$$T_{x0} = -T_M + T_{RB} + T_{WI} \approx 0$$

であり、惰走回転中は、

$$T_{\theta D} = C\dot{\theta}_3 = -T_{MD} - T_{RB} - T_{WR} \approx 0$$

$$T_{xD} = T_{MD} + T_{RB} + T_{WI} \approx 0$$

である。ただし、真空中においては、 $T_{WR} = T_{WI} = 0$ であるから常に $T_{\theta 0} = T_{x0} = 0$ であり定常回転中でも T_x はドリフトの要因にならない。上式より、定常回転中は $T_M = T_{RB} + T_{WR}$ だから $T_{x0} = -T_{WR} + T_{WI}$ で、その z_1 成分は、 $-T_{x0} \sin \theta_2 (T_{WR} - T_{WI}) \sin \theta_2$ である。一方、惰走回転中のトルク T_{xD} の z_1 成分は

$$-T_{xD} \sin \theta_2 = -(T_{MD} + T_{RB} + T_{WI}) \sin \theta_2$$

である。したがって、 $|T_{WR} - T_{WI}| > |T_{MD} + T_{RB} + T_{WI}|$ の場合には惰走回転で使ったほうがドリフトは小さくなる。ただし惰走によりロータ角運動量が減少するためロータ回転数が定常回転数の $|T_{WR} - T_{WI}| / |T_{MD} + T_{RB} + T_{WI}|$ 倍以上の範囲では惰走使用がよいということである。なお、上式で示されるように、定常回転中と惰走回転中とは T_x によるドリフトの方向が逆になる。ロータ回転に伴う外力トルクの例を付図2に示す。

一 論 文

3次元障害物回避に関する一計算法* An Evading Path against 3D Obstacles

加 藤 寛 一 郎**・曾 我 広 志***
Kanichiro KATO and Hiroshi SOGA

Key words: Guidance and control; terrain following; quadratic programming problem; linear complementary problem

Abstract

A quasi-optimum flight path is determined to evade three dimensional obstacles. The procedure consists of solving two linear complementary problems, and is an extension of FUNK's terrain following control into three dimensional space. The formulation includes upper as well as lower bound for flight-admissible space and gives a near minimum-distance path following terrain or obstacles.

1. は し が き

従来飛行経路を決定する問題の多くは、最適制御問題として定式化されてきた。すなわち、運動方程式、終端条件、状態量および制御入力に関する各種の不等式拘束条件を付帯条件とし、汎関数を最小とする問題として解を見いだすものである。

この方法は、解法は確立されているが、数値解が得られるか否かは、必ずしも明らかではない。とくに状態量に不等式拘束が課せられる場合数値的に adjoint を解くのに、多くの困難がある。

このような場合に対して、FUNK¹⁾ が terrain following の経路決定に使用した方法が、有用のようである。FUNK は経路の曲率を制御入力とし、経路を3次スプライン曲線を利用して、離散化された点における曲率のみで表現した。これにより経路決定の問題を、2次計画問題として定式化し、それを線形相補性問題 (Complementary Problem) として解いた。この方法は、計算量が大いのがやや難点であるが、安定した数値解が確実に得られる利点がある。

FUNK の定式化は2次元問題についてのみ行われている。本稿はこれを3次元問題に適用できるように拡張し、その有用性を二、三の数値例で示したものである。

3次元の障害物を回避する場合、判定基準として、各種のものが考えられる。たとえば凸形の地形を回避する場合、地面との隔たりを表わすパラメータとして、地面との最短距離や、絶対高度の差などいろいろなものが考えられる。このように、いかなる基準で経路を決定するかによって、計算時間や最適経路自体が大きく異なってくる。

このため本稿では水平面内と垂直面内の運動を分離して解く実用的解法を提案する。すなわち許容される空間のなかで、水平面内は飛行距離を、また垂直面内

* 昭和57年11月10日、第20回飛行機シンポジウムにて講演。昭和58年3月17日原稿受理

** 東京大学工学部

*** 東京大学大学院。現在：東京芝浦電気(株)

は指定された基準高度からの誤差の2乗積分を、それぞれ評価関数に選び、これを最小とする条件から最適経路を決定する。この方法は、解法が基本的に2次元問題のそれであるため、確実に解が得られる利点がある。ただし、運動を水平および垂直面内にそれぞれ分離して解くため、機体の経路制御能力も、水平、垂直面内で、それぞれ独立に設定しなければならない。

本稿では、2次元問題において、制御入力を線形補間し経路を3次スプライン曲線で表わす点、および経路の2乗積分を制御入力に関し離散化する点は、FUNKの方法を踏襲する。ただし、次の点は、本稿の創案になるものである。すなわち、(1)3次元障害物回避問題を、二つの2次元問題に分離し、別箇に評価関数を設定して解を得るひとつの方法を示したこと、(2)2次元経路の y 座標に、下限だけでなく、上限をも設定できるように拡張したこと、および(3)飛行距離と終端誤差を入力に関して離散化し、この加重和を評価関数とすることにより、2次元最短経路問題を解く手順を示したこと、の3点である。

2. 問題の記述

本稿の方法では、3次元問題を解くのに、2次元問題の解法を二度適用する。以下2次元問題について述べる。

座標を x, y とすると経路の方程式は次式で表わされる。

$$dy(x)/dx = S(x), \quad y(x_0) = y_0 \quad (1)$$

$$dS(x)/dx = K(x), \quad S(x_0) = S_0 \quad (2)$$

ここで S は経路の傾斜(経路角)、 K は下記のように曲率相当のものである。 K と飛行体変数との関係は、2次元運動では次のとおりである。

$$K = (a_n/V^2) \sec^3 \gamma \quad (3)$$

ただし、 V は経路に沿う速度、 a_n は法線方向加速度、 γ は経路角 ($\tan^{-1} S$) で、 $\gamma=0$ のとき K は曲率に一致する。

運動方程式(1)、(2)において、 y と S が状態量、 K が制御変数である。そして y, S, K については次の拘束が課せられているものとする。

$$y_{\min} \leq y \leq y_{\max} \quad (4)$$

$$S_{\min} \leq S \leq S_{\max} \quad (5)$$

$$K_{\min} \leq K \leq K_{\max} \quad (6)$$

また終端 $x=x_f$ において、 y は y_{sp} に指定されているものとする。

$$y(x_f) - y_{sp} = 0 \quad (7)$$

最小にすべき評価関数は、垂直面内の運動の場合、基準高度 $y_c(x)$ からの2乗誤差である。これを J_1 とすると、 J_1 は次式で表わされる。

第1図 2次元問題

$$J_1 = \int_{x_0}^{x_f} q \cdot \frac{1}{2} (y - y_c)^2 dx \quad (8)$$

ここで q は重みであり、一般に x に依存して変化してよい。第1図に y と y_c の関係を示す。基準経路 y_c は、障害物に適当な余裕を加えたもので、飛行不能領域の下限を表わしている。第1図の上側の斜線部も飛行不能領域で、これは $y_{\max}$ で表現される。

一方水平面内の運動では、評価関数は飛行距離の2乗 J_2 と終端誤差の2乗 J_3 の線形結合 $J_2 + J_3$ を用いる。 J_2, J_3 は次式で表わされる。 r は q と同様の重みである。

$$J_2 = \int_{x_0}^{x_f} r \cdot \frac{1}{2} S^2 dx \quad (9)$$

$$J_3 = \frac{1}{2} \{y(x_f) - y_{sp}\}^2 \quad (10)$$

式(9)においては、 J_2 が距離の2乗を表わすためには、 $\int_{x_0}^{x_f} r \cdot \frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot dx$ が必要であるが、定数であるから省略されている。評価関数として $J_2 + J_3$ を用いるのは、 J_3 を付与し、 r を調節することにより、式(7)の終端指定条件を実現するためである。

以上によって、解かるべき問題は、次のようになる。すなわち式(4)~(7)で表わされる許容空間内において、式(1)、(2)を満たす y, S に対し、 J_1 ないし $(J_2 + J_3)$ を最小にする $K(x)$ 、 $x_0 \leq x \leq x_f$ を見いだすことである。ただし以下の定式化では、評価関数は便宜上

$$J = \int_{x_0}^{x_f} \left\{ \frac{1}{2} q (y - y_c)^2 + \frac{1}{2} r S^2 \right\} dx + \frac{1}{2} \{y(x_f) - y_{sp}\}^2 \quad (11)$$

と記すことにする。 $q=0$ とすれば水平面内の、また $r=0$ とし、右辺第三項を省略すれば垂直面内の、問題に、それぞれ帰着される。

実際に3次元問題を解くときには、まず指定した許容最高高度によって地形を切断し、許容される領域を定め、このなかで $J_2 + J_3$ を最小にする経路を決定する。次に、この経路に沿った地形を垂直面に射影し、

これより飛行可能な領域を定め、 J_1 を最小にする経路を求める。このようにして得られた水平面、垂直面の二つの経路を組み合わせるにより、3次元の経路が決定される。この手順を見てもわかるように、得られる経路は、厳密な意味での最短経路ではない。ただし障害物によって発生する横および上下方向の経路変化が、飛行距離に比べ小さい場合には、近似的に最短経路が与えられる。

3. 評価関数の離散化と解法

解法は、最終的には、線形相補性の問題に帰せられる。その骨子となる部分は、離散化された制御入力で構成されるベクトル $\mathbf{K}$ を用い、評価関数を $\mathbf{K}$ の2次形式で、また不等式拘束を $\mathbf{K}$ の1次式で表現することにある。

区間 $x \in [x_0, x_i]$ を N 個の区間に分割し、その境界を $x_0, x_1, \dots, x_N$ とする。他の変数についても x_i ($i=0, 1, 2, \dots, N$) での値には、添字 i を付して示すことにする。

制御入力 K の値は、第7図のように、各区内で線形補間して近似する。そして経路の座標 y_i を x の3次スプライン曲線で構成すると、 y_i, S_i, K_i は次のように表わすことができる。

$$\mathbf{y} = \mathbf{H}\mathbf{K} + \mathbf{y}_0 \quad (12)$$

$$\mathbf{S} = \mathbf{G}\mathbf{K} + \mathbf{S}_0 \quad (13)$$

ただし、 $\mathbf{y}, \mathbf{S}, \mathbf{K}$ は、それぞれ y_i, S_i, K_i ($i=1, 2, \dots, N$) を成分とする次のような N 次元ベクトルである。

$$\mathbf{y} = [y_1, y_2, \dots, y_N]^T \quad (14)$$

$$\mathbf{S} = [S_1, S_2, \dots, S_N]^T \quad (15)$$

$$\mathbf{K} = [K_1, K_2, \dots, K_N]^T \quad (16)$$

また $\mathbf{H}, \mathbf{G}$ は、いずれも $N \times N$ の定数行列、 $\mathbf{y}_0, \mathbf{S}_0$ は N 次元の定数ベクトルである。 $\mathbf{H}, \mathbf{G}, \mathbf{y}_0, \mathbf{S}_0$ の誘導と表現は、補節1に示される。

式(12), (13)を用いると、式(8), (9), (10)の評価関数は、それぞれ次のように表わされる。

$$J_1 = \frac{1}{2} \mathbf{K}^T \mathbf{H}^T \mathbf{Q} \mathbf{H} \mathbf{K} + (\mathbf{y}_0 - \mathbf{y}_c)^T \mathbf{Q} \mathbf{H} \mathbf{K} \quad (17)$$

$$J_2 = \frac{1}{2} \mathbf{K}^T (\mathbf{G}^T \mathbf{P} \mathbf{G} + \mathbf{G}^T \mathbf{R} + \mathbf{U}) \mathbf{K} + \left[\mathbf{S}_0^T \left(\mathbf{P} \mathbf{G} + \frac{1}{2} \mathbf{R} \right) + \mathbf{L}^T \right] \mathbf{K} \quad (18)$$

$$J_3 = \frac{1}{2} \mathbf{K}^T (\mathbf{H}_N^T (\mathbf{H})_N \mathbf{K} + [(\mathbf{y}_0)_N - \mathbf{y}_{sp}] (\mathbf{H})_N \mathbf{K} \quad (19)$$

ここで $\mathbf{Q}, \mathbf{P}, \mathbf{R}, \mathbf{U}$ は $N \times N$ の定数行列、 $\mathbf{L}$ は N 次元ベクトル、 $\mathbf{y}_c$ は基準高度 y_{ci} ($i=1, 2, \dots, N$) から構成される N 次元ベクトルである。また $(\)_N$ は行列の第 N 行ないしベクトルの第 N 要素を表わしてい

る。上式の誘導は補節2に示される。

一方、式(4), (5), (6)の不等式拘束を、離散化すると次のようになる ($i=1, 2, \dots, N$)。

$$(y_c)_i \leq y_i \leq (y_{\max})_i \quad (20)$$

$$(S_{\min})_i \leq S_i \leq (S_{\max})_i \quad (21)$$

$$(K_{\min})_i \leq K_i \leq (K_{\max})_i \quad (22)$$

これらを、 $\mathbf{K}$ に関する線形の不等式拘束条件として、整理すると、次のようになる。

$$\mathbf{C}\mathbf{K} \leq \mathbf{D} \quad (23)$$

ただし $\mathbf{C}, \mathbf{D}$ は、下記のような行列で、 $\mathbf{I}$ は $N \times N$ の単位行列である。

$$\mathbf{C}^T = [-\mathbf{I}, \mathbf{I}, -\mathbf{H}^T, \mathbf{H}^T, -\mathbf{G}^T, \mathbf{G}^T] \quad (24)$$

$$\mathbf{D}^T = [-\mathbf{K}_{\min}^T, \mathbf{K}_{\max}^T, (\mathbf{y}_0 - \mathbf{y}_c)^T, (\mathbf{y}_{\max} - \mathbf{y}_0)^T, (\mathbf{S}_0 - \mathbf{S}_{\min})^T, (\mathbf{S}_{\max} - \mathbf{S}_0)^T] \quad (25)$$

ここで $\mathbf{y}_{\max}, \mathbf{S}_{\min}, \mathbf{S}_{\max}, \mathbf{K}_{\min}, \mathbf{K}_{\max}$ は、それぞれ、式(20), (21), (22)の下限および上限を要素として構成される N 次元ベクトルである。

以上の離散化により、解かるべき問題は、拘束条件、式(23)のもとで、式(17)の J_1 、あるいは、式(18), (19)の $J_2 + J_3$ を、最小にする制御入力 $\mathbf{K}$ を見いだす2次計画問題に転換された。これは線形相補性問題に変換することにより、容易に解を得ることができる。これについては、補節3を参照されたい。

4. 数値計算結果

地形 (ないし障害物) として2次元3種、3次元3種、都合6種類のデータを用意し、これらに対して数値計算を行った。主要な結果を第2図以下に示す。計算における各種の設定値は第1表に要約されている。

$\mathbf{K}_{\max}, \mathbf{K}_{\min}$ の要素は、それぞれ一定とし、本稿ではとくに垂直面内では $\mathbf{K}_{\max} = -2\mathbf{K}_{\min}$ 、水平面内では $\mathbf{K}_{\max} = -\mathbf{K}_{\min}$ を仮定した。また評価関数の重み q_i, r_i もすべて一定とした。ただし水平面内の計算では r_i のレベルを調節し、終端拘束条件を満たすようにしている。なお、地形データ $\mathbf{y}_c, \mathbf{y}_{\max}$ も、3次スプライン曲線を用いて近似されている。

第2図 台地を乗り越える飛行

第1表 計算例設定値

図番	径 路	許容高度 $y_{\max}$	サンプル数 N	最大曲率(注) $K_{\max}$
2	垂直面	—	25	0.5 ft ⁻¹ (1.640 m ⁻¹) 0.2 ft ⁻¹ (6.562×10 ⁻¹ m ⁻¹) 0.1 ft ⁻¹ (3.281×10 ⁻¹ m ⁻¹)
3	垂直面	410 ft (125.0 m)	25	0.5 ft ⁻¹ (1.640 m ⁻¹) 0.2 ft ⁻¹ (6.562×10 ⁻¹ m ⁻¹)
4	水平面	—	20	0.016 ft ⁻¹ (5.249×10 ⁻² m ⁻¹) 0.0016 ft ⁻¹ (5.249×10 ⁻³ m ⁻¹)
5 (a)	3 次元	400 ft (121.9 m)	25	水平, 垂直ともに 0.01 ft ⁻¹ (3.281×10 ⁻² m ⁻¹)
5 (b)	3 次元	400 ft (121.9 m)	25	水平, 垂直ともに 0.01 ft ⁻¹ (3.281×10 ⁻² m ⁻¹)
6	3 次元	370 ft (97.54 m)	25	水平 0.0025 ft ⁻¹ (8.202×10 ⁻³ m ⁻¹) 垂直 0.014 ft ⁻¹ (4.593×10 ⁻² m ⁻¹) 0.007 ft ⁻¹ (2.296×10 ⁻² m ⁻¹)

注) 垂直面内では $K_{\min} = -\frac{1}{2} K_{\max}$, 水平面内では $K_{\min} = -K_{\max}$

第3図 高度制限がある場合

第4図 島を低空で迂回する飛行

第2図は2次元垂直面内問題の計算例で、高度差300 ft (91.44 m) の台地を乗り越える飛行の例である。斜線部分が飛行不能領域で、細かい点線はそれを3次スプライン曲線で補間した y_c である。実線、一点鎖線、点線よりなる三つの曲線は飛行経路で、 $K_{\max}$ の差の影響を表わしている。第2図は FUNK の方法を踏襲した計算例である。

FUNK は地形データの下限のみを規定したが、本稿では、地形・障害物データは、その上・下限が指定で

(a) 許容高度 400 ft (121.9 m), 障害物高度 300 ft (91.44 m)

(b) 許容高度 400 ft (121.9 m), 障害物高度 1200 ft (365.8 m)

第5図 3次元障害物を回避する飛行

きるよう拡張されている。第3図は、第2図の計算にさらに最高高度の制限を加えた場合の計算例である。

第4図は、2次元水平面内問題の計算例で、二つの島を低空で迂回する飛行の例である。飛行不能領域は、図の斜線をほどした部分である。2本の経路は、水平面内の経路変更能力の差を表わし、これが小さ

第6図 建物の近くを飛行するヘリコプタ

いと、飛行距離の増大を強いられることが示されている。

第5図は3次元問題の計算例で、本稿が提案する方法の特長も示している。ここでは、3次元障害物を σ をパラメータとして $(300/\sigma) \exp[-[(y/300)^2 + \{(x-500)/300\}^2]/\sigma^2]$ と表わし(x, y の単位は $\text{ft}=0.3048\text{m}$)、これを回避する二つの場合を計算している。第5図(a)は、最高高度300ft(91.44m)の障害物を許容高度400ft(121.9m)で回避する場合で、水平面内問題としては飛行不能領域がなく、3次元径路は、2次元垂直面内問題の解と同一となる。一方第5図(b)は、最高高度1,200ft(365.8m)の高い障害物を許容高度400ft(121.9m)で回避する場合で、3次元径路は、高度一定の2次元水平面内問題で、横に回避する場合とほぼ同一となる。

第6図は、3次元問題の解のもう一つの例で、ほぼ、建物を回避して飛行するヘリコプタの例を想定して諸数値を設定している。実線は通常のヘリコプタができるだけ低空を飛行する場合であり、また一点鎖線は、上下加速度能力のみを2倍にした場合の例である。

5. おわりに

数値計算結果のうち、制御入力の変化する様子や、数値計算アルゴリズムの詳細については、文献2)を参照されたい。また同文献には、第2図に相当する計算を最適制御理論で定式化し、最急降下法を用いて解いた結果が比較のために示されている。

本稿の方法の制約のひとつは、上下・左右の径路変更能力を分離して扱っていることである。いわゆるbank-to-turn方式の機体に適用するためには、この制約をとりのぞくことが望ましい。

参考文献

- 1) FUNK, J. E.: Terrain Following Control Based on an Optimized Spline Model of Aircraft Motion, Ph. D Thesis, University of Michigan (1976).
- 2) 曾我広志: 飛行体の障害物回避に関する研究, 東京大学工学部修士論文 (1983.2).
- 3) 小島政和: 相補性と不動点, 産業図書(1981) pp. 59-62.
- 4) RAVINDRAN, A.: A Computer Routine for Quadratic and Linear Programming Problems, Communications of the ACM, Vol. 15, No. 9 (1972), pp. 818-820.

補 節

1. H, G の表現 y を x に関する3次スプライン曲線とすると、 y の x に関する2階微分は、区間内で連続となる。式(1), (2)より、 K は y の2階微分である。このことは K を区間内で線形に補間することを正当化する。

区間 $x \in [x_i, x_{i+1}]$ で、 $K(x)$ を次のように線形補間する(第7図参照)。

$$K(x) = K_i \cdot (1 - \sigma) + K_{i+1} \cdot \sigma \quad (i=0, 1, \dots, N-1) \quad (26)$$

ただし

$$\sigma = (x - x_i) / \Delta_i, \quad \Delta_i = x_{i+1} - x_i \quad (27)$$

このとき、区間 $x \in [x_i, x_{i+1}]$ では、 S と y は次のようになる。

$$\begin{aligned} S(x) &= S_i + \int_{x_i}^x K(x) dx \\ &= S_i + \Delta_i \int_0^\sigma K(\sigma) d\sigma \\ &= S_i + \Delta_i \left\{ K_i \left(\sigma - \frac{\sigma^2}{2} \right) + K_{i+1} \cdot \frac{\sigma^2}{2} \right\} \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} y(x) &= y_i + \int_{x_i}^x S(x) dx \\ &= y_i + \Delta_i \int_0^\sigma S(\sigma) d\sigma \\ &= y_i + \Delta_i S_i \sigma + \Delta_i^2 \left\{ K_i \left(\frac{\sigma^2}{2} - \frac{\sigma^3}{6} \right) \right. \\ &\quad \left. + K_{i+1} \cdot \frac{\sigma^3}{6} \right\} \end{aligned} \quad (29)$$

第7図 制御入力の補間

とくに $\sigma=1$ とすれば, 次の関係を得る.

$$S_{i+1} = S_i + \{(K_i + K_{i+1})/2\} \Delta_i \quad (30)$$

$$y_{i+1} = y_i + S_i \Delta_i + \{(K_i/3) + (K_{i+1}/6)\} \Delta_i^2 \quad (31)$$

これを繰り返し用いることにより, S_i, y_i は次のようになる.

$$S_i = S_0 + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{i-1} \Delta_n \cdot (K_n + K_{n+1}), \quad i=1, 2, \dots, N \quad (32)$$

$$y_i = y_0 + \Delta_0 S_0 + \Delta_0^2 \cdot \left(\frac{1}{3} K_0 + \frac{1}{6} K_1 \right) \quad (33)$$

$$y_i = y_0 + \left(\sum_{n=0}^{i-1} \Delta_n \right) S_0 + \sum_{n=1}^{i-1} \sum_{m=0}^{n-1} \frac{1}{2} \Delta_n \Delta_m (K_m + K_{m+1}) + \sum_{n=0}^{i-1} \Delta_n^2 \left(\frac{1}{3} K_n + \frac{1}{6} K_{n+1} \right), \quad i=2, 3, \dots, N \quad (34)$$

これより G, H, S_0, y_0 は次のように表わされる.

$$G = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \Delta_0 & & & 0 \\ \frac{1}{2} (\Delta_0 + \Delta_1) & \frac{1}{2} \Delta_1 & & \\ \vdots & \frac{1}{2} (\Delta_1 + \Delta_2) & \ddots & \\ \frac{1}{2} (\Delta_0 + \Delta_1) & \frac{1}{2} (\Delta_1 + \Delta_2) & \dots & \frac{1}{2} \Delta_{N-1} \end{bmatrix} \quad (35)$$

$$H = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} \Delta_0^3 & & & 0 \\ \frac{1}{3} \Delta_0^2 + \frac{1}{6} \Delta_0^3 & \frac{1}{6} \Delta_1^2 & & \\ \vdots & \frac{1}{3} \Delta_0^2 + \frac{1}{6} \Delta_0^3 & \ddots & \\ \frac{1}{3} \Delta_0^2 + \frac{1}{6} \Delta_0^3 & \frac{1}{3} \Delta_0^2 + \frac{1}{6} \Delta_0^3 & \dots & \frac{1}{6} \Delta_{N-1}^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \Delta_1(G)_1 \\ \Delta_1(G)_1 + \Delta_2(G)_2 \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{N-1} \Delta_i(G)_i \end{bmatrix} \quad (36)$$

ただし $(G)_i$ は G の第 i 行を意味する.

$$S_0 = \begin{bmatrix} S_0 + \frac{1}{2} \Delta_0 K_0 \\ S_0 + \frac{1}{2} \Delta_0 K_0 \\ \vdots \\ S_0 + \frac{1}{2} \Delta_0 K_0 \end{bmatrix} \quad (37)$$

$$y_0 = \begin{bmatrix} y_0 + R_1 S_0 & + \frac{1}{3} \Delta_0^3 K_0 \\ y_0 + R_2 S_0 + Q_2 \cdot \frac{1}{2} \Delta_0 K_0 + \frac{1}{3} \Delta_0^3 K_0 \\ \vdots \\ y_0 + R_N S_0 + Q_N \cdot \frac{1}{2} \Delta_0 K_0 + \frac{1}{3} \Delta_0^3 K_0 \end{bmatrix} \quad (38)$$

ただし

$$R_i = \sum_{n=0}^{i-1} \Delta_n \quad (i=1, \dots, N)$$

$$Q_i = \sum_{n=1}^{i-1} \Delta_n \quad (i=2, \dots, N)$$

たとえば, 等間隔 ($\Delta_i = \Delta$) で $N=4$ のとき, 係数行列 G, H は次のようになる.

$$G = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \Delta, \quad H = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ 2 & 1 & \frac{1}{6} & 0 \\ 3 & 2 & 1 & \frac{1}{6} \end{bmatrix} \Delta$$

2. J の離散化 区間 Δ_i が十分小さいとして式 (8) を次のように近似する.

$$J_1 = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} q_i \cdot (y_i - y_{ci})^2 \cdot \Delta_i = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} q_i \Delta_i (y_i^2 - 2y_i y_{ci} + y_{ci}^2) = \frac{1}{2} y^T Q y - y_c^T Q y + \text{定数} \quad (39)$$

ただし

$$Q = \text{diag}[q_1 \Delta_1, q_2 \Delta_2, \dots, q_N \Delta_N] \quad (40)$$

$$y_c = (y_{c1}, y_{c2}, \dots, y_{cN})^T \quad (41)$$

である. 式 (39) に式 (12) を代入し, 整理して, 定数項を省略すると, 式 (17) を得る.

次に式 (9) の J_2 を次のように近似する.

$$J_2 = \sum_{i=0}^{N-1} r_i \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{1}{2} S^2 dx \quad (42)$$

右辺の積分は, 変数を σ に変換し, $s(\sigma)$ として式 (28) の右辺を用いると, J_2 は次のようになる.

$$J_2 = \sum_{i=0}^{N-1} \frac{1}{2} r_i \Delta_i \cdot \int_0^1 S_i + \Delta_i \left\{ K_i \left(\sigma - \frac{\sigma^2}{2} \right) + K_{i+1} \cdot \frac{\sigma^2}{2} \right\} d\sigma = \sum_{i=0}^{N-1} \frac{1}{2} r_i \Delta_i \left\{ S_i^2 + \frac{1}{3} \Delta_i S_i (2K_i + K_{i+1}) + \frac{2}{15} \Delta_i K_i^2 + \frac{1}{20} \Delta_i^2 K_{i+1}^2 + \frac{3}{20} \Delta_i^2 K_i K_{i+1} \right\}$$

$$= \frac{1}{2} \mathbf{S}^T \mathbf{P} \mathbf{s} + \frac{1}{2} \mathbf{S}^T \mathbf{R} \mathbf{K} \\ + \frac{1}{2} \mathbf{K}^T \mathbf{U} \mathbf{K} + \mathbf{L}^T \mathbf{K} + \text{定数項} \quad (43)$$

ただし $\mathbf{P}, \mathbf{R}, \mathbf{U}, \mathbf{L}$ は下記のような行列ないしベクトルである.

$$\mathbf{P} = \text{diag} [r_1 \Delta_1, r_2 \Delta_2, \dots, \\ r_{N-1} \Delta_{N-1}, 0] \quad (44)$$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} r_1 \Delta_1^2 & \frac{1}{3} r_1 \Delta_1^2 & & & 0 \\ & \frac{2}{3} r_2 \Delta_2^2 & \frac{1}{3} r_2 \Delta_2^2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & \frac{2}{3} r_{n-1} \Delta_{n-1}^2 & \frac{1}{3} r_{n-1} \Delta_{n-1}^2 \\ & & & & 0 \end{bmatrix} \quad (45)$$

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \frac{2}{15} r_1 \Delta_1^3 + \frac{1}{20} r_0 \Delta_0^3 & \frac{3}{20} r_1 \Delta_1^3 & & & \\ & \frac{2}{15} r_2 \Delta_2^3 + \frac{1}{20} r_1 \Delta_1^3 & \frac{3}{20} r_2 \Delta_2^3 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & \frac{2}{15} r_{n-1} \Delta_{n-1}^3 + \frac{1}{20} r_{n-2} \Delta_{n-2}^3 & \frac{3}{20} r_{n-1} \Delta_{n-1}^3 \\ & & & & \frac{1}{20} r_{n-1} \Delta_{n-1}^3 \end{bmatrix} \quad (46)$$

$$\mathbf{L}^T = \left[\frac{1}{6} r_0 \Delta_0^2 S_0 + \frac{3}{40} r_0 \Delta_0^3 K_0, 0, \dots, 0 \right] \quad (47)$$

式(43)に式(13)を代入し、定数項を省略すると、式(18)を得る.

最終に J_3 については、式(12)より得られる関係;

$$y(x) = y_N = (\mathbf{H})_N \mathbf{K} + (\mathbf{y}_0)_N \quad (48)$$

を式(10)に代入し、定数項を省略することにより、ただちに式(19)を得る.

3. 2次計画問題と線形相補性問題 $\mathbf{F}$ を非負定行列とすると、

$$J(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{F} \mathbf{u} + \mathbf{E}^T \mathbf{u} \quad (49)$$

なるスカラーを

$$\mathbf{A} \mathbf{u} + \mathbf{b} \geq 0, \mathbf{u} \geq 0 \quad (50)$$

の条件のもとで最小にする $\mathbf{u}$ を求める問題を、凸2次計画問題という (たとえば文献 3) 59 頁参照).

この問題の最適解 $\mathbf{u}$ が満たすべき必要十分条件は次のようになる. すなわちある $\mathbf{v}$ が存在し、

$$\mathbf{F} \mathbf{u} - \mathbf{A}^T \mathbf{v} + \mathbf{E} \geq 0 \quad (51)$$

$$\mathbf{A} \mathbf{u} + \mathbf{b} \geq 0 \quad (52)$$

$$\mathbf{u} \geq 0, \mathbf{v} \geq 0 \quad (53)$$

$$\mathbf{u}^T (\mathbf{F} \mathbf{u} - \mathbf{A}^T \mathbf{v} + \mathbf{E}) = 0 \quad (54)$$

$$\mathbf{v}^T \cdot (\mathbf{A} \mathbf{u} + \mathbf{b}) = 0 \quad (55)$$

が成り立つことである.

式(51)~(55)は

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}, & -\mathbf{A}^T \\ \mathbf{A} & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{q} = \begin{bmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix}, \mathbf{Z} = \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{bmatrix} \quad (56)$$

とおくと、次の条件を満たす $\mathbf{W}, \mathbf{Z}$ を見出す問題に帰せられる:

$$\mathbf{W} = \mathbf{M} \mathbf{Z} + \mathbf{q} \quad (57)$$

$$\mathbf{W} \geq 0, \mathbf{Z} \geq 0 \quad (58)$$

$$\mathbf{W}^T \cdot \mathbf{Z} = 0 \quad (59)$$

これは線形相補性問題と呼ばれる (たとえば文献 3), 61 頁参照).

この問題に対しては、すでに多くの数値解法が開発されている. 具体的な計算手順については、たとえば文献 3), 4) 等を参照されたい.

次に本稿の問題について、 $\mathbf{q}, \mathbf{M}, \mathbf{Z}$ がどのように表わされるか、述べる. 式(11)のところで述べた理由により、以下では最小にすべき評価関数は $J = J_1 + J_2 + J_3$ であるとして定式化する.

式(17), (18), (19)より次式を得る.

$$J = \frac{1}{2} \mathbf{K}^T \hat{\mathbf{Q}} \mathbf{K} + \hat{\mathbf{L}}^T \mathbf{K} \quad (60)$$

ただし

$$\hat{\mathbf{Q}} = \mathbf{H}^T \mathbf{Q} \mathbf{H} + \mathbf{G}^T \mathbf{P} \mathbf{G} + \mathbf{G}^T \mathbf{R} \\ + \mathbf{U} + (\mathbf{H})_N^T (\mathbf{H})_N \quad (61)$$

$$\hat{\mathbf{L}} = (\mathbf{y}_0 - \mathbf{y}_c)^T \mathbf{Q} \mathbf{H} + \mathbf{s}_0^T \left(\mathbf{P} \mathbf{G} + \frac{1}{2} \mathbf{R} \right) \\ + \mathbf{L}^T + \{(\mathbf{y}_0)_N - \mathbf{y}_{sp}\} (\mathbf{H})_N \quad (62)$$

ここで制御入力を正とするため ((50)式参照)

$$\mathbf{u} = \mathbf{K} - \mathbf{K}_{\min} \geq 0 \quad (63)$$

で定義される $\mathbf{u}$ を導入する. このとき, J は次のようになる.

$$J = \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \hat{\mathbf{Q}} \mathbf{u} + \{ \hat{\mathbf{L}}^T + \mathbf{K}_{\min}^T \hat{\mathbf{Q}} \} \mathbf{u} + \text{定数項} \quad (64)$$

一方, (23)式は, $\mathbf{u}$ に関しては,

$$-\mathbf{C}\mathbf{u} + (\mathbf{D} - \mathbf{C}\mathbf{K}_{\min}) \geq 0 \quad (65)$$

と表わされる. ただし, 式(63)より, $\mathbf{K} \geq \mathbf{K}_{\min}$ は自動的に満たされるから, この項を削除すると, 式(65)は次のようになる.

$$-\mathbf{C}^* \mathbf{u} + (\mathbf{D}^* - \mathbf{C}^* \mathbf{K}_{\min}) \geq 0 \quad (66)$$

ただし

$$\begin{aligned} \mathbf{C}^{*T} &= [\mathbf{I}, -\mathbf{H}^T, \mathbf{H}^T, -\mathbf{G}^T, \mathbf{G}^T] \\ \mathbf{D}^{*T} &= [\mathbf{K}_{\max}^T, (\mathbf{y}_0 - \mathbf{y}_c)^T, (\mathbf{y}_{\max} - \mathbf{y}_0)^T, \\ &\quad (\mathbf{S}_0 - \mathbf{S}_{\min})^T, (\mathbf{S}_{\max} - \mathbf{S}_0)^T] \end{aligned} \quad (67)$$

式(64), (66), (63)を式(49), (50)と比較することに

より, 本稿の問題と2次計画問題とは次のように対応する.

$$\mathbf{F} = \hat{\mathbf{Q}} \quad (68)$$

$$\mathbf{E}^T = \hat{\mathbf{L}}^T + \mathbf{K}_{\min}^T \cdot \hat{\mathbf{Q}} \quad (69)$$

$$\mathbf{A} = -\mathbf{C}^* \quad (70)$$

$$\mathbf{b} = \mathbf{D}^* - \mathbf{C}^* \cdot \mathbf{K}_{\min} \quad (71)$$

これを, (56)~(59)式にあてはめると, $\mathbf{M}, \mathbf{q}, \mathbf{Z}$ は次のとおりである.

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{Q}}, & \mathbf{C}^{*T} \\ -\mathbf{C}^*, & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (72)$$

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{L}} + \hat{\mathbf{Q}}^T \cdot \mathbf{K}_{\min} \\ \mathbf{D}^* - \mathbf{C}^* \cdot \mathbf{K}_{\min} \end{bmatrix} \quad (73)$$

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{bmatrix} \quad (74)$$

$\hat{\mathbf{Q}}, \hat{\mathbf{L}}, \mathbf{C}^*, \mathbf{D}^*$ は, それぞれ式(61), (62), (67), (68)で与えられる.

—論 文—

風がある場合の最短時間経路* Minimum-Time Path through Wind Fields

加藤 寛一郎**・中 島 陸 博***

Kanichiro KATO and Takahiro NAKASHIMA

Key words: Stability and control; guidance and control; optimal control; navigation

Abstract

Numerical results are given concerning the minimum-time path through a region of position dependent winds' fields. Five (5) winds' fields are used: three (3) are defined analytically, while the other two (2) are composed from measured weather charts. Optimum paths thus obtained suggest the possibility of fuel saving to some degree when applied to flight across the Pacific Ocean.

1. は し が き

航空燃料費の高騰により, 燃料最小の飛行に大きな関心もたれている. この問題は巡航状態では, 近似的に最短時間の飛行経路を決定する問題に帰せられ

る.

ところで飛行経路は, 風に影響される. とくに長時間飛行する場合には, ジェット・ストリームなどの, 定常大域的な風の変化は飛行時間に大きな影響を与えている. したがって, もし風の地域的分布を正確に知ることができれば, 風を利用して飛行時間を短縮し, 燃料を節約することが期待される.

このような観点から, 本稿は風の場合が与えられたとき, 対気速度一定で飛行する航空機に関し, 最短時間経路を決定する問題を扱い, いくつかの二次元問題について, 数値計算例を示したものである.

風がある場合の最短時間経路について, 基本的な定式化は, すでに文献 1) に示されている. 本稿のおもな目的は, 実際の風の分布を想定した場合, 安定した数値解が, 最急降下法 (steepest descent method) で容易に得られることを示すことにある.

現在気象庁によるジェット・ストリームに関する観

* 昭和57年11月10日, 第20回飛行機シンポジウムにて講演. 昭和58年3月25日原稿受理

** 東京大学工学部

*** 東京大学大学院. 現在: 日本航空(株)