している。これは静的平衡曲線 (第3図) の飛び移り先に対応しており、飛び移りに伴う変形形状の変化のために生じた現象と考えられる。

$Q=100$ (第8図) では、各 H とも、分布の幅が広くなり、 $H=2.5, 5$ では飛び移り座屈をとまなう大振

幅振動が起きていることがわかる。 $H=2.5$ の場合、分布の幅が広がり、ほとんどすべての振動が飛び移りを起こしていると考えられる。また $W < 0$ 側に生じる正のピークの存在確率が $W > 0$ 側と同じくらいになっているが、これは飛び移りに伴い高次のモードが誘起されて生ずる変形形状の変化に対応していると考えられる。 $H=5$ の場合、正負両ピークの $W < 0$ の側の裾が長く伸びており、飛び移り現象を生じる確率が大きくなってきて、無視できなくなっていることを示している。

$Q=400$ (第9図) では、各 H とも、分布の幅がさらに広がっている。ここで特徴的なのは、 $H=2.5, 5$ の正のピークの分布には $W \approx -2$ 付近にくびれが見られ、正側と負側にそれぞれ山が存在することである。 $H=5$ の場合には、 $W < 0$ の正のピークの存在確率が

第9図 中央点変位 W のピークの確率密度関数 (PDF)
 $Q=400$ の場合

第10図 $Q=400, H=5$ の場合のランダム加振力 f と応答 W および V の履歴の1例
○印は W の正のピークを示す。

$W > 0$ の正のピークの存在確率とほぼ同じになっている。負のピークの PDF もあわせて考えると、一見、 $W \approx 0$ を中心とした振動と、 $W \approx -10$ を中心とした振動が存在するように見える。このような PDF が得られる理由を説明するため、 W および変位体積 $V (= \int_0^1 [w(\xi, t)/h] \xi d\xi)$ の履歴の 1 例をランダム加振波とともに第 10 図に示した。第 10 図は、 $W \approx -10$ を中心とした振動が存在するのではなく、変形形状の変化に伴う中央点の変位の逆転に起因して $W < -2$ の領域に W の正のピークが現れることを示している。さらに振幅が非常に大きくなると (第 10 図 $\tau > 3$ 参照)、上記のような変形形状の変化に伴うピークはほとんど現れなくなること示している。 $H = 2.5$ の場合は、 $W < 0$ の領域に正のピークが存在する確率が $Q = 400$ の場合のほうが $Q = 100$ の場合よりも小さくなっている。これは第 10 図から推測すると、 $Q = 100$ の場合は $\tau < 3$ の型の履歴が存在する確率がかなり大きいのにに対し、 $Q = 400$ では振幅が大きくなって $\tau > 3$ の型の履歴が支配的になっているためと考えられる。第 9 図の $H = 2.5$ の PDF の分布形状は、横方向に 2.5 平行移動すると、 $H = 0$ の PDF の分布形状と大局的には一致しており、その振動特性は平板に近くなっていると考えられる。負のピークの PDF の分布形状は、 $H = 2.5$ では $H = 0$ と大差なくなり、これからは $H = 2.5$ では平板的な挙動をしていると考えられる。 $H = 5$ では、上述の $W < 0$ の領域の正のピークとの関連で若干分布形状に差が見られる。PDF が最大となる W の値は、 $H = 0$ では約 -7.5 に対し、 $H = 2.5$ では約 $-9.0 \approx -7.5 - H$ 、 $H = 5$ では約 $-11.5 \approx -7.5 - H$ の関係が見られ、大局的には平板の振動に近づいていると考えられる。

第 11 図 下面応力 S_L のピークの確率密度関数 $Q=25$ の場合

S_U, S_L のピークの PDF について考察する。 $Q=25$ (第 11 図) では、まだ中央面の伸び縮みによって生ずる非線形項の影響が小さいので、 $H=2.5, 5$ について S_U, S_L ともに正のピークの分布と負のピークの分布とは、原点を中心に互いにほぼ対称の関係にある。また、 H が大きいほど分布が狭いので、曲率をつけた効果があることがわかる。 S_U の分布と S_L の分布との差は小さく分布幅は S_L のほうが大きいので S_U の図は省略した。

第 12 図 上面応力 S_U のピークの確率密度関数 (PDF) $Q=100$ の場合

第 13 図 下面応力 S_L のピークの確率密度関数 (PDF) $Q=100$ の場合

$Q=100$ (第12, 13図) では, 上記非線形項の影響がはっきり現れている。 $H=0$ の場合, 曲げによる圧縮が中央面の伸びによって打ち消され, 逆側では曲げによる伸びに中央面の伸びが加わってさらに大きくなり, 正のピーク, 負のピークとともに正方向に裾を引くようになる。しかし, 曲率がついていると, 振動が大きくなるに伴い正の側と負の側との振動形状の差が大きくなるために, S_u と S_L の分布に差が見られるようになる。また $W<0$ 側への振幅が大きくなり, $W<0$ のピークに対応する曲げ応力が大きくなって (第5図参照), S_L の分布は圧縮側すなわち負側に伸びていくことになる。この様子は $H=2.5$ に顕著に現れている。

$Q=400$ (第14, 15図) では, 上記非線形項の影響が, $H=2.5, 5$ にも現れ, S_u の正のピークが正の方向へ

第14図 上面応力 S_u のピークの確率密度関数 (PDF) $Q=400$ の場合

第15図 下面応力 S_L のピークの確率密度関数 (PDF) $Q=400$ の場合

第16図 中央点変位 W のパワースペクトル密度 (PSD)

裾をひいており, 負のピークの分布形状は $H=0, 2.5, 5$ の三つともよく似ている。 S_L では, $H=5$ の場合に, $W<0$ の方向への振動に伴って発生する大きな曲げ応力の影響で負の大きな応力を生じている。

第3表と第11~15図を比較して, 飛び移りを含んでガウス分布からかなりはずれた上記のような S_u, S_L の振動特性を論ずるには, mean と SD とでは不十分で, S_u, S_L のピーク (または S_u, S_L) の PDF を必要とすると考えられる。

次に, W の PSD について述べる (第16図)。 $Q=25$ の場合, $H=0$ にくらべ $H=2.5$ の振動は小さく, $H=5$ の振動はさらに小さくなっている。 $H=0$ の PSD のピークは二つ見られるが, それぞれ1次および2次の固有振動数より少し高い所に位置している。これに対し, $H=2.5$ の低いほうのピークおよび $H=5$ のピークはそれぞれの1次の固有振動数より少し低いところに存在している。 $Q=50$ になると, 各1次のピーク, とくに $H=2.5$ のピークは大きくなり, $H=0$ の1次のピークはさらに振動数の高いほうへ移り, $H=2.5$ および $H=5$ の1次のピークは低いほうへと移る。このことから, $H=0$ の1次ではハードニングの現象が, $H=2.5$ の1次では強いソフトニング, $H=5$

の1次では弱いソフトニングの現象がおこっていることがわかる。 $Q=100$ になると、 $H=2.5$ の殻は振動が大きくなったゆえにハードニングの特性が付け加わって、PSDの山の幅も広がり、振動が複雑になってきたことがわかる。 $H=5$ の殻はあきらかに強いソフトニングの性質を示している。 $Q=400$ になると、 $H=2.5$ の殻は強いハードニングを示し、 $H=5$ の殻は、 $Q=100$ のときの $H=2.5$ の殻と同様にハードニングの特性が付け加わり、 $H=2.5$ 、5ともに山の幅が広がって $H=0$ の分布に近づいている。これは、大きな外力によって殻が飛び移りながら大振幅で振動する場合には曲率をつけたことの効果が小さくなり、平板の振動に似てくることを示すものと考えられる。

5. 疲労寿命の推定

前節で得られた応力のピーク履歴から疲労寿命を推定し、 Q と H の疲労寿命に与える影響を調べる。

S-N 曲線は末益⁸⁾が片持梁の疲労実験により求めたものを用いる (第17図)。本解析では応答応力を弾性で計算することを考慮して、末益⁸⁾が片持梁の2024T3板の疲労実験により求めた ϵ -N曲線の ϵ にたんに弾性係数 $E/(1-\nu^2)$ を掛けたS-N曲線を用いる (第17図実線)。さらに材料の疲労特性は塑性域まで含めてはば ϵ -N曲線で表されると仮定して、低サイクルの部分では図の破線のように外挿した。

ランダムな応力履歴の累積損傷度の計算は文献⁷⁾の方法によった。すなわち、ひとつの極大値と隣りの極小値(または極小値と隣りの極大値)との二つの値から計算される平均応力 S_m と応力振幅 S_A から相当応力 S_e 。

$$S_e = S_A \{1 - \kappa (S_m / S_u)^\gamma\}^{-1} \quad (34)$$

$$\kappa = 1.385, \quad \gamma = 0.923$$

を求め、これを線形累積損傷則にあてはめて単位時間あたりの疲労損傷度 D_m の期待値 $E[D_m]$ を計算し、その逆数として疲労寿命を算出した。ここで S_u は材料の引張破断応力、 κ 、 γ は両端固定梁の疲労実験結果⁸⁾から定めた値である。

以上のようにして求められた疲労寿命を第4表に示す。表中 ∞ とあるのは、累積損傷が小さすぎて計算機の中でunder flowをおこしたので寿命を無限大としたものである。

$Q=25$ では $H=0$ のみ寿命が算出されている。 $Q=50$ になると $H=2.5$ の寿命も算出され、 $Q=100$ では $H=2.5$ の S_u における疲労寿命が $H=0$ よりもかなり短くなり、 $H=5$ の寿命も $H=0$ の寿命の100倍程度まで接近している。 $Q=200$ でも $H=2.5$ の S_u における寿命が最も短い、 $H=0$ 、2.5、5の寿命は非常に接近している。 $Q=400$ で $H=10$ の寿命が急に

第17図 S-N 曲線

第4表 疲労寿命
(上段は S_u 、下段は S_L による値。単位は秒)

Q	H			
	0	2.5	5	10
25	1.08 ₊₁₁	∞	∞	∞
	4.77 ₊₁₁	∞	∞	∞
50	7.92 ₊₁₁	2.60 ₊₁₇	∞	∞
	2.12 ₊₁₄	4.37 ₊₁₇	1.58 ₊₁₉	∞
100	1.30 ₊₈	7.54 ₊₄	1.52 ₊₈	∞
	2.04 ₊₈	2.06 ₊₈	1.15 ₊₁₀	∞
200	9.28 ₊₃	3.58 ₊₃	6.58 ₊₄	8.96 ₊₁₇
	7.50 ₊₃	1.21 ₊₅	1.75 ₊₃	2.79 ₊₁₁
400	4.71 ₊₁	3.52 ₊₁	2.65 ₊₁	1.86 ₊₁
	5.42 ₊₁	3.81 ₊₁	3.73 ₊₁	4.51

短くなり、とくに S_L による寿命はわずか4.51秒である。ただし、 $H=10$ の殻に関しては前に述べたように3自由度近似では不十分と考えられるので、他の H と直接比較するのは無理であろう。 $H=10$ を除くと、やはり $H=2.5$ の S_u による寿命がわずかではあるが $H=0$ の寿命より短い。

ところで疲労寿命と S_u の平均値などとの関係について、 $Q=100$ の場合を例にとって考察しよう。第12図に示された S_u の正のピーク分布を見ると、正の側に裾野がのびて、本計算で得られた最大応力が $H=0$ では約84、 $H=2.5$ では約106になっている。このことから $H=2.5$ の寿命は $H=0$ の寿命の約1/17になっていることが理解される。また $H=5$ の分布は、確率は小さいが飛び移りにより大きな応力が発生しその最大値は70程度に達することを示しており、これにより寿命が 1.5×10^8 秒程度に下がったことが理解される。このような結果は、第3表の S_u のmeanとSDを見る限りは理解されず、飛び移りを含む問題では、 S_u のピーク(または S_u)の分布関数で議論しなければならないことを示している。

$H=5$ については、3自由度近似で振幅が非常に大きくなった場合、固定端部の曲げ応力を小さめに評価

する傾向があるので、疲労寿命を長めに算出すると考えられる。したがって $Q=400$ の S_u の場合に $H=5$ の寿命がとくに長いのは、この理由によると考えられる。

6. 結 論

本論文において、浅い球形殻の変形を固有振動モードで展開して、まず静的平衡特性を求め、次いでシミュレーション法によりランダム振動応答を計算し疲労寿命を推定した。それらの結果から次の結論が得られたものと考えられる。

- 1) $H=5$ までの殻では、固有振動モードを用いて3自由度近似で求めた静的平衡特性は従来のものとよく一致する。
- 2) 飛び移りを伴って振動する場合、 $W<0$ の領域に正のピークが生じ、 $W<0$ の正のピークの分布が $W>0$ の領域の分布と同程度となり、飛び移り先で微小振動を起こしているかのように見えるがこれは飛び移り先で変形形状が変化することによるものである。
- 3) 振動が非常に大きくなって飛び移り先をはるかに越えて振動するようになった場合、 W の PDF および PSD は平板の場合に類似しており、振動特性が平板に近くなる。
- 4) 音圧が小さい場合は、曲率の効果が大きく、疲労寿命は長くなるが、音響疲労が問題となる高音圧では、飛び移り座屈を伴うので、曲率をつけたことにより逆に平板よりも疲労寿命が短くなることがある⁹⁾。
- 5) 飛び移りを伴う場合、応力の平均値と標準偏差だけから寿命を推定することはできず、応力またはそのピークの PDF で判断する必要がある。

$H=10$ の場合については少なくとも5自由度以上で計算する必要があるので本論文では、 W , S_u などの分布の図示は省略した。十分な精度で計算しその特性を論ずるのは今後の課題としたい。

参 考 文 献

- 1) 小林繁夫, 萩原太郎: 浅い殻のランダム加振に対する非線形応答, CAS 研究報告, 第17号 (1974.3), pp. 113-130.
- 2) 末益博志, 小林繁夫: 浅い円筒形曲面パネルの外圧による座屈と非線形ランダム振動応答の解析 I. 非線形振動方程式と外圧による座屈, 日本航空宇宙学会誌, 第29巻, 第328号 (1981.5), pp. 260-267.
- 3) KELLER, H. B. and WOLFE, A.: On the Nonunique Equilibrium States and Buckling Mechanism of Spherical Shells, J. Soc. Ind. Appl. Math., Vol. 13 (1965), p. 674.
- 4) BUDIANSKY, B.: Buckling of Clamped Shallow Spherical Shells, Proceedings of the IUTAM Symposium on the Theory of Thin Elastic Shells, Delft, Holland (1959).
- 5) WEINITSCHKE, H. J.: On the Stability Problem for Shallow Spherical Shells, J. Math. Phys., Vol. 38 (1960), p. 209.
- 6) THURSTON, G. A.: A Numerical Solution of the Nonlinear Equations for Axisymmetric Bending of Shallow Spherical Shells, J. Appl. Mech., Vol. 28 (1961), p. 557.
- 7) 小林繁夫, 末益博志: シミュレーション法による周辺単純支持矩形板の非線形ランダム振動応答解析, 日本航空宇宙学会誌, 第26巻, 第291号 (1978.4), pp. 206-214.
- 8) 末益博志: パネルの音響疲労問題に関する基礎研究, 東京大学大学院工学系研究科航空学専門課程学位論文 (1979.12).
- 9) 末益博志, 小林繁夫: 浅い円筒形曲面パネルの外圧による座屈と非線形ランダム振動応答の解析 II. 非線形ランダム振動応答, 日本航空宇宙学会誌, 第29巻, 第328号 (1981.5), pp. 268-274.