任意形状物体まわりの粘性流計算に対する試み*

林 正 徳**・桜 井 晃**
長 畑 正 史***

Key words: Viscous flows; numerical fluid dynamics; aircraft

1. 序 言

最近、差分法を主体とした数値流体力学はめざましい発達を見せ、航空機の翼などの実用的な形状の物体まわりの粘性流の計算も盛んに試みられるようになってきた。このような分野では、従来の非粘性流の計算などに比べて多くの新しい問題点が生じる。

まず任意な形状の物体を差分計算の枠組に能率的に取り入れるには、計算空間では等間隔直角格子であるが物理空間では物体に沿う格子となるようなものを見いだす方法、いわゆる格子生成の使いやすい手法が開発されなければならない。望ましい格子の条件としては、格子点の密度の制御が容易であること、問題の種類により物体をとりまくような格子 (O型) や物体を半周するような格子 (C型) などが選択できること、直交格子であること、3次元への拡張が可能であることなどが考えられる。この分野ではここ数年活発な研究が行われてきており¹⁾、すでに実用的に使用されている手法もあるが²⁾、どのような場合にも安心して使用できる方法が確立されるにはまだかなり多くの試みと使用経験が必要であると思われる。

粘性流の計算を行う場合にはそれに適した新しい差分スキームが必要となるのはもちろんであるが、そのほかにも多くの問題が生じる。レイノルズ数が非常に低い場合は別として、壁面の粘性層や伴流を正しく記述するためにはこれらの領域で十分に密な格子が実現できなければならない。さらに剝離などが問題となる場合には、剝離領域や剝離せん断層が流出していく領域までも十分に密な格子におおわれていなければならない。このためには格子生成において強力な格子密度制御ができなければならないが、それでもなお計算領域全体の格子点数は膨大なものとならざるをえない。

このため安定性が高くかつ1ステップ当りの計算量が少ないスキームを見いだすことが重要となるが、粘性領域においては格子間隔当りのレイノルズ数を1の程度よりもあまり大きくすると数値粘性が混入する危険があるので、最終的には高速・大容量のスーパーコンピュータの発達を待たざるをえないといえよう。

粘性流で実用上興味ある問題の大部分はなんらかの形で乱流現象をふくんでいる。乱流を第1原理から計算しようとする試みも活発に行われてはいるがまだ実用的な流れを取り扱うにはほど遠く³⁾、乱流粘性に関してなんらかのモデル化をとりいれざるをえない。しかしたとえ現在よく用いられている2方程式モデルでも、剝離、再付着、渦列の形成・崩壊などを含むような流れ場において近似が妥当であり定数が普遍的であるという保証はなく、当分は種々の計算を繰り返しつつ経験的に応用範囲を広げていくしか方法がないのではないかとおもわれる。

このように粘性現象を含む流れ場の数値計算は未知の問題が山積している。筆者らも部分的ではあるがいくつかの試みを行ってきた。まずはじめに述べた格子生成に関して、よく用いられる THOMPSON²⁾ らの方法では密度制御を行うと格子の直交性が失われるので、どのような場合にも直交性が保たれる格子生成法として物体まわりのポテンシャル流の解をパネル法で求め、等ポテンシャル線と流線とを格子として用いる方法を試みた。

また非圧縮流の計算ではポアソン方程式を解く必要があるが、この部分にSOR法などの逐次解法を用いるととくに計算の初期段階で非常に収束が悪い。一方、直接解法はフーリエ変換による方法やEVP (Error Vector Propagation) 法などが提唱されているが⁴⁾、前者は境界条件に対して、後者は領域の大きさに対して制限があり、広く実用化されてはいなかった。ちかごろ MADALA⁵⁾ により、EVP法を任意の大きさの領域に拡張できるSEVP (Stabilized EVP) 法が提唱され、他の直接解法に比べて高速であると考えられるので、上記の格子生成の試みとあわせて非圧縮性 N-S

* 昭和57年11月10日、第20回飛行機シンポジウムにて講演。昭和58年5月9日原稿受理 On Calculation of Viscous Flow around Arbitrarily Shaped Bodies

** 九州大学工学部航空工学科 Masanori HAYASHI and Akira SAKURAI

*** 九州大学大学院工学研究科 Masashi NAGAHATA

第1図 パネル法による格子生成

方程式の計算に応用してみた結果を以下に述べる。

2. パネル法による格子生成について

任意形状物体まわりに格子を生成する方法として良く用いられている THOMPSON らの方法では、 x - y 面 (物理面) での物体表面 C_1 とその外側に適当に設定した閉曲線 C_2 との間の領域を、 ξ - η 面 (計算面) で座標 x, y に関する楕円型方程式の差分解を求めることにより、 C_1, C_2 の写像が直線となるように座標変換する。格子密度制御を行うときには方程式はポアソン型となり、得られる格子は直交しない。

いま任意の物体まわりの仮想的なポテンシャル流を考えると、流線は物体に沿った等ポテンシャル線はそれと常に直交する。またポテンシャル解はパネル法 (特異点分布法) で容易に解くことができる。したがって第1図に示すように、ポテンシャル α 、流れ関数 β の平面を考え、さらに適当な尺度変換 $\xi = \xi(\alpha)$ 、 $\eta = \eta(\beta)$ を導入し、 ξ - η 平面で等間隔直角格子を設定すれば、ある程度の自由度で格子密度を制御しつつ、物理面で物体に沿う格子を得ることができる⁶⁾。

格子の生成は次のような順序で行われる。

まず物体まわりのポテンシャル解をパネル法によって求める。このため物体を多角形で近似し、各辺上に強さが未知の特異点を分布させる。ここでは頂点から頂点へ強さが線形に変化する渦度分布を用いた。

特異点の強さは、各辺の中点に置いた制御点で法線速度成分がゼロという条件から求めることができるが、これをそのまま定式化すると、物体内部の流れに対して条件が余る。格子生成のためには翼問題の場合のようにある辺を無拘束にするという方法は使えないので、ここでは各制御点で法線速度成分が一定であるが未知の値をもつものとして変数を1個増やすことにより解決した。結果として法線速度成分は離散化誤差

に対応した微小な値となる。

上記により x, y に対する α, β および ξ, η は求まるが、必要なのはその逆関係であるので、ある ξ または η の値に対する等ポテンシャル線または流線を逐次近似的に追跡する。ここで各辺の渦度が誘導するポテンシャルが多価であり、追跡している曲線がある辺のまわりを1周すると循環に等しいジャンプを生じるということが問題となる。したがって格子線の追跡は次のような順序で行わねばならない。まずある制御点で $\xi=0$ と定め、その点を通る等ポテンシャル線を追跡する。このときポテンシャル解における x, y 速度成分がそれぞれ $\partial\alpha/\partial x$ および $\partial\alpha/\partial y$ であることを用いて2元ニュートン法で順次に格子点の位置を決定するとともにポテンシャルのジャンプを考慮する必要があるかどうかを判定する。同様にこのゼロ・ポテンシャル線から1本ずつ流線を追跡して格子生成を完了する。

生成された格子を利用して差分計算を行うために必要な測度パラメータは、1次のはポテンシャル流の速度成分から、また2次のは必要ならば複素ポテンシャルを f 、複素座標を z とするとき、

$$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2} = \operatorname{Re} \left(\frac{d^2 f}{dz^2} \right), \quad \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x \partial y} = -\operatorname{Im} \left(\frac{d^2 f}{dz^2} \right) \quad (1)$$

などから決定できる。

第2図にはこのようにして生成した格子の例を示す。この手法は基本的に直接解法であるので安定でどのような形状の物体でも取り扱うことができるが、格子線の追跡に時間がかかるので、パネル法によりポテンシャル解が容易に求められる割には計算時間は短くない。また現在は、物体上の諸変数値が制御点でしか正しくないで格子点数よりも十分に多い辺数の多角形で近似して制御点間の内挿を用いていること、Cグリッドの生成が完成していないなどの問題があり、今

(a) 凹角をもつ物体まわりの格子

(c) KÁRMÁN-TREFFTZ 翼まわりの格子

(b) 平板まわりの格子

(d) 翼まわりに一様流を仮定して生成した格子

第2図 生成された格子の例

後解決していく必要がある。

3. SEVP によるポアソン方程式の直接解法

ポアソン方程式の直接解法の一つである EVP (Error Vector Propagation) 法は、偏微分方程式

$$A \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = S(x, y) \quad (2)$$

を3行3列の格子点からなる差分公式

$$\phi_{i,j+1} = - \frac{a_{i,j} \phi_{i,j-1} + b_{i,j} \phi_{i-1,j}}{c_{i,j}} + \frac{b_{i,j} \phi_{i,j} - b_{i,j} \phi_{i+1,j} - S_{i,j}}{c_{i,j}} \quad (3)$$

で近似する場合、これは下側2行 ($j, j-1$) の格子点で解が既知のときに $j+1$ 行での解を与えるものとみなすことができるということを利用するものである。いま領域の下端 $j=1$ 行で境界条件を満足するものとその上の行で任意な二つの行ベクトルを仮定すると、(3)式を順次上方に適用することにより上端 $j=J$ にいたる解ベクトルを求めることができる。別に $j=2$ 行での解ベクトルと $j=J$ 行での解ベクトルと

の間の影響行列を計算しておいた上で $j=J$ において得られた解ベクトルに乗じることにより、 $j=J$ においても境界条件を満足するための修正ベクトルを得ることができる。

EVP 法における問題点は、(3)式を j の増す方向に適用することが誤差増幅的で、最大行数 J が、有効桁数などで異なるが、およそ 20~30 行程度に制限されることである。SEVP (Stabilized EVP) 法は領域を複数のブロックに分割し、各ブロックに対して EVP 法を適用することをうまく連結することによって、任意の行からなる領域についての直接解を求めるものである。

計算領域を第3図のように適当な個数のブロックに分割する。あるブロックは j_0, j_d の2行で下のブロックと、 j_0, j_t の2行で上のブロックと重複する。あるブロック n で j_0, j_d 行での解ベクトルと側方境界条件が与えられていれば、(3)式によって j_t での境界条件はまだ満たしていないある解 (特解と呼ぶ) を得る。また(3)式で $S=0$ とし斉次な境界条件に対して同様に得られる解を斉次解 ϵ と呼ぶことにすれば、

次の2種の影響行列

$$\epsilon_e = R_n \epsilon_f, \quad \epsilon_d = Q_n \epsilon_f \quad (4)$$

をあらかじめ求めておくことができる。各ブロックで EVP 計算を行うことを次の順序で繰り返すことにより、うまく全領域の解を求めることができる。

(a) 各ブロックの j_i 行で適当な境界条件(領域上端では真の条件)を仮定し、直下のブロックの最終2行の解ベクトルを初期ベクトルとして(3)式により前進計算を行い特解を求める。 ψ_i が仮定した境界条件を満たすよう(4)式により追加すべき斉次解を決定する。

(b) 上記により最上端のブロックでは真の解が得られる。したがってその ψ_e を直下のブロックの境界条件として、(a)と同様な操作を最下端ブロックまで進めれば、全領域において真の解が得られる。

この方法では時間のかかる逆行列計算などはある幾何形状の格子については1度だけ計算しておけばよく、解を求めるためには格子の列だけの次数の行列の乗算をブロック数の約4倍の回数行えばよい。種々の境界条件への応用や分割の最適化など検討すべき問題は残っているが、逐次解法の収束が遅い差分計算の開始直後などには非常に有効な解法であると思われる。

4. N-S 方程式による翼まわりの流れの計算

NACA-0015 翼まわりの粘性流を非圧縮性 N-S 方程式によって計算する。単体の翼は格子生成の手法を用いずとも等角写像によりかなり容易に円に写像できるし翼まわりのレイノルズ数の低い流れはとくに興味あるものでもないが、先に紹介したいいくつかの手法の確認のために行ったものである。

渦度 ζ と流れ関数 ψ によって定式化された N-S 方程式は、

$$\frac{D\zeta}{Dt} = \frac{1}{Re} \nabla^2 \zeta \quad (5)$$

$$\nabla^2 \psi = \zeta \quad (6)$$

ただし

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + A \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial \xi} - B \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \eta} \quad (7)$$

$$\nabla^2 = a \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + b \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + c \frac{\partial}{\partial \xi} + d \frac{\partial}{\partial \eta}$$

などであり、 $A, B, a, \dots, d$ などは測度パラメータである。

第4図(a)には翼まわりに生成した格子をしめす。計算に必要な部分は切り取ってある。前縁から左へ

第4図 0015 翼まわりに生成された格子

(a) 流線

(b) 等渦度線

第5図 迎角 20°, $Re=20$ での流れ

伸びる格子線に沿って切れ目を入れたものを計算領域とする。切れ目においては周期境界条件を与える。また外側境界のうち翼の後方にある部分を流出境界と考え、それ以外の部分は流入境界とする。本計算では流入境界では流れは初期のポテンシャル解のまま一定、流出境界では $\partial\psi/\partial\eta = \partial^2\psi/\partial\eta^2 = 0$ また物体表面での渦度 ζ の値はよく知られている1次近似法によった。(5)式は半タイムステップずつ ξ または η について陰に差分化するいわゆる ADI 法を用い、(6)式は SEVP 法により解いた。

第5図は迎角 20 度、レイノルズ数 20 での計算結果である。このように剥離の生じていない流れでも後方で格子が少し粗すぎており、剥離流の計算でははるかに格子点数を増すか、いわゆる C グリッドを採用する必要があろう。流出境界条件は本来は存在しない条件であり、超音速流の場合や明らかに放物型流れ場であ

る場合以外には、物理的に正しい与え方というものはない。本計算のように穏やかな流れの場合にはとくに問題は生じなかったが、後流が激しい擾乱を示すような場合には、たとえば十分後方において強い擬似粘性を働かせるなどの手法を試みる必要が生じるであろう。

5. 結 語

実用的に興味あるような物体まわりの、剥離や乱流現象を含む流れ場の信頼できる数値計算が行えるためにはまだ多くの問題が残っている。本稿ではパネル法によって物体まわりの仮想的なポテンシャル流を解くことにより直交性のある格子を生成する試みについて述べ、また非圧縮性流れの計算に現われるポアソン方程式の新しい直接解法である SEVP 法を紹介した。これらを用いて翼まわりの低レイノルズ数流れ場の計算をおこなったが、失速などを含む高レイノルズ数流れ場の計算のためには信頼できる乱流モデルの研究やより使いやすい格子の生成など多くの問題が残っている。

参 考 文 献

- 1) Numerical Grid Generation Techniques, NASA CP 2166 (1980).
- 2) THOMPSON, J.F., THAMES, F.C. and MASTIN, C.W.: TOMCAT—A Code for Numerical Generation of Boundary-Fitted Curvilinear Coordinate Systems on Fields Containing Any Number of Arbitrary Two-Dimensional Bodies, J. Comp. Phys., Vol. 24, No. 3 (1977), pp. 274-302.
- 3) CHAPMAN, D.R.: Computational Aerodynamics Development and Outlook, AIAA Journal, Vol. 17, No. 12 (1979), pp. 1293-1313.
- 4) ROACHE, P.J.: Computational Fluid Dynamics, Hermosa Publishers, Albuquerque (1972).
- 5) MADALA, R.V.: An Efficient Direct Solver for Separable and Non-Separable Elliptic Equations Mon. Weath. Rev., Vol. 106, No. 12 (1978), pp. 1735-1741.
- 6) HAYASHI, M., SAKURAI, A. and NAGAHATA, M.: Generation of Orthogonal, Body-Fitted Grids Using Potential Flow Solution by the Panel Method, ISAS Report S.P. 1 (1983), pp. 33-40.