いた感がある。しかしながら、米国を始めとする各国で 30/20 GHz 帯を用いる衛星通信方式を強力に研究しており、日本における技術先導性が失われるおそれがある。このため日本ではさらに高度な技術に目標において強力な研究開発を行う必要がある。

参考文献

- 1) 宮内一洋: 国内衛星通信方式の研究実用化, 通研実報, 第 29 巻, 第 4 号 (1980), pp. 531-539.
- 2) 生島廣三郎, 乙津祐一, 小坂克彦, 宮内一洋, 石田則明, 磯 彰夫: 実験用中容量静止通信衛星 (CS) 実験の成果, 信学誌, 第 65 巻, 第 8 号 (1982), pp. 808-827.

- 3) WATANABE, Y., SAMEJIMA, S., KATO, S. and KOHIYAMA, K.: Demand-Assigned TDMA System for a Digitally Integrated Services Network, Journal of Spacecraft and Rockets, Vol. 18, No. 2 (1981), pp. 133-137.
- 4) 喜田昭一, 遠山秀樹, 熊沢弘之, 坂本 宏: トランスポンダの設計と特性, 通研実報, 第 29 巻, 第 4 号 (1980), pp. 607-625.
- 5) 八坂哲雄, 中川一夫, 上野健治, 熊沢弘之: 搭載用アンテナの設計と特性, 同上, pp. 627-649.
- 6) 坪谷一郎: 衛星搭載用部品の研究実用化, 同上, pp. 541-545.
- 7) 上野健治, 安藤 真, 熊沢弘之: 衛星搭載用マルチビーム・成形ビーム共用アンテナの電気特性, 信学技報, AP-82-65 (1982).

—解 説—

最適構造設計法について*

平 野 陽 一**

Key words: Design; structural analysis; optimum structural design

1. は し が き

構造物の主たる役割は荷重を空間を通じて伝達することにあるが、この構造物自体の重量を軽くすることが軽量化設計である。航空機や飛翔体においては構造を極限まで軽くすることが性能向上の必須条件であるため早くから軽量化設計を心掛けてきたが、現在では他の工学分野でもたんに使用材料の節約という観点からだけでなく性能向上を考えて軽量構造を目指している。しかし、どのようにしたら軽量構造を実現できるかという統一的指針は現時点でも確立していないと考えられる。この指針は最適構造設計法ないしは最小重量設計法と呼ばれるもので、各種各様の方法が提案されている。本稿ではこれらの最適構造設計法について平易に解説してみたい。

著 者 紹 介

平野 陽一 (正会員)

昭和 14 年生。昭和 36 年東京大学工学部航空学科卒業。昭和 41 年同大学院博士課程修了。同年東京大学宇宙航空研究所入所。現在東京大学工学部境界領域研究施設助教授。航空機及び飛翔体の構造力学、最適構造設計、複合材構造力学などの研究に従事。工学博士。日本機械学会、日本複合材料学会、AIAA 各会員。

通常の構造設計は与えられた仕様に対して何回かの試行錯誤を繰り返した後に最終設計を得る。熟達した設計者とは自分自身の経験と過去の事例からこの繰返し数を最小限にとどめることができる人であるともいえよう。これに対し、最適構造設計法は与えられた応力や変位等の制約を満足する最小重量構造を求めるための明確な手順を与えるものであるといえよう。本来、最適構造設計は最小重量設計という言葉より広い意味をもっているが、本稿では最小重量設計ということに重点を絞ることとし、以下では最適構造設計は最小重量設計と同義であるとする。

最適設計の手法は直接最適化法と間接最適化法に大きく分けることができる。直接最適化法においては、構造重量であるところの明確な目的関数があり、この目的関数を与えられた制約条件のもとで構造寸法であるところの設計変数について最小化する。一方、間接最適化法においてはある最適性を与えると考えられる規準があり、この最適性規準 (Optimality Criteria) が満足されるように構造寸法を決定する。このとき最小重量構造が実現されていると考える。各種の破壊様式があるときに、それらが同時に起こるように構造寸法を決めれば最軽量になっているとする同時破壊法 (Simultaneous Mode Design) が間接最適化法の一例である。以下では直接最適化法および間接最適化法について概説するが、比強度や比剛性等による材料選択の問題、構造指数 (Structural Index) による圧縮荷重を受ける各種柱の形状寸法決定法、同時破壊法等の

* 昭和 58 年 5 月 9 日原稿受理 Structural Optimization

** 東京大学工学部境界領域研究施設 Yoichi HIRANO

古典的問題⁶⁾については述べない。

2. 直接最適化の手法

直接最適化法は目的関数の最小値(あるいは最大値)を制約条件を満足する領域(実行可能域)内の設計変数について求める方法である。第1図(a)のように2設計変数(x_1, x_2)について W_1, W_2, W_3 ($W_1 < W_2 < W_3$)のように等重量線が書けたとする。この場合、制約条件が1個で実行可能域が第1図(b)の曲線の上側であるとすると、最適点は黒丸印の点になる。制約条件が多数あると第1図(c)のようになり、この場合の最適点は黒丸印で与えられる。このような問題を数値的に解く方法について以下で述べてみる。

2.1 最適化問題における用語 第2図に示すトラス構造の最小重量設計問題は以下のように書ける。同図で、 P は与えられた荷重、 L および $\sqrt{2}L$ は与えられた部材長、 x_1, x_2, x_3 は1, 2, 3部材のこれから決める断面積を表わす。

設計変数(断面積):

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$$

状態変数(応力):

$$\sigma_i = \sigma_i(\mathbf{x}, L, P); i=1, 2, 3$$

第1図 等重量線と制約条件

第2図 トラス構造

第3図 線形計画問題

目的関数(重量):

$$F(\mathbf{x}) = \gamma L (\sqrt{2} x_1 + x_2 + x_3)$$

制約条件(応力と断面積):

$$\sigma_{all} - \sigma_i \geq 0, \sigma_{all} + \sigma_i \geq 0$$

$$x_i - b_i \geq 0, -x_i + u_i \geq 0$$

上式で、 i は部材番号を示す添字、 γ は部材の比重量、 σ_{all} は許容応力で、 b_i と u_i は設計変数の下限と上限である。一般に最適化問題は上記の記号を使って次のように書ける。

$$\min F(\mathbf{x})$$

$$\text{subject to } g_j(\mathbf{x}) \geq 0 \quad (j=1, 2, \dots, m)$$

$$e_l(\mathbf{x}) = 0 \quad (l=1, 2, \dots, p)$$

ここで、 $g_j(\mathbf{x}) \geq 0$ は不等式制約条件、 $e_l(\mathbf{x}) = 0$ は等式制約条件と呼ばれる。目的関数も制約条件も線形の場合は線形計画問題、少なくともどちらかが非線形の場合は非線形計画問題と呼ばれる。それぞれの解法を線形計画法、非線形計画法という。2変数の場合について両問題を最小値を求めるとして描くと、たとえば第3, 4図のようになる。両図で網目領域が実行可能域で黒丸の点が最適点である。最小重量設計の問題は一般に非線形計画問題であり、線形計画問題は梁、ラーメンの塑性ヒンジを考慮して行う極限設計(limit design)や非線形計画問題の線形化において見られる。線形計画法についてはここで触れないが、第3図に示したように実行可能域の端点に最適点があるとい

第4図 非線形計画問題

第5図 一方向探索

第6図 区間短縮法

う性質を利用してとかれる。

2.2 一方向探索法 本方法は単独で、あるいは非線形計画法の内部に組み込まれて使われる。本方法は第5図に示すように変数空間の矢印方向における関数の最小値を求める方法で、極値が考えている区間に一つしかないという単峰性を前提としている。式で表わすと次のように書ける。

$$F(\mathbf{x}^k + \lambda^k \mathbf{s}^k) = \min_{\lambda} F(\mathbf{x}^k + \lambda \mathbf{s}^k)$$

上式は、 k 回反復時の位置を $\mathbf{x}^k$ として降下方向 $\mathbf{s}^k$ が与えられているときに、 $\mathbf{s}^k$ 方向に最小値を与えるステップ長 λ^k を求めることを表わしている。一方向探索法には最小点が存在する区間をどんどん短縮していく区間短縮法と最小点に近接した点を求めていく多項式近似法とがある。区間短縮法の効率のよいものとして FIBONACCI 数列を使う FIBONACCI 探索法とか黄金分割法 (Golden Section Search) とかがあげられる。区間短縮にあたっては第6図に示すように区間内の2点で関数値の評価が必要であるが、これらの方法はいずれも各反復段階での区間短縮にあたり関数評価を1

点だけですませ、他の1点は前反復段階での関数値を使って効率をよくしている。多項式近似法は2次または3次の多項式による曲線のあてはめを反復して最小値を見いだしていく方法である。

2.3 傾斜法 本方法は多変数の目的関数の最小値を求めるにあたり、目的関数の偏導関数を利用する方法である。いま k 回反復時で $\mathbf{x}^k$ なる点にいるとする。まず、 $\mathbf{x}^k$ からの降下方向 $\mathbf{s}^k$ を決める。ついで、その方向の降下ステップ長 λ^k を求める。次に $\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k + \lambda^k \mathbf{s}^k$ へ降下する。以下収束するまでこの手順を繰り返す。降下方向の定義は次式で与えられる。

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{F(\mathbf{x}^k + \lambda \mathbf{s}^k) - F(\mathbf{x}^k)}{\lambda} = (\mathbf{s}^k)^T \nabla F(\mathbf{x}^k) < 0$$

上式で、 $\nabla F(\mathbf{x}^k) = [\partial F / \partial x_1, \partial F / \partial x_2, \dots, \partial F / \partial x_n]^T$ である。傾斜法には $\mathbf{s}^k$ と λ^k の決定法により種々の方法がある。直観的な方法としては第7図に示すようにいちばん勾配の急な方向に降下してゆく最急降下法 (Steepest Descent Technique) がある。この方法は関数の形によっては非常に効率が悪くなるという欠点がある。他の方法には、目的関数の勾配が零となる $\nabla F(\mathbf{x}) = 0$ なる点を2階導関数よりなるヘッセ行列を計算しながら求める NEWTON 法、2階導関数の計算が大変なのでヘッセ行列を直接計算しないで1階導関数のみで間接的に求める共役傾斜法 (Conjugate Gradient Method) や可変距離法 (Variable Metric Method) がある。最急降下法を除くこれらの方法はいずれも目的関数が考えている領域で2次関数で近似できることを前提としているため、2次関数により精度よく近似できない場合は多くの反復回数を必要とする。

2.4 直接探索法 本方法は導関数の値を計算しないで目的関数の値のみを使って最小値を求める方法である。いちばん単純な方法は第8図で示すように座標軸方向に一方向探索を繰り返す方法であるが、これではあまりにも効率が悪い。そこで、等高線の谷にぶつかったら谷に沿って効率よく進むとするパターン探索法 (HOOKE-JEEVES の方法) や回転方向法 (ROSENBROCK の方法) がある。また第9図に示すように3角形の頂

第7図 最急降下法

第8図 座標軸方向探索

第9図 シンプレックス法

点で関数値を評価して、関数値のいちばん大きい頂点を他の頂点に対して鏡映して3角形を転がしてゆくシンプレックス法 (LP シンプレックス法とは異なる) がある。他に共役方向法 (Conjugate Direction Technique, Powell's Method) という方法もある。

傾斜法と直接探索法には前述のように多数の方法があり、どの方法を選択するかは問題である。導関数の値の計算が比較的簡単ならば傾斜法は効率が良いといえよう。各方法の優劣の比較は意地の悪い関数を使ってなされており、たとえば文献 18), 26) をあげることができる。筆者の周辺の構造関係の研究者は共役方向法、可変距離法、シンプレックス法等を使っている。問題にもよるが、直接最適化の手法で取り扱える構造問題の設計変数の数は 30 位²⁸⁾ のようで、多くて 150²⁷⁾ といわれている。設計変数が非常に多い場合は 3 章で述べる問題最適化の手法で取り扱うほうがよいと考えられる。

2.5 制約条件のある問題 これまで紹介した各方法はいずれも制約条件を考慮していないが、実際の問題においては制約条件のある場合が多い。制約条件のある最適化問題を解く方法には変換法と変換によらない方法とがある。変換法では SUMT (Sequential Unconstrained Minimization Technique, サムト) と呼ばれる方法がよく使われる。本方法は不等式制約条件 $g_i(x) \geq 0$ を目的関数に次式のように組み込んで P なる合成関数を作り、実行可能域から出発した探索

第10図 サムト法 (SUMT)

過程において制約条件を破ろうとすると大きな障壁を課するという方法である。

$$P(x, r_k) = F(x) + r_k \sum_{j=1}^m [g_j(x)]^{-1}$$

上式で、 k は反復回数で、 r_k は $k \rightarrow \infty$ のとき零になる摂動パラメータで、たとえば $r_{k+1} = r_k/c$ ($c > 1$) ととる。 r_k が零に近づくとき原問題の最小値に近づくのだから、 r_1 を初めから小に取ればよいと考えられる。しかし、 r_1 があまりに小さいと制約条件の合成関数に対する影響が小さくなりすぎる。そこで、まず大きな r_1 で合成関数の最小値を求め、ついで r_k の値を順次減少させてゆくのがよい。各反復段階での出発点は前回反復時に得られた最小点を使う。 r_1 のとり方はむずかしいが、 $r_1 \sum_{j=1}^m [g_j(x^0)]^{-1}$ と $F(x^0)$ を同オーダーにとればよいという説もある。いま、 $b \leq x \leq u$ の区間で $y = ax$ の最小値を求める問題を考えると、この問題の合成関数 P は、

$$P = ax + r_k \left(\frac{1}{u-x} + \frac{1}{x-b} \right)$$

と書ける。この合成関数を第 10 図に示す。合成関数 P の最小値は 2.3 節および 2.4 節で述べた方法で求める。一方、変換によらない方法には目的関数と制約条件を現在位置で線形化して線形計画法により解いていく方法や探索中に制約条件にぶつかったら実行可能方向に探索方向を修正する方法 (Method of Feasible Directions) とかがある。

3. 間接最適化の手法

本方法は設計条件に対応するある最適性規準 (Optimality Criteria) を設定し、この規準を満足するように設計変数の値を決めれば最小重量構造が実現しているであろうとする方法である。はしがきで述べた同時破壊法はその一例である。

3.1 全応力設計法 (Fully Stressed Design) 各構造要素が与えられたいくつかの荷重条件のうち少なくとも一つの荷重条件に対して許容応力となるように設計すればよいとする方法である。静定構造について

は反復の必要がないが、不静定構造については反復の必要がある。いま、 k 回反復時の要素 i のいちばん厳しい荷重に対する応力を σ_i^k とすると σ_i^{k+1} は近似的に

$$\sigma_i^{k+1} \approx \sigma_i^k + [\nabla \sigma_i^k]^T (\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k) \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

で与えられる。この σ_i^{k+1} を要素 i の許容応力 σ_i^U になるようにすればよい。したがって、 $\sigma_i^{k+1} = \sigma_i^U$ とおき上の連立方程式を解いて $\mathbf{x}^{k+1}$ を計算できる。上式の特殊な場合として、内力の再配分が起こらないとすると要素 i の応力変化は要素 i の寸法変化のみによることとなり

$$\mathbf{x}_i^{k+1} = \mathbf{x}_i^k (\sigma_i^k / \sigma_i^U)$$

という応力比法 (Stress-Ratio Method) といわれる簡単な関係式が得られる。

全応力設計法は、直観的で簡単なことと効率のよいこともあって比較的良好に使われるが、得られた結果が最小重量構造に対応するという保証は一般にない。しかし、直接最適化法の出発値として使うのには有用である。

3.2 一般反復法¹⁴⁾ 通常の最適化問題は m 個の不等式制約条件 $g_j(\mathbf{x}) \geq 0$ ($j=1, 2, \dots, m$) を含んでいるが、最適点で $g_j(\mathbf{x}) = 0$ となっている有効な制約条件 (Active Constraints) の数は一般に m 以下である。そこで、最適点で有効となっていると考えられる制約条件 $g_r(\mathbf{x})$ ($r \leq m$) をあらかじめ選定し、等式制約条件 $g_r(\mathbf{x}) = 0$ として問題を解けば最適解が得られているであろうとする方法である。この場合、有効な制約条件を満足するというのが最適性規準となっている。このように、不等式制約条件は等式制約条件として扱えることになったので LAGRANGE の乗数法を適用し、反復式を導く。いま、有効な制約条件の数が q 個であるとすると、次のように書ける。

$$\min F(\mathbf{x}) \text{ subject to } g_r(\mathbf{x}) = 0 \quad (r=1, 2, \dots, q)$$

上記問題は未定の乗数 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_q$ を導入して $F + \sum_{r=1}^q \lambda_r g_r$ とおき、 $x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_q$ について極値を求める問題 (LAGRANGE の乗数法) と同等である。したがって、次式を得る。

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} + \sum_{r=1}^q \lambda_r \frac{\partial g_r}{\partial x_i} = 0 \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

$$g_r(\mathbf{x}) = 0 \quad (r=1, 2, \dots, q)$$

$\partial F / \partial x_i \neq 0$ とすると

$$1 = - \sum_{r=1}^q \lambda_r \frac{\partial g_r}{\partial x_i} / \frac{\partial F}{\partial x_i} \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

上式は最適点のみで成立するが、任意の点では一般に成立せず上式の右辺はある値 T_i となっている。

$$T_i = - \sum_{r=1}^q \lambda_r \frac{\partial g_r}{\partial x_i} / \frac{\partial F}{\partial x_i} \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

最適点では

$$T_i = 1$$

であるので、上式の両辺に $(1-\alpha)x_i$ を掛けて

$$(1-\alpha)x_i = T_i(1-\alpha)x_i$$

なる関係を得る。ここで α は緩和係数で、ステップ長を決める係数である。上式より次の反復式を作れる。

$$\mathbf{x}_i^{k+1} = \{\alpha + (1-\alpha)T_i^k\} \mathbf{x}_i^k$$

次に LAGRANGE の乗数 λ_r を決定する。制約条件 $g_r(\mathbf{x})$ を $\mathbf{x}^k$ のまわりで TAYLOR 展開すると

$$g_r^{k+1} \approx g_r^k + \sum_{i=1}^n \frac{\partial g_r}{\partial x_i} (x_i^{k+1} - x_i^k) \quad (r=1, 2, \dots, q)$$

を得る。上の 2 式より、 $\mathbf{x}^{k+1}$ で制約条件が有効となる $g_r^{k+1} = 0$ が成立する条件を導くと次式になる。

$$(1-\alpha) \sum_{i=1}^n \frac{\partial g_r}{\partial x_i} (T_i^k - 1) x_i^k = -g_r^k \quad (r=1, 2, \dots, q)$$

上式に T_i の表示式を代入すると、

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{\partial g_r}{\partial x_i} x_i^k \sum_{i=1}^q \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial x_i} / \frac{\partial F}{\partial x_i} \right\} \\ & = \frac{g_r^k}{1-\alpha} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial g_r}{\partial x_i} x_i^k \quad (r=1, 2, \dots, q) \end{aligned}$$

を得る。上式は λ_i に関する連立方程式であるので、これを解いて λ_i を求めることができる。反復計算の手順は上の諸式を用いて次のようになる。1. 出発点 $\mathbf{x}^0$ と α を与える。2. $\nabla g_r(\mathbf{x}^0)$, $\nabla F(\mathbf{x}^0)$ を計算する。3. λ_i に関する連立方程式を解く。4. T_i の表示式より T_i^0 を求める。5. $\mathbf{x}^{k+1}$ を計算する。6. $\nabla g_r(\mathbf{x}^1)$, $\nabla F(\mathbf{x}^1)$ を計算する。7. ...。ここで α の値の採り方は問題であるが、0.5 か 0.75 とかが使われている¹⁴⁾。本方法の問題点は、有効な制約条件が何であるかを見いだすことであろう。形式的には、 $g_r(\mathbf{x})$ が有効な場合に LAGRANGE の乗数 λ_r が KUHN-TUCKER の条件²⁰⁾により本稿の定義の場合負となることを利用して有効、非有効の選別ができる²⁷⁾といえよう。また、文献 36) も参照されたい。

4. む す び

最適構造設計法について平易に解説をしたつもりであるが、間接最適化法については若干の式を使用して説明した。本来ならば応用例を載せるべきであろうが、種々の理由で載せなかった。興味ある方は参考文献 1)~3), 9), 10), 14) を見ていただきたい。近年、複合材料構造の最適繊維方向の決定にあたり各種の最適化手法が使われている。また、複合材料を使って翼に任意の特性を与えようとする aeroelastic tailoring にも最適化手法が使われている。これらについては文献 29)~35) 等を見ていただきたい。最適化の手法はここで紹介した以外にも多数あるので、必要なら非線形計画法に関する書籍等を参照されたい。本稿で紹介し

た最適構造設計法は有限個の設計変数の問題を対象にしたが、最適構造形状を連続分布する設計変数について求める、つまり空間座標の関数の形で求めようとする方法 (Distributed Parameter Optimal Design)¹²⁾もあることをつけ加えておきたい。

筆者は数理計画法の専門家ではないので、本稿中に筆者の誤解している点がないかと恐れている。また、参考文献は書籍を主体としたが、一般論文に関心のある方は文献15)のリストを参照されたい。本稿が最適構造設計の概念を得るための一助になれば幸いである。終わりに、本稿執筆をお勧めいただいた東京大学砂川恵教授に謝意を表する次第である。

参考文献

I. 最適構造設計に関する単行本

- 1) 長 尚: 構造物の最適設計, 朝倉書店 (1971).
- 2) 田中 尚, 中村雄司: 建築構造物の自動設計と最適設計 (コンピュータによる構造工学講座), 培風館 (1973).
- 3) 日本鋼構造協会編: 最適化手法の構造設計・解析への応用, 培風館 (1980).
- 4) SHANLEY, F.R.: Weight Strength Analysis of Aircraft Structures, McGraw-Hill, New York (1952).
- 5) GERARD, G.: Minimum Weight Analysis of Compression Structures, New York Univ. Press, New York (1956).
- 6) COX, H.L.: The Design of Structures of Least Weight, Pergamon, Oxford (1965).
- 7) SPUNT, L.: Optimum Structural Design, Prentice-Hall, New Jersey (1971).
- 8) HEMP, W.S.: Optimum Structures, Clarendon Press, Oxford (1973).
- 9) GALLAGHER, R.H. and ZIENKIEWICZ, O.C. (ed.): Optimum Structural Design, John Wiley & Sons, London (1973). (川井忠彦, 戸川隼人監訳: 最適構造設計 基礎と応用, 培風館 (1977)).
- 10) MAJID, K.I.: Optimum Design of Structures, Butterworth, London (1974).
- 11) SPILLERS, W.R.: Iterative Structural Design, North-Holland, Amsterdam (1975).
- 12) HAUG, E.J. and ARORA, J.S.: Applied Optimal Design, John Wiley & Sons, New York (1979).
- 13) IYENGAR, N.G.R. and GUPTA, S.K.: Programming Methods in Structural Design, Edward Arnold, London (1980).
- 14) KIRSCH, U.: Optimum Structural Design, McGraw-Hill, New York (1981).
- 15) LEV, O.E. (ed.): Structural Optimization (Recent Developments and Applications), American Society of Civil Engineering, New York (1981).

II. 非線形計画法に関する単行本

- 16) 今野 浩, 山下 浩: 非線形計画法, 日科技連 (1978).
- 17) WILDE, D.J.: Optimum Seeking Methods, Prentice-Hall, New Jersey (1964).
- 18) KOWALIK, J. and OSBORNE, M.R.: Methods for Unconstrained Optimization Problems, Elsevier, New York (1968) (山本善之, 小山健夫訳: 非線形最

適化問題, 培風館 (1971)).

- 19) FOX, R.L.: Optimization Methods for Engineering Design, Addison-Wesley, Massachusetts (1971).
 - 20) JACOBY, S.L.S., KOWALIK, J.S. and PIZZO, J.T.: Iterative Methods for Nonlinear Optimization Problems, Prentice-Hall, New Jersey (1972).
 - 21) DIXON, L.C.W.: Nonlinear Optimization, The English Univ. Press, London (1972) (松原正一訳: 非線形最適化計算法, 培風館 (1974)).
 - 22) MURRAY, W. (ed.): Numerical Methods for Unconstrained Optimization, Academic Press, London (1972).
 - 23) KUESTER, J.L. and MIZE, J.H.: Optimization Technique with FORTRAN, McGraw-Hill, New York (1973).
 - 24) FLETCHER, R.: Practical Methods of Optimization, Vol. 1 (Unconstrained Optimization), John Wiley & Sons, Chichester (1980).
 - 25) FLETCHER, R.: Practical Methods of Optimization Vol. 2 (Constrained Optimization), John Wiley & Sons, Chichester (1981).
- #### III. 論文
- 26) BOX, M.J.: A Comparison of Several Current Optimization Methods, and the Use of Transformations in Constrained Problems, Computer J., Vol. 9, No. 1 (1966), pp. 67-77.
 - 27) KUSALAS, J.: Minimum Weight Design of Structures via Optimality Criteria, NASA TN D-7115 (1972).
 - 28) HAFKA, R.T. and STARNES, J.H.: WIDOWAC (wing design optimization with aeroelastic constraints): Program Manual, NASA TM X-3071 (1974).
 - 29) KHOT, N.S., VENKATYIA, V.B., JOHNSON, C.D. and TISCHLER, V.A.: Optimization of Fiber Reinforced Composite Structures, Int. J. Solids & Structures, Vol. 9, No. 10 (1973), pp. 1225-1236.
 - 30) SCHMIT, L.A. and FARSHI, B.: Optimum Design of Laminated Fibre Composite Plates, Int. J. Num. Meth. Engng., Vol. 11, No. 4 (1977), pp. 623-640.
 - 31) HIRANO, Y.: Optimum Design of Laminated Plates under Axial Compression, AIAA J., Vol. 17, No. 9 (1979), pp. 1017-1019.
 - 32) HIRANO, Y.: Optimum Design of Laminated Plates under Shear, J. Composite Materials, Vol. 13 (1979), pp. 329-334.
 - 33) ISAKON, G., PARDO, H. and LERNER, E.: ASOP-3: A Program for Optimum Structural Design to Satisfy Strength and Deflection Constraints, J. Aircraft, Vol. 15, No. 7 (1978), pp. 422-428.
 - 34) LERNER, E. and MARDOWITZ, J.: An Efficient Structural Resizing Procedure for Meeting Static Aeroelastic Design Objectives, J. Aircraft, Vol. 16, No. 2 (1979), pp. 65-71.
 - 35) SHERRER, V.C., HERTZ, T.J. and SHIRK, M.H.: Wind Tunnel Demonstration of Aeroelastic Tailoring Applied to Forward Swept Wings, J. Aircraft, Vol. 18, No. 11 (1981), pp. 976-983.
 - 36) KAHN, M.R., WILLMERT, K.D. and THORNTON, W.A.: An Optimality Criterion Method for Large-Scale Structures, AIAA J., Vol. 17, No. 7 (1979), pp. 753-761.