(a) フィルムの出力 (剝離した場合)

(c) フィルムの出力 (剝離しない場合)

(b) 煙写真 (剝離した場合)

(d) 煙写真 (剝離しない場合)

第10図 ホット・フィルムの出力波形

hot film を試作した。

このフィルムは、定温度に加熱して局所的に気流の温度を高め、それをシュリーレン法で光学的に観察することにより剝離を伴う流れ場の変動を観察できる。試作したフィルムは柔らかいため任意の曲面に利用できその取扱いも容易である。またさらに試作したフィルムの熱トレーサ源としての応用性などが明らかとな

った。

参考文献

- 1) 大橋秀雄, 石川宣勝: 非定常翼の後縁付近の流れの可視化研究, 日本機械学会誌, 第74巻, 第634号(1971), pp. 1500-1506.
- 2) 林 正徳, 桜井 晃, 大屋裕二: 一様流中に置かれた二次元矩形柱の変動特性, 九大工学集報, 第54巻, 第2号 (1981), pp. 137-144.

—特 集—

3次元翼まわりの流れの解析*

北 森 信 明**・高 野 暉**

Key words: Aerodynamics; aerodynamic characteristics; wings and airfoil sections

1. 序 論

3次元(有限幅)翼表面の圧力分布を求めることは、空気力学、航空工学の分野では興味のある重要な問題である。流れは定常、非圧縮性、非粘性の非回転流であると仮定すると、圧力場は速度場から一意的に容易に決定することができ、特に非回転流において

は、速度ベクトルは速度ポテンシャル(スカラー量)のベクトル勾配で与えられる。したがって、問題は翼表面上における速度ポテンシャルを求めることであり、その支配方程式であるラプラス方程式を解くことに帰着される。

ラプラス方程式は、有限要素法において汎関数の最小化と密接に関連しており、圧力等の未知の連続量を有限個数の分割領域(要素)内で連続である関数によって構成する離散化モデルによる近似解法がここで採用される。管内の流れのような内部流問題では、ラプラス方程式に対する境界条件を停留条件とする汎関数

* 昭和57年11月10日, 第20回飛行機シンポジウムにて講演。昭和58年4月5日原稿受理 Numerical Analysis on the Flow around Three-Dimensional Wings

** 東京大学工学部航空学科 Nobuaki KITAMORI and Akira TAKANO

が存在するので解析は容易であるが、翼のまわりのような外部流問題では、考えている領域が無限上流から無限下流までわたっているために、従来の方法では解を求める領域、すなわち計算領域の分割方法や境界条件の与え方に困難を生ずる。そこで、速度ポテンシャルに対するラプラス方程式を直接に解くかわりに、ラプラス方程式の特解であり、かつ無限遠点での境界条件（一様流条件）を満足するような吹出点、吸込点、複吹出点あるいは渦度等の特異点を翼表面上に分布させ、翼表面での境界条件を満たすようにそれらの強さを決定する方法、すなわち「表面特異解法」(Surface Singularity Method) が採用される。

ここでは、一様流中におかれた3次元翼まわりのポテンシャル流れについて、上記の表面特異解法を用い、積分方程式によって問題を定式化して解析を行い、その代表的な結果について述べる。流れは前述のように定常、非圧縮性、非粘性の非回転流であるとし、剥離は起きていないものと仮定する。また、揚力を考慮するために、3次元翼の後縁から一様流に沿って下流方向に後流渦面をおき、クッタ条件に準ずる条件として、翼表面と後流渦面との接合線を翼後縁に一致させる。さらに、翼表面および後流渦面で分割された要素—パネル—内で速度ポテンシャルの値を一定とする3方法（平面パネル法）を採用して翼面上の圧力分布、空気力係数およびモーメント係数を求める。また、前縁に沿って放物面パネルを採用した方法（曲面パネル法）で計算を行い、その結果を上記の平面パネル法による結果と比較する。

2. 定 式 化

第1図のように、原点を翼先端（前縁中央）におき、一様流（速度 U_∞ ）方向に x 軸、それに垂直にそれぞれ y 軸、 z 軸をとり、3次元微小じょう乱速度ポテンシャルを ϕ とすると、それに対する支配方程式は

第1図 座標系および翼面 S_A と後流渦面 S_W

次のように書かれる。

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad (1)$$

問題は、このラプラス方程式を次の三つの境界条件のもとに解くことである。

i) 流れは翼表面 S_A (第1図参照) に沿う。すなわち、 S_A 上で

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = -U_\infty \cdot n \quad (2)$$

ここで、 n は翼表面 S_A で流体内に向けた単位法線ベクトルである。

ii) 後流渦面 S_W の上下面のポテンシャルの差 $\Delta \phi$ は流線に沿って一定の値を保ち、その値は S_W と S_A との接合線 C_W における ϕ の値の連続性より C_W 上で

$$\Delta \phi = \phi_+ - \phi_- \quad (3)$$

ここで、 ϕ_+ および ϕ_- はそれぞれ C_W の翼面側の上面および下面における ϕ の値である。また、クッタの条件により、 C_W は翼後縁に一致するものとする。

iii) 流れは無限遠で一様である。すなわち、無限遠で

$$\phi = 0 \quad (4)$$

とする。

以上のように定式化された問題を MORINO の方法¹⁾に従って、翼表面 S_A 上の ϕ を変数とした第2種フレッドホルム型積分方程式に変換する。 S_A と S_W とからなる境界に囲まれた流体部分に対してグリーンの公式を適用すると、流れの領域内の点 $P(x, y, z)$ における $\phi(P)$ は次式で表わされる。

$$4\pi\phi(P) = \iint_S \phi(Q) \frac{\partial}{\partial n(Q)} \left[\frac{1}{R(P, Q)} \right] dS - \iint_S \frac{1}{R(P, Q)} \frac{\partial \phi(Q)}{\partial n(Q)} dS \quad (5)$$

ここで、 $S = S_A + S_W$ 。また、 $Q(\xi, \eta, \zeta)$ は S 上の点であり、 $R(P, Q)$ は2点、 P, Q 間の距離で

$$R(P, Q) = [(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2]^{1/2} \quad (6)$$

で与えられる（第1図参照）。積分領域 S を S_A と S_W とに分け、点 P を翼面 S_A 上に近づけると、境界条件 i) により

$$2\pi\phi(P) - \iint_{S_A} \phi(Q) \frac{\partial}{\partial n(Q)} \left[\frac{1}{R(P, Q)} \right] dS - \iint_{S_W} \Delta \phi(Q') \frac{\partial}{\partial n(Q')} \left[\frac{1}{R(P, Q')} \right] dS = \iint_{S_A} U_\infty \cdot n \frac{1}{R(P, Q)} dS \quad (7)$$

が得られる。ここで、 Q は翼表面 S_A 上の点で、 Q' は後流渦面 S_W 上の点であり、 $\oint$ はコーシーの主値

第2図 パネル分割法

をとることを示す (7) 式で, 左辺第2項は翼表面上に分布した複吹出点による項, 第3項は後流渦面上に分布した複吹出点による項で, 右辺は翼表面上に分布した吹出点による項である。

3. 離 散 化

積分方程式(7)式を離散化して解くために, 翼表面および後流渦面を次のように分割する。

(1) 翼表面 S_A を四辺形要素 $\Sigma_k (1 \leq k \leq K)$ に, 後流渦面 S_W を後縁 C_W から下流に向かう帯状要素 $\Sigma_{k'} (1 \leq k' \leq K')$ に分割する (第2図参照)。

(2) 各要素における変数, たとえば速度ポテンシャルは要素内で一定で, 要素の図心における値で代表させる。 $\mathbf{n}$ は要素の図心に流体内に向かって立てた単位法線ベクトルとする。

(3) $\Delta\phi$ の値は C_W を一辺とする翼上下面の各要素における ϕ の値の差 ((3) 式参照) で近似する。

これらの仮定のもとに, 翼表面 S_A 上の ϕ は, 要素分割数 K の自由度をもった多元連立一次方程式に離散化される。ここで, 考えている点を要素 Σ_h の図心 P_h に選べば, (7) 式から次式が導かれる。

$$[\delta_{hk} - c_{hk} - w_{hk}] \{\phi_k\} = [b_{hk}] \{U_\infty \cdot \mathbf{n}_k\} \quad (8)$$

ここで, δ_{hk} はクロネッカのデルタで

$$\delta_{hk} = \begin{cases} 1 & (h=k) \\ 0 & (h \neq k) \end{cases} \quad (9)$$

また, 各影響係数はそれぞれ

$$\begin{cases} c_{hk} = \left[\frac{1}{2\pi} \iint_{\Sigma_k} \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{R} \right) dS \right]_{P=P_h} \\ b_{hk} = \left[\frac{1}{2\pi} \iint_{\Sigma_k} \frac{1}{R} dS \right]_{P=P_h} \\ w_{hk} = \left[\pm \frac{1}{2\pi} \iint_{\Sigma_{k'}} \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{R} \right) dS \right]_{P=P_h} \end{cases} \quad (10)$$

で表わされる。 c_{hk} は第 k 番要素に分布する複吹出点, b_{hk} は第 k 番要素に分布する吹出点, w_{hk} は後流渦面上の帯状要素 $\Sigma_{k'}$ に分布する複吹出点による影響係数で, 要素 Σ_k が C_W と接しないときは0で, C_W と接する翼上面要素の場合には正, 翼下面要素の

場合には負の符号をとる。

これらの積分は解析的にも可能であるが, ここでは計算時間の短縮のために, 点 P_h が要素 Σ_k から十分に離れた場合には HESS & SMITH の方法²⁾⁻⁴⁾に従って近似計算する。ここで距離の判定基準として, 要素 Σ_k の図心と点 P_h との距離 r_0 と要素の最大長さ d (四辺形要素の場合には長い方の対角線の長さ) との比 r_0/d を導入する。計算は, また, 平面パネルの場合と曲面パネルの場合とで異なる。

【平面パネル】 r_0/d の値によって次の三つの場合にわけて計算する。すなわち

- (1) $r_0/d < 2.45$ 解析的
- (2) $2.45 \leq r_0/d < 4.0$ テイラー展開2次近似
- (3) $4.0 \leq r_0/d$ テイラー展開0次近似

それぞれの場合の結果の表示はここでは省略する。

【曲面パネル】 前述のように, 曲面パネルは翼前縁に沿って採用される。前縁に原点をおく局所座標系 ξ, η, ζ (前縁各要素に固定) を導入し, 曲面を

$$\xi = a\zeta^2 + b\eta \quad (11)$$

で表わされる放物面であるとする。単位法線ベクトルおよび面積要素は次式で与えられる。

$$\begin{cases} \mathbf{n} = (-1/l, b/l, 2a\zeta/l) \\ dS = \sqrt{1+4a^2\zeta^2} d\eta d\zeta \end{cases} \quad (12)$$

ここで, $l = \sqrt{1+b^2+4a^2\zeta^2}$ 。また, 点 $P(x, y, z)$ との距離 $R(P, Q)$ は

$$R = \{(a\zeta^2 + b\eta - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2\}^{1/2} \quad (13)$$

で表わされる。したがって, (10) 式から影響係数は次式で与えられる。

$$\begin{cases} b_{hk} = \iint_{\Sigma_k} \frac{\sqrt{1+4a^2\zeta^2}}{R} d\eta d\zeta \\ c_{hk} = \iint_{\Sigma_k} \frac{\sqrt{1+4a^2\zeta^2}}{R^3} \\ \quad \times \frac{(a\zeta^2 + b\eta - x) - b(\eta - y) - 2a\zeta(\zeta - z)}{\sqrt{1+b^2+4a^2\zeta^2}} \\ \quad \times d\eta d\zeta \end{cases} \quad (14)$$

上式の積分は, η については解析的に積分し, ζ についてはガウス・ルジャンドル法により数値積分する。

ここで, 計算時間の短縮のために, $r_0/d \leq 1.5$ では分点数を7, $1.5 < r_0/d \leq 3.0$ では分点数を4, $3.0 < r_0/d$ では分点数を2とする。

4. 圧 力 分 布

互いに隣り合った4点における $\phi_i (i=1 \sim 4)$ から勾配 $\nabla\phi$ を次のように求める。第3図のように, 隣り合った四つの要素の図心の座標ベクトルを $\mathbf{P}_i (i=1 \sim 4)$ とし, この4点から成る四辺形の各対辺の中点を結び, それぞれの直線に沿う単位ベクトルを $\mathbf{b}_1$ および $\mathbf{b}_2$ とする (第4図参照)。 $\mathbf{b}_1$ と $\mathbf{b}_2$ との交点にお

第3図 速度ポテンシャル ϕ の勾配内挿法 第4図 局所座標系 a_1, a_2

ける b_1, b_2 方向の微分は、 P_i における ϕ_i の値を用いて次のように求められる (第3図参照)。

$$\begin{cases} \frac{d\phi}{db_1} = \frac{\phi_1 + \phi_2 - \phi_3 - \phi_4}{|P_1 + P_2 - P_3 - P_4|} \\ \frac{d\phi}{db_2} = \frac{\phi_1 - \phi_2 - \phi_3 + \phi_4}{|P_1 - P_2 - P_3 + P_4|} \end{cases} \quad (15)$$

次に、 b_1 と b_2 の交点を原点として、 b_1 方向に a_1 軸、 b_1 と b_2 とで作られる平面内で a_1 軸に垂直に a_2 軸をとり、 a_1 軸および a_2 軸方向の単位ベクトルをそれぞれ e_1 および e_2 とすれば (第4図参照)、 $\nabla\phi$ の a_1 および a_2 方向の成分はそれぞれ

$$\begin{cases} \phi_{a_1} = \frac{d\phi}{db_1} \\ \phi_{a_2} = \frac{1}{b_2 \cdot e_2} \left\{ \frac{d\phi}{db_2} - (b_2 \cdot e_2) \frac{d\phi}{db_1} \right\} \end{cases} \quad (16)$$

で与えられる。この ϕ_{a_1} および ϕ_{a_2} は、それぞれ a_1 方向および a_2 方向の速度成分で、これらを用いて圧力係数 C_p は次のように表わされる。

$$C_p = \frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2} \rho U_\infty^2} = 1 - \frac{U^2 + V^2 + W^2}{U_\infty^2} \quad (17)$$

ここで、 ρ は流体密度、 p および p_∞ はそれぞれ翼表面上の静圧および一様流の静圧であり、また、 U, V, W は (16) 式のじょう乱速度成分に一様流速度成分を加えた全速度の x, y, z 方向の速度成分である。翼面上の各要素における C_p にその面積を乗じて各方向の成分をとって積分 (総和) すればそれぞれの方向の空気力係数 (基準面積は翼面積) が求まり、さらに考えている軸からの距離を用いて各軸まわりのモーメント

係数 (基準長は基準弦長) が得られる。

5. 計算結果とその考察

ここでは、計算の一例として3次元後退翼についての結果を示す。前縁に直角方向の翼型は NACA 0012 で、アスペクト比は 1.34、後退角は 45° 、テーパ比は 1 (第5図参照、 c は弦長、 b は翼幅) であり、また、翼端は翼の上下面を直径の両端とする半円形に整形されている。前縁には、前述のように、平面パネルおよび曲面パネルを採用して計算を行い、その両者の結果を比較検討する。ここで、空気力およびモーメントは第6図のようにとる。すなわち、揚力 L および横

第5図 後退翼平面形

第6図 揚力 L 、横力 Y と各モーメントとその軸

力 Y はそれぞれ一様流に直角上方および右方向にとり、縦揺モーメント m は翼中心線上 $\bar{x}=0.585c$ における一様流に直角左右方向の軸まわりに (頭上げ正)、横揺モーメント l および偏揺モーメント n はそれぞれその点における翼面に固定された軸まわりにとる。また、それぞれの係数は次式で定義される。

$$\begin{cases} C_L = L / \left(\frac{1}{2} \rho U_\infty^2 A \right) \\ C_Y = Y / \left(\frac{1}{2} \rho U_\infty^2 A \right) \\ C_l = l / \left(\frac{1}{2} \rho U_\infty^2 Ab \right) \\ C_m = m / \left(\frac{1}{2} \rho U_\infty^2 Ac \right) \\ C_n = n / \left(\frac{1}{2} \rho U_\infty^2 Ab \right) \end{cases} \quad (18)$$

ここで、 A は翼面積 ($1.34c^2$) である。

計算は上記の翼について、迎え角 α および横滑り角 β (第6図参照) を変えて行った。それらの結果の代表的なものを第7図以下に示す。

第7図および第8図は、平面パネルのみを採用した

第7図 パネル数 N による揚力係数 C_L の変化

第8図 パネル数 N による縦揺モーメント係数 C_m の変化

場合と前縁に曲面パネルを採用した場合について、翼表面上のパネル総数 N と揚力係数 C_L および縦揺モーメント係数 C_m との関係を示す ($\alpha=6^\circ$, $\beta=6^\circ$)。図からわかるように、 C_L の値はいずれの場合も実験値⁵⁾とよく一致しており、また、 C_m はパネル数 $N=408$ 以上で実験値とよい一致を示している。計算時間は、曲面パネルを用いた場合、 $N=320, 408, 468$ および 600 のとき、それぞれ22秒、30秒、38秒および65秒であった。したがって、精度と計算時間との両者を勘案して以下の計算では $N=468$ とした。また、全パネルが平面である場合 (図中○印) と前縁のみに曲面パネルを用いた場合 (△印) とでは著しい差はないが、後者の場合のほうが前縁付近の圧力分布が滑らかになるので、以下では曲面パネルを採用する。

第9図に、 $\alpha=6^\circ$ で横滑りしたとき ($\beta=8^\circ$) の左右両翼の $y=\pm 0.45b/2$ における翼弦長に沿う圧力係数 C_p の分布を示す。平面パネルのみを採用した場合に

第9図 左右両翼の翼弦長方向の圧力係数 C_p の分布

第10図 揚力係数 C_L の迎え角 α による変化

第11図 縦揺モーメント係数 C_m の迎え角 α による変化 第14図 偏揺モーメント係数 C_n の横滑り角 β による変化 第12図 横力係数 C_Y の横滑り角 β による変化 第15図 安定微係数 $C_{Y\beta}(\text{deg}^{-1})$ の迎え角 α による変化 第13図 横揺モーメント係数 C_l の横滑り角 β による変化

は、迎え角によっては前縁近く（淀み点）で発散することがあるが、前面に曲面パネルを採用すれば図のように C_p は有限で滑らかな分布を与える。図からわかるように、横滑した側の右翼で左翼より大きな負圧を示している。

C_L および C_m の迎え角 α による変化をそれぞれ第10図および第11図に示す ($\beta=0^\circ$ および 6°)。い

れも実験値⁵⁾ ($\beta=0^\circ$) とよく一致しており、また、 β の値にはほとんど関係しない。

第12図、第13図および第14図にそれぞれ横力係数 C_Y 、横揺モーメント係数 C_l および偏揺モーメント係数 C_n の横滑り角 β による変化を示す ($\alpha=6^\circ$)。いずれも、 β による変化はほぼ原点を通る直線になっており、したがって、 $C_{Y\beta}$ 、 $C_{l\beta}$ 、 $C_{n\beta}$ 等の微係数の迎え角による変化は β にはほとんど依存しないことが予測される。これらの微係数に対する計算結果をそれぞれ第15図、第16図および第17図に示すが、いずれの図においても、結果は β の値によってほとんど差がないので計算に用いた β の値は記入していない。また、第10図および第11図の C_L 、 C_m ほどではないが、迎え角の小さい $C_{Y\beta}$ を除いては、いずれも実験値⁵⁾ とよい一致を示している。

断面揚力係数 $C_{L, \text{SEC}}$ の翼幅方向 (y 方向) の分布の一例 ($\alpha=4^\circ$ および 8° , $\beta=6^\circ$) を第18図に示す。横滑りのために翼幅方向の揚力分布は非対称になり、図のように右翼 ($y>0$) のほうが $C_{L, \text{SEC}}$ は大きく

第16図 安定微係数 $C_{l_p}(\text{deg}^{-1})$ の迎え角 α による変化 第17図 安定微係数 $C_{n_p}(\text{deg}^{-1})$ の迎え角 α による変化 第18図 断面揚力係数 $C_{L,SEC}$ の翼幅方向の分布

なる。この傾向は当然なことながら α の大きいほうが顕著になる。また、右翼の翼端は前縁の一部となるために、 $C_{L,SEC}$ が翼端近く ($y/(b/2) \approx 1.0$) で立ち上がっており、このように断面揚力係数の分布が横滑りのときの挙動をよく表わすことのできるの、本パネル法の大きな特徴である。

6. 結 論

定常非圧縮性非粘性ポテンシャル流中におかれた3次元翼まわりの剝離を伴わない流れをパネル法により解析し、一例として有限翼幅後退翼について数値計算を行った。前縁に沿っては曲面パネルを、その他の翼面には平面パネルを用いて3次元翼を近似し、翼表面の圧力分布を求め、さらに揚力係数、横力係数および各モーメント係数を算出した。とくに、前縁に沿って曲面パネルを採用することにより、前縁付近の圧力分布が発散することなく滑らかになり、横滑り時の3次元翼の空気力学的特性をよく表わすことができた。これらの結果は、また実験結果とよく一致していることが示された。翼の厚みを考慮できる本方法は、さらに翼胴結合体のような実機に近い形状についても適用でき、その空気力学的特性を求めることができることが期待される。

参 考 文 献

- 1) MORINO, L., CHEN, L. T. and SUCIU, E. O.: Steady and Oscillatory Subsonic Aerodynamics around Complex Configurations, AIAA J., Vol. 13, No. 3 (1975), pp. 368-374.
- 2) HESS, J. L. and SMITH, A. M. O.: Calculation of Nonlifting Potential Flow about Arbitrary Three-Dimensional Bodies, ES 40622 Douglas-Aircraft Co. (1962).
- 3) HESS, J. L. and SMITH, A. M. O.: Calculation of Potential Flow about Arbitrary Bodies, Progress in Aeronautical Sciences, Vol. 8, Pergamon Press Co., New York (1966), pp. 1-138.
- 4) HESS, J. L.: Calculation of Potential Flow about Arbitrary Three-Dimensional Lifting Bodies, Final Technical Report, Rep. No. MDCJ 5679-01 (1972).
- 5) GOODMAN, A. and BREWER, J. D.: Investigation at Low Speeds of the Effect of Aspect Ratio and Sweep on Static and Yawing Stability Derivatives of Untapered Wings, NACA TN 1669 (1948).