ここで制御入力を正とするため ((50)式参照)

$$\mathbf{u} = \mathbf{K} - \mathbf{K}_{\min} \geq 0 \quad (63)$$

で定義される $\mathbf{u}$ を導入する. このとき, J は次のようになる.

$$J = \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \hat{\mathbf{Q}} \mathbf{u} + \{\hat{\mathbf{L}}^T + \mathbf{K}_{\min}^T \hat{\mathbf{Q}}\} \mathbf{u} + \text{定数項} \quad (64)$$

一方, (23)式は, $\mathbf{u}$ に関しては,

$$-\mathbf{C}\mathbf{u} + (\mathbf{D} - \mathbf{C}\mathbf{K}_{\min}) \geq 0 \quad (65)$$

と表わされる. ただし, 式(63)より, $\mathbf{K} \geq \mathbf{K}_{\min}$ は自動的に満たされるから, この項を削除すると, 式(65)は次のようになる.

$$-\mathbf{C}^* \mathbf{u} + (\mathbf{D}^* - \mathbf{C}^* \mathbf{K}_{\min}) \geq 0 \quad (66)$$

ただし

$$\begin{aligned} \mathbf{C}^{*T} &= [\mathbf{I}, -\mathbf{H}^T, \mathbf{H}^T, -\mathbf{G}^T, \mathbf{G}^T] \\ \mathbf{D}^{*T} &= [\mathbf{K}_{\max}^T, (\mathbf{y}_0 - \mathbf{y}_c)^T, (\mathbf{y}_{\max} - \mathbf{y}_0)^T, \\ &\quad (\mathbf{S}_0 - \mathbf{S}_{\min})^T, (\mathbf{S}_{\max} - \mathbf{S}_0)^T] \end{aligned} \quad (67)$$

式(64), (66), (63)を式(49), (50)と比較することに

より, 本稿の問題と2次計画問題とは次のように対応する.

$$\mathbf{F} = \hat{\mathbf{Q}} \quad (68)$$

$$\mathbf{E}^T = \hat{\mathbf{L}}^T + \mathbf{K}_{\min}^T \cdot \hat{\mathbf{Q}} \quad (69)$$

$$\mathbf{A} = -\mathbf{C}^* \quad (70)$$

$$\mathbf{b} = \mathbf{D}^* - \mathbf{C}^* \cdot \mathbf{K}_{\min} \quad (71)$$

これを, (56)~(59)式にあてはめると, $\mathbf{M}, \mathbf{q}, \mathbf{Z}$ は次のとおりである.

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{Q}}, & \mathbf{C}^{*T} \\ -\mathbf{C}^*, & 0 \end{bmatrix} \quad (72)$$

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{L}} + \hat{\mathbf{Q}}^T \cdot \mathbf{K}_{\min} \\ \mathbf{D}^* - \mathbf{C}^* \cdot \mathbf{K}_{\min} \end{bmatrix} \quad (73)$$

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{bmatrix} \quad (74)$$

$\hat{\mathbf{Q}}, \hat{\mathbf{L}}, \mathbf{C}^*, \mathbf{D}^*$ は, それぞれ式(61), (62), (67), (68)で与えられる.

—論 文—

風がある場合の最短時間経路* Minimum-Time Path through Wind Fields

加藤 寛一郎**・中 島 陸 博***

Kanichiro KATO and Takahiro NAKASHIMA

Key words: Stability and control; guidance and control; optimal control; navigation

Abstract

Numerical results are given concerning the minimum-time path through a region of position dependent winds' fields. Five (5) winds' fields are used: three (3) are defined analytically, while the other two (2) are composed from measured weather charts. Optimum paths thus obtained suggest the possibility of fuel saving to some degree when applied to flight across the Pacific Ocean.

1. は し が き

航空燃料費の高騰により, 燃料最小の飛行に大きな関心もたれている. この問題は巡航状態では, 近似的に最短時間の飛行経路を決定する問題に帰せられ

る.

ところで飛行経路は, 風に影響される. とくに長時間飛行する場合には, ジェット・ストリームなどの, 定常大域的な風の変化は飛行時間に大きな影響を与えている. したがって, もし風の地域的分布を正確に知ることができれば, 風を利用して飛行時間を短縮し, 燃料を節約することが期待される.

このような観点から, 本稿は風の場合が与えられたとき, 対気速度一定で飛行する航空機に関し, 最短時間経路を決定する問題を扱い, いくつかの二次元問題について, 数値計算例を示したものである.

風がある場合の最短時間経路について, 基本的な定式化は, すでに文献 1) に示されている. 本稿のおもな目的は, 実際の風の分布を想定した場合, 安定した数値解が, 最急降下法 (steepest descent method) で容易に得られることを示すことにある.

現在気象庁によるジェット・ストリームに関する観

* 昭和57年11月10日, 第20回飛行機シンポジウムにて講演. 昭和58年3月25日原稿受理

** 東京大学工学部

*** 東京大学大学院. 現在: 日本航空(株)

測・解析は、通常1日2回とのことであるが、今後、気象衛星等を利用すれば、さらに正確な風の分布が、より多い頻度で使用できるようになると期待される。このような情報を飛行経路決定に反映させることができればかなりの燃料節約が可能になると考えられる。

2. 定式化¹⁾と数値計算法

航空機は位置 $\mathbf{r}$ に依存して変化する風場 $\mathbf{w}(\mathbf{r})$ のなかを、一定の対気速度 V で飛行するものとする。 $\mathbf{r}$ を状態量とし、制御入力を機首に固定した単位ベクトル $\hat{\mathbf{u}}$ の方向とすれば、運動方程式は次のように表わされる。

$$\dot{\mathbf{r}} = V\hat{\mathbf{u}} + \mathbf{w}(\mathbf{r}) \quad (1)$$

ただし

$$\hat{\mathbf{u}} \cdot \hat{\mathbf{u}} = 1 \quad (2)$$

であり、 $\mathbf{r}$ の始点 $\mathbf{r}(t_0)$ と終端 $\mathbf{r}(t_f)$ は、ともに指定されているものとする。

最小にすべき評価関数 J は飛行時間で

$$J = \int_{t_0}^{t_f} dt \quad (3)$$

である。adjoint ベクトルを λ で表わし、HAMILTONIAN H を

$$H = \lambda \cdot (V\hat{\mathbf{u}} + \mathbf{w}) + \mu(1 - \hat{\mathbf{u}} \cdot \hat{\mathbf{u}}) + 1 \quad (4)$$

と定義すると、 λ は次の微分方程式の解である。

$$\dot{\lambda} = -(\partial H / \partial \mathbf{r})^T = -\mathbf{r}'(\lambda \cdot \mathbf{w}) \quad (5)$$

λ は終端値 $\lambda(t_f)$ が指定され、それは軌道が $\mathbf{r}(t_f)$ を通る条件から定められる。また未定乗数 μ は式(2)が成立する条件から定められる。式(5)は、ベクトル三重積の公式を適用すれば、次のようになる。

$$\dot{\lambda} = -(\lambda \cdot \mathbf{r}')\mathbf{w} - \lambda \times (\mathbf{r}' \times \mathbf{w}) \quad (6)$$

制御入力に関する最適性の条件は

$$(\partial H / \partial \hat{\mathbf{u}})^T = V\lambda - 2\mu\hat{\mathbf{u}} = 0 \quad (7)$$

である。式(1)、(7)より、 $2\mu = \pm V|\lambda|$ であるが、これを式(7)に代入すると

$$\hat{\mathbf{u}} = \pm \lambda / |\lambda| \quad (8)$$

となる。しかるに、この最短時間問題では、式(4)には時間が陽に現われないから、 $H=0$ が恒等的に成り立っている。これを考慮すると、式(8)は負符号をとることが必要となる。すなわち、最適入力 は次式で与

第1図 二次元問題の記号

えられる。

$$\hat{\mathbf{u}} = -\lambda / |\lambda| \quad (9)$$

結局、この問題は、式(1)、(6)、(9)を連立して解き、その軌道 $\mathbf{r}$ が、 $\mathbf{r}(t_0)$ 、 $\mathbf{r}(t_f)$ を通るように、 $\lambda(t_f)$ (あるいは $\lambda(t_0)$) を決定する問題に帰せられた。

とくに二次元の場合、これは ZERMELO's problem と呼ばれる。第1図のように座標を (x, y) 、風の速度を (u, v) 、 $\hat{\mathbf{u}}$ と x 軸のなる角を θ とすると、式(1)、(6)、(9)は次のようになる。 θ が制御変数である。

$$\dot{x} = V \cos \theta + u(x, y) \quad (10)$$

$$\dot{y} = V \sin \theta + v(x, y) \quad (11)$$

$$\dot{\lambda}_x = -\lambda_x(\partial u / \partial x) - \lambda_y(\partial v / \partial x) \quad (12)$$

$$\dot{\lambda}_y = -\lambda_x(\partial v / \partial y) - \lambda_y(\partial v / \partial y) \quad (13)$$

$$\tan \theta = -\lambda_y / \lambda_x \quad (14)$$

数値計算法は、文献2)に示された最急降下法を用いた。その際、 $x(t_f)=0$ を停止条件とし、 $y(t_f)=0$ を、終端拘束条件とした。

一般的な風のデータを入力するときには、風場を適当な格子状に切り、格子点での風の強さと向きを与え、これを三次元スプラインを用いた de BOOR の方法 (文献3)) で補間して再構成した。その概要を補節に示す。

3. 数値計算結果

計算は5種類の風の分布に対し、二つの機体速度 (100 kts (182.5 km/h) および 500 kts (926.0 km/h)) を組み合わせて行った、計算結果は第2~6図、および第1表に示される。これらの図において、太線は最

第1表 ジェット・ストリームを利用する飛行時間

飛 行	機 体 速 度 (V)	風 の 場	t_f	t_f/t_c	t_f/t_s
東 京→グ ア ム	100(kts) (185.2 km/h)	第5図(a)	10.63(hr)	94(%)	95(%)
東 京→グ ア ム	500(kts) (926.0 km/h)	第5図(b)	2.22	99	100
グ ア ム→東 京	100	第5図(c)	12.38	110	89
グ ア ム→東 京	500	第5図(d)	2.29	102	100
東 京→ニュー・ヨーク	500	第6図(a)	12.4	88	99
ニュー・ヨーク→東 京	500	第6図(b)	16.0	114	97

注) t_f : 最短飛行時間, t_c : 無風時最短飛行時間, t_s : 風がある場合の直線飛行時間

第2図 計算精度のチェック

風速分布

第3図 放物線型の風を横切る最適軌道

短時間径路を示し、その上の矢印が機軸方向を表わしている。時刻の単位は、第2図の左側の場合をのぞくと、すべて時間 (hr) である。各図において、風も矢印で示され、その向きが風向を表わし、またその長さは、風速に比例している。

第2図は、風の強さが、 $v=0$ で、 u が y 方向に直線的に変化する場合である。 $u=-V \cdot (y/h)$ の場合 (V は飛行速度)、解析解に近い解が知られており (文献1, 79~80 頁)、初期位置 $(x/h, y/h)$ が $(3.66, -1.86)$ の場合が第2図の左側に示される。第2図の中央は $h=100$ n. mile (185.2 km), $V=500$ kts (926.0 km/h) とした場合の対応する数値解である。第2図は本稿の数値計算が、よい精度を有することを示すものである。

第3図は、風の強さが、 y 方向に放物線型に変化する場合で、風の分布は両端で最大で、 $|y|=150$ n. mile (277.8 km) で向きが変わるようになっている。図には $V=500$ kts (926.0 km/h) のとき、軌道の始点が $(-500, 75)$ および $(500, 75)$ の二つの場合 (単位: n. mile) について、原点への最短時間軌道が示されている。このような風の分布の場合、飛行が追い風であ

るか、向い風であるかによって、最適軌道は大きく異なってくる。

第4図は渦を横切の場合の例で、渦流の円周速度 ($kt (=5.144 \times 10^{-1} m/s)$) が $5000/\sqrt{x^2+y^2}$ (x, y は n. mile (1852m)) のとき、 $V=100$ kts (185.2 km/h) および 500 kts (926.0 km/h) の二つの場合について、最適軌道を示したものである。初期位置と終端の y 座標は、それぞれ -500 および $+500$ n. mile (926.0 km) であって、 t_f は所要の飛行時間 (hr) である。飛行速度が小さいときのほうが、当然のことながら、軌道は大きく変化する。

第5, 6図は、風速分布を現実の風に近づけた場合の例で、前者は東京・グアム間の飛行を、また後者は、東京・ニューヨーク間の飛行をそれぞれ模擬したものである。いずれの場合も、風のデータは、格子点で入力されている。格子点中央に示される風は、補間によって、再構成されたものである。第5図の風の場合は、1982年5月8日00Z (グリニッチ標準時ゼロ時、日本時間午前9時) のもので、東京付近をジェット・ストリームが通っており、その最大風速は 80 kts (41.16 m/s) である。また第6図の風の場合は、1982年

第4図 渦を横切る最適軌道

第5図 東京・グアム間の飛行の例

1月8日00Zのもので西から東へジェット・ストリームが蛇行しながら流れ、最大風速は140 kts (72.02 m/s) のものである。

数値計算は、東京・グアム間の飛行については、 $V=100$ kts (185.2 km/h)、および 500 kts (926.0 km/h) の2通りが、また東京・ニューヨーク間の飛行については $V=500$ kts (926.0 km/h) の場合がそれぞれ行われた。飛行時間の比較を第1表に示す。ここで t_0 は風がない場合の直線飛行時間を、また t_1 は与えられた風の場合、直線で飛行した場合の所要時間を、それぞれ表わしている。 t_1/t_0 は最短時間経路を飛行した場合

の、時間節約の目安である。

第5図に示した東京・グアム間の飛行の例では、 $V=100$ kts (185.2 km/h) の場合、東京→グアム、グアム→東京で、最適飛行経路は大きく異なり、直線飛行に比べ、5~10%の時間節約となる。ただし $V=500$ kts (926.0 km/h) の飛行では、最適経路もほぼ直線となり、時間短縮はほとんど期待できない。これは使用した風の場合、向い風、追い風の成分が機速に対し、相対的に小さいためである。

第6図に示した東京・ニューヨーク間長距離飛行の例では、 $V=500$ kts (926.0 km/h) でも1~3%の時

(a) 東京→ニューヨーク, $V=500$ kts (926.0 km/h) (b) ニューヨーク→東京, $V=500$ kts (926.0 km/h)

第6図 東京・ニューヨーク間の飛行の例

間節約が可能となる。追い風（東京→ニューヨーク）の場合、最適経路は風の強い部分の中を通る経路となり、向い風（ニューヨーク→東京）の場合には、できるだけ風の強い部分をさける経路となる。そして向い風の場合のほうが、時間節約は大きくなる。

4. おわりに

機速と風速との相対速度が大きいほど、また場所による風の変化が大きいほど、最短時間経路は直線からはずれてくる。ただし、相対速度差が小さくても、長距離を飛行する場合には、かなりの節約が期待できる。

数値計算に使用した最急降下法の収束はいずれの場合もきわめて良好であった。計算機は日立 HITAC M-200H を使用したが、最も時間を要したのは、第6図の東京・ニューヨーク間の飛行の場合で、コンパイルを含む所要時間は48秒（繰返し計算回数6回）であった。この計算は風を補間する点が約500点とられている。第6図に示すように、解として得られる軌道がなめらかなことを考慮すると、計算時間はさらに大幅な短縮が可能である。また将来は軌道計算に機上の計算機を使用することも可能になるのではないかと考えられる。

なお第5, 6図の計算では、緯度、経度は、平面上で直交すると近似されている。本稿で提案する方法を実機に適用するためには、地球を球面として扱い、また運動方程式にコリオリの力の項を含めることなどが必要である。このような拡張は、容易である。

数値計算に使用した気象データは、気象庁お天気相談所より頂戴したものである。ここに深く感謝の意を

表する。

補節 de Boor の方法と風の補間

de Boor の方法は双3次スプラインを用いる2次元データ補間法のひとつで、その詳細はたとえば文献3)の69~74頁に、明確に記述されている。ここでは、その概要と、風の補間方法について述べる。

de Boor の方法は、ある矩形領域 $R: x_0 \leq x \leq x_I; y_0 \leq y \leq y_J$ において、その格子点 (x_i, y_j) , $(i=0, 1, \dots, I; j=0, 1, \dots, J)$ の上での関数値 $f_{ij} = f(x_i, y_j)$, 格子の境界点における法線方向の微分係数, $p_{ij} = f_x(x_i, y_j)$, $(i=0, I; j=0, 1, \dots, J)$ および $q_{ij} = f_y(x_i, y_j)$, $(i=0, 1, \dots, I; j=0, J)$, さらに、領域 R の四つの頂点での $S_{ij} = f_{xy}(x_i, y_j)$, $(i=0, I; j=0, J)$ をデータとして与え、与えられた点 f_{ij} を通り、2次の導関数まで連続となるなめらかな関数 $S(x, y)$ を構成するものである。

上述のデータが与えられると補間スプラインは、領域 $R_{ij}: x_{i-1} \leq x \leq x_i; y_{j-1} \leq y \leq y_j$ において次の双3次多項式で表わされることが示される。

$$c_{ij}(x, y) = \sum_{m,n=0}^3 \gamma_{nm}^{ij} (x-x_{i-1})^m (y-y_{j-1})^n$$

ここでこの式の係数 γ_{nm}^{ij} は、次の行列方程式により与えられる。すなわち、

$$\Gamma_{ij} = A(\Delta x_{i-1}) K_{ij} A(\Delta y_{j-1})^T$$

ただし、

$$\Gamma_{ij} = \begin{bmatrix} \gamma_{00}^{ij} & \gamma_{01}^{ij} & \gamma_{02}^{ij} & \gamma_{03}^{ij} \\ \gamma_{10}^{ij} & \gamma_{11}^{ij} & \gamma_{12}^{ij} & \gamma_{13}^{ij} \\ \gamma_{20}^{ij} & \gamma_{21}^{ij} & \gamma_{22}^{ij} & \gamma_{23}^{ij} \\ \gamma_{30}^{ij} & \gamma_{31}^{ij} & \gamma_{32}^{ij} & \gamma_{33}^{ij} \end{bmatrix}$$

$$\Delta x_{i-1} = x_i - x_{i-1}$$

$$\Delta y_{j-1} = y_j - y_{j-1}$$

$$A(h) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3/h^2 & -2/h & 3/h^2 & -1/h \\ 2/h^3 & 1/h^2 & -2/h^3 & 1/h^2 \end{bmatrix}$$

$$K_{ij} = \begin{bmatrix} f_{i-1,j-1} & q_{i-1,j-1} & f_{i-1,j} & q_{i-1,j} \\ p_{i-1,j-1} & s_{i-1,j-1} & p_{i-1,j} & s_{i-1,j} \\ f_{i,j-1} & q_{i,j-1} & f_{i,j} & q_{i,j} \\ p_{i,j-1} & s_{i,j-1} & p_{i,j} & s_{i,j} \end{bmatrix}$$

である。 f_{ij} , p_{ij} , q_{ij} , s_{ij} は領域 R_{ij} の四つの頂点で与えられる値である。これらのうちで未知なもの $p_{ij} = f_x(x_i, y_j)$, ($i=1, 2, \dots, I-1$; $j=0, 1, \dots, J$), $q_{ij} = f_y(x_i, y_j)$, ($i=0, 1, \dots, I$; $j=1, 2, \dots, J-1$), および $s_{ij} = f_{xy}(x_i, y_j)$, ($i=1, 2, \dots, I-1$; $j=0, J$ および $i=0, 1, \dots, I$; $j=1, 2, \dots, J-1$) は $2I+J-5$ 個の線形系 (全部で $3IJ+I+J-5$ 個の式) により決定される。詳細は文献 3), 72~74 頁を参照されたい。

実際に風を補間する場合には次の手順で行った。

(1) 風のデータは、各格子点で、その大きさと方向のみ入力する。そして、それをその格子点での $u(x_i, y_j)$, $v(x_i, y_j)$ に分解する。これが、風の x 成分, y 成分の f_{ij} である。補間は, $u(x, y)$, $v(x, y)$ のそれぞれについて、独立に行った。

(2) 格子の境界点における法線方向の微分係数 p_{0i} , p_{Ij} , q_{i0} , q_{iJ} は隣接する要素を用いて一次スプライン補間を行い、これに補正係数 ε を乗ずる。本稿の計算では、すべてを $\varepsilon=0.5$ とした。

(3) $s_{ij} = f_{xy}(x_i, y_j)$, ($i=0, I$; $j=0, J$) は、ゼロと仮定した。

(4) 本文中における微係数 $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$ は, $c_{ij}(x, y)$ を x または y で直接微分して得た。すなわち,

$$\frac{\partial c_{ij}(x, y)}{\partial x} = \sum_{m=1, n=0}^3 \gamma_{mn}^i m (x - x_{i-1})^{m-1} (y - y_j)^n$$

$$\frac{\partial c_{ij}(x, y)}{\partial y} = \sum_{m=1, n=0}^3 \gamma_{mn}^i n (x - x_{i-1})^m (y - y_{j-1})^{n-1}$$

である。

参考文献

- 1) BRYSON, A. E., Jr. and Ho, Y.-C.: Applied Optimal Control, John Wiley & Sons, New York (1975), pp. 77-80, 96-97.
- 2) BRYSON, A. E., Jr. and DENHAM, W. F.: A Steepest-Ascent Method for Solving Optimum Programming Problem, J. of Applied Mechanics, Trans. of ASME (June 1962), pp. 247-257.
- 3) 市田浩三, 吉本富士市: スプライン関数とその応用, 教育出版 (1979).