論 文 CONTRIBUTED PAPERS

CFRP 円筒殻の圧縮座屈

I. 理論解析と実験*

Compressive Buckling of CFRP Circular Cylindrical Shells

Part I. Theoretical Analysis and Experiment

小林 繁夫**・世古 博己***

Shigeo KOBAYASHI, Hiromi SEKO

小山 一夫**

and Kazuo KOYAMA

Key words: Structural analysis; composite materials; circular cylindrical shell; buckling load; prebuckling deformation

Abstract

Theoretical analysis is attempted for the effect of axisymmetrical prebuckling deformation on the compressive buckling load of anisotropic circular cylindrical shells. Compressive buckling tests of two types of filament-wound graphite-epoxy cylindrical shells and four types of laminated ones were carried out. The stacking sequences of four types of lamination are $[20^\circ, -20^\circ, 90^\circ]$, $[0^\circ, 45^\circ, -45^\circ, 90^\circ]$, $[30^\circ, -30^\circ, -30^\circ, 30^\circ, 90^\circ, 90^\circ]$ and $[0^\circ, 60^\circ, -60^\circ, -60^\circ, 60^\circ, 0^\circ]$, and those of two types of filament winding are $[\pm 20^\circ, 90^\circ]$ and $[90^\circ, \pm 20^\circ]$ where the top is inside, respectively. The calculated buckling loads of these test cylinders have disclosed the property that the prebuckling deformation raises the buckling load except for the No. 3 test cylinder of which buckling mode in the linear theory is axisymmetrical. This property is contrary to the one known for isotropic cylinders. Some analytical studies are carried out for this reason. For laminated cylinders, a good agreement is observed between theoretical and experimental buckling loads. In the case of filament wound and 3- and 4-layer cylinders, after the end-shortening was removed, they returned to a perfect cylinder, as the buckling deformation was almost elastic. The buckling load of the filament-wound cylinder is lower than that of the laminated one with the same

fiber direction.

1. 緒 言

人工衛星の構造体やロケットの機体の一部に、軽量化のため CFRP 円筒殻が使われるようになっている。最高荷重は“圧縮+曲げ”による圧縮荷重である。しかし CFRP 円筒殻の圧縮座屈について精密な実験を行って理論値と比較した研究はきわめて少ない¹⁾。本論文では積層数の多くない CFRP 円筒殻についての圧縮座屈実験と、座屈荷重に対する座屈前変形の影響についての理論解析を述べる。

境界条件が固定の等方性円筒殻の場合、軸圧縮によりポアソン比の影響で生ずる半径方向変位が端末で拘束されることによって生ずる座屈前の軸対称変形は、座屈荷重を古典理論値より低下させることはよく知られており、実験値が古典理論値よりもかなり低下する原因の一つと考えられている。この性質は ALMROTH²⁾などによって指摘されたが、著者の一人小林も長さの影響を取り除き一端だけを拘束した半無限長円筒の場合の座屈荷重が 92.7% に低下すること^{3), 4)}を示した。さらに直交異方性円筒殻について解析理論を示し、その当時の材料として繊維体積含有率 V_f が小さいガラス・ポリエステル複合材を念頭においた数値例について計算し、格子縞変形座屈荷重の方が低いクロスプライと軸対称変形座屈荷重の方が低いアングルプライそれぞれについて、異方性の度合いが大きくなると座屈荷重の古典理論値からの低下量が小さくなることを明らかにした⁵⁾。最近 JONES⁶⁾ がクロスプライ積層円筒殻について座屈前変形の影響の計算例を示している。

* 3.1 節および付録は昭和 56 年 7 月 16 日第 23 回構造強度に関する講演会で、それ以外は昭和 57 年 7 月 15 日第 24 回構造強度に関する講演会で発表。昭和 58 年 4 月 13 日原稿受理

** 東京大学工学部航空学科

*** 三菱電機株式会社鎌倉製作所

第1図 円筒殻，座標と記号

2. 座屈前変形を考慮した理論解析

2.1 基礎方程式 各層の x, y 座標 (第1図参照) に関する弾性係数を E_{xx} などと記して応力歪関係は

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{xx} & E_{xy} & E_{xz} \\ E_{xy} & E_{yy} & E_{yz} \\ E_{xz} & E_{yz} & E_{zz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (1)$$

と表わされる。Donnell 型の近似をした有限変形理論を用いることにすると，幾何学的中央面を $z=0$ 面にとって，歪の変位表示式は

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x = \varepsilon_{x0} + z\kappa_x \\ \varepsilon_y = \varepsilon_{y0} + z\kappa_y \\ \gamma_{xy} = \gamma_{xy0} + z\kappa_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2)$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{x0} = u_{0,x} + (w_{,x})^2/2 \\ \varepsilon_{y0} = v_{0,y} + w/R + (w_{,y})^2/2 \\ \gamma_{xy0} = u_{0,y} + v_{0,x} + w_{,x}w_{,y} \end{Bmatrix} \quad (3)$$

$$\kappa_x = -w_{,xx}, \kappa_y = -w_{,yy}, \kappa_{xy} = -2w_{,xy} \quad (4)$$

ここで $w_{,x} = \partial w / \partial x$ などのように，以下， $\cdot$ 変数はその変数による微分を表わすものとする。合応力の表示式は

$$\left. \begin{aligned} N_x &= \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_x dz, & N_y &= \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_y dz \\ N_{xy} &= N_{yx} = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{xy} dz \\ M_x &= \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_x z dz, & M_y &= \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_y z dz \\ M_{xy} &= M_{yx} = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{xy} z dz \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

である。(2)式を(1)式に代入して(5)式により合応力を計算すると

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{xx} & A_{xy} & A_{xz} & B_{xx} & B_{xy} & B_{xz} \\ A_{xy} & A_{yy} & A_{yz} & B_{xy} & B_{yy} & B_{yz} \\ A_{xz} & A_{yz} & A_{zz} & B_{xz} & B_{yz} & B_{zz} \\ B_{xx} & B_{xy} & B_{xz} & D_{xx} & D_{xy} & D_{xz} \\ B_{xy} & B_{yy} & B_{yz} & D_{xy} & D_{yy} & D_{yz} \\ B_{xz} & B_{yz} & B_{zz} & D_{xz} & D_{yz} & D_{zz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{x0} \\ \varepsilon_{y0} \\ \gamma_{xy0} \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \quad (6)$$

が導かれる。ここで

$$\begin{aligned} [A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}] \\ = \sum_{m=1}^N \int_{z_{m-1}}^{z_m} [1, z, z^2] E_{ij}^{(m)} dz \quad (i, j \text{ は } x, y, z) \end{aligned} \quad (7)$$

である。下傍線を付けた項は，小林の前論文の直交異方性円筒殻⁵⁾および JONES のクロスプライ円筒殻⁶⁾では0であったが，本論文の実験円筒殻では一般に0ではない。本論文の解析方法は本質的には小林の前論文⁴⁾と同じであるが，アングラプライを含む層数の少ない積層円筒殻では下傍線項が0でないため，解析は以下に示すように少し複雑になり，新しい対応が必要となる。

x, y, z 方向の平衡方程式は

$$\begin{cases} N_{x,x} + N_{xy,y} = 0 \\ N_{xy,x} + N_{y,y} = 0 \end{cases} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} M_{x,xx} + 2M_{xy,xy} + M_{y,yy} - N_y/R \\ + N_x w_{,xx} + 2N_{xy} w_{,xy} + N_y w_{,yy} = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

である。(8)式をみたすよう応力関数

$$N_x = F_{,yy}, N_y = F_{,xx}, N_{xy} = -F_{,xy} \quad (10)$$

が導かれる。(6)式の N_x などには(10)式を， κ_x などには(4)式を代入した(6)式の上半分に $[A]^{-1}$ を左から掛けて

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{x0} \\ \varepsilon_{y0} \\ \gamma_{xy0} \end{Bmatrix} = [a] \begin{Bmatrix} F_{,yy} \\ F_{,xx} \\ -F_{,xy} \end{Bmatrix} + [b] \begin{Bmatrix} w_{,xx} \\ w_{,yy} \\ 2w_{,xy} \end{Bmatrix} \quad (11)$$

ここで，

$$[a] = [A]^{-1}, [b] = [A]^{-1}[B] \quad (12)$$

が得られる。(3)式より u_0, v_0 を消去して導かれる適合条件式の ε_{x0} などに(11)式を代入して適合条件式は

$$\begin{aligned} [a_{22}F_{,xxxx} - 2a_{23}F_{,xxxy} \\ + (2a_{12} + a_{33})F_{,xxyy} - 2a_{13}F_{,xyyy} + a_{11}F_{,yyyy}] \\ + [b_{21}w_{,xxxx} + (2b_{23} - b_{31})w_{,xxxy} \\ + (b_{11} + b_{22} - 2b_{33})w_{,xxyy} \\ + (2b_{13} - b_{32})w_{,xyyy} + b_{12}w_{,yyyy}] \\ = w_{,xx}/R + (w_{,xy})^2 - w_{,xx}w_{,yy} \end{aligned} \quad (13)$$

と表わすことができる。ここで a_{ij}, b_{ij} はそれぞれ行列 $[a], [b]$ の要素を表わす。

(6)式の下半分の式の $[\varepsilon_{x0}, \varepsilon_{y0}, \gamma_{xy0}]^T$ に(11)式を代入して

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = [c] \begin{Bmatrix} F_{,yy} \\ F_{,xx} \\ -F_{,xy} \end{Bmatrix} - [d] \begin{Bmatrix} w_{,xx} \\ w_{,yy} \\ 2w_{,xy} \end{Bmatrix} \quad (14)$$

ここで，

$$[c] = [B][a] = [b]^T, [d] = [D] - [B][b] \quad (15)$$

が導かれるから，平衡方程式(9)式は， M_x などに(14)式を， N_x などに(10)式を代入して

$$\begin{aligned}
& [b_{21}F_{,zzzz} + (2b_{23} - b_{31})F_{,zzzv} \\
& + (b_{11} + b_{22} - 2b_{33})F_{,zzvv} \\
& + (2b_{13} - b_{32})F_{,zvvv} + b_{12}F_{,vvvv}] \\
& - [d_{11}w_{,zzzz} + 4d_{13}w_{,zzzv} \\
& + 2(d_{12} + 2d_{33})w_{,zzvv} + 4d_{23}w_{,zvvv} \\
& + d_{22}w_{,vvvv}] - F_{,zz}/R \\
& + F_{,vv}w_{,zz} + F_{,zz}w_{,vv} - 2F_{,zv}w_{,zv} = 0 \quad (16)
\end{aligned}$$

と書かれる。

2.2 座屈前変形 この異方性円筒殻の座屈前変形は、次の性質をもつものと考え。円筒形であるから、(i)生ずる変位 u_0, v_0, w は y に無関係である。すなわち

$$u_{0,y} = v_{0,y} = w_{,y} = 0 \quad (17)$$

一般に $v_0 \neq 0$ である。(ii)荷重辺では N_z, N_{zv} は y に無関係に一樣分布であり、かつ全体として振りモーメントの作用はないから $\int_0^{2\pi R} N_{zv} dy = 0$ である。

したがって荷重辺で $N_{zv} = 0$ である。さらに平衡方程式(8.1)を考慮して、任意の x で

$$N_z = -N_0 \quad (x, y \text{ に無関係な定数}), \quad N_{zv} = 0 \quad (18)$$

であると結論される。

座屈前変形には添字Aを付けて表わすと、(18)式を考慮して座屈前変形の応力関数は、

$$F_A = -N_0 y^2/2 + f_A(x) \quad (19)$$

と表わされる。(3)式に(11), (17), (19)式を代入して導かれる式を(20)式と記す。そのうち(3.2)式から導かれる式のみを記すと

$$w_A/R = -a_{12}N_0 + a_{22}f_{A,zz} + b_{21}w_{A,zz} \quad (20.2)$$

(16)式に(17), (19)式を代入して導かれる平衡方程式は

$$\begin{aligned}
& -d_{11}w_{A,zzzz} + b_{21}f_{A,zzzz} \\
& -f_{A,zz}/R - N_0 w_{A,zz} = 0 \quad (21)
\end{aligned}$$

適合条件式(13)式に(17), (19)式を代入したものは、(20.2)式を x で2回微分したものであるから、適合条件式として(20.2)式を用いる。(21)式の f_A には(20.2)式を代入して導かれる w_A の方程式は

$$\begin{aligned}
W_A &= \frac{w_A}{t}, \quad \xi = \frac{x}{\sqrt{Rt}} \\
\alpha &= N_0 \frac{R}{t} a_{22}, \quad [\bar{b}] = \frac{1}{t} [b] \\
[\bar{d}] &= \frac{a_{22}}{t^2} [d], \quad \bar{a}_{ij} = \frac{a_{ij}}{a_{22}} \quad (22)
\end{aligned}$$

なる無次元記号を用いて

$$\begin{aligned}
& (\bar{d}_{11} + (\bar{d}_{21})^2)W_{A,\xi\xi\xi\xi} + (\alpha - 2\bar{b}_{21})W_{A,\xi\xi} + W_A \\
& = -\bar{a}_{12}\alpha \quad (23)
\end{aligned}$$

と表わされる。定数係数の常微分方程式なので、文献3)に示したように、固定の境界条件 ($W_A = W_{A,\xi} = 0$)

に対する(23)式の解を解析的に求めることができる。

2.3 分岐座屈の基礎方程式 座屈荷重は座屈前変形からの分岐点として以下のように固有値問題として求められる。変位および応力関数を

$$\begin{aligned}
w &= w_A + w_B, \quad u_0 = u_{0A} + u_B \\
v_0 &= v_{0B} + v_B, \quad F = F_A + F_B \quad (24)
\end{aligned}$$

と表わす。添字Bを付けた量は微小擾乱である。(24)式を(16), (13), (3) (11)式を考慮)式に代入し、それぞれ(21), (20)式が成り立つことを考慮し、微小量について高次の項を省略して、 w_B, u_B, v_B, F_B についての線形の平衡方程式、適合条件式および $u_{B,z}, v_{B,y}, u_{B,y} + v_{B,z}$ の表示式が得られる。荷重端で固定の境界条件は、

$$w_B = 0, \quad w_{B,z} = 0, \quad u_B = 0, \quad v_B = 0 \quad (25)$$

となる。

(6)式の下傍線項があると、上記線形の平衡方程式および適合条件式で、 $y = R\theta$ について奇数回微分の項の係数は0とならないから、これらの式の解は $\sin n\theta, \cos n\theta$ の両方を含む次のようなFOURIER級数で表わさなければならない。

$$\begin{aligned}
w_B/t &= \sum_{n=2}^{\infty} (w_{1n}(\xi) \sin n\theta + w_{2n}(\xi) \cos n\theta) \\
u_B/t &= \sum_{n=2}^{\infty} (u_{1n}(\xi) \sin n\theta + u_{2n}(\xi) \cos n\theta) \\
v_B/t &= \sum_{n=2}^{\infty} (v_{1n}(\xi) \sin n\theta + v_{2n}(\xi) \cos n\theta) \\
F_B/(t^2/a_{22}) &= \sum_{n=2}^{\infty} (f_{1n}(\xi) \sin n\theta + f_{2n}(\xi) \cos n\theta) \quad (26)
\end{aligned}$$

そこで(26)式を上述の線形方程式に代入し、各 $\sin n\theta, \cos n\theta$ の係数を0とおくことにより、平衡方程式は

$$\begin{aligned}
& [\bar{b}_{21}f_{1n,\xi\xi\xi\xi} - (2\bar{b}_{23} - \bar{b}_{31})\beta f_{2n,\xi\xi\xi} \\
& - (\bar{b}_{11} + \bar{b}_{22} - 2\bar{b}_{33})\beta^2 f_{1n,\xi\xi} \\
& + (2\bar{b}_{13} - \bar{b}_{32})\beta^3 f_{2n,\xi} + \bar{b}_{12}\beta^4 f_{1n}] \\
& - [\bar{d}_{11}w_{1n,\xi\xi\xi\xi} - 4\bar{d}_{13}\beta w_{2n,\xi\xi\xi} \\
& + 2(\bar{d}_{12} + 2\bar{d}_{33})\beta^2 w_{1n,\xi\xi} \\
& + 4\bar{d}_{23}\beta^3 w_{2n,\xi} + \bar{d}_{22}\beta^4 w_{1n}] - f_{1n,\xi\xi} \\
& - W_{A,\xi\xi}\beta^2 f_{1n} - \alpha w_{1n,\xi\xi} \\
& - \beta^2(W_A + \bar{a}_{21}\alpha - \bar{b}_{21}W_{A,\xi\xi})w_{1n} = 0 \quad (27.1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& [\bar{b}_{21}f_{2n,\xi\xi\xi\xi} + (2\bar{b}_{23} - \bar{b}_{31})\beta f_{1n,\xi\xi\xi} \\
& - (\bar{b}_{11} + \bar{b}_{22} - 2\bar{b}_{33})\beta^2 f_{2n,\xi\xi} \\
& - (2\bar{b}_{13} - \bar{b}_{32})\beta^3 f_{1n,\xi} + \bar{b}_{12}\beta^4 f_{2n}] \\
& - [\bar{d}_{11}w_{2n,\xi\xi\xi\xi} + 4\bar{d}_{13}\beta w_{1n,\xi\xi\xi} \\
& + 2(\bar{d}_{12} + 2\bar{d}_{33})\beta^2 w_{2n,\xi\xi} \\
& - 4\bar{d}_{23}\beta^3 w_{1n,\xi} + \bar{d}_{22}\beta^4 w_{2n}] - f_{2n,\xi\xi} \\
& - W_{A,\xi\xi}\beta^2 f_{2n} - \alpha w_{2n,\xi\xi} \\
& - \beta^2(W_A + \bar{a}_{12}\alpha - \bar{b}_{21}W_{A,\xi\xi})w_{2n} = 0 \quad (27.2)
\end{aligned}$$

適合条件式は

$$\begin{aligned}
& [f_{in, \text{EEEE}} + 2\bar{a}_{23}\beta f_{cn, \text{EEE}} \\
& - (2\bar{a}_{12} + \bar{a}_{33})\beta^2 f_{in, \text{EE}} - 2\bar{a}_{13}\beta^3 f_{cn, \text{E}} + \bar{a}_{11}\beta^4 f_{in}] \\
& + [\bar{b}_{21}w_{in, \text{EEEE}} - (2\bar{b}_{23} - \bar{b}_{31})\beta w_{cn, \text{EEE}} \\
& - (\bar{b}_{11} + \bar{b}_{22} - 2\bar{b}_{33})\beta^2 w_{in, \text{EE}} \\
& + (2\bar{b}_{13} - \bar{b}_{32})\beta^3 w_{cn, \text{E}} + \bar{b}_{12}\beta^4 w_{in}] \\
& = w_{in, \text{EE}} + W_{A, \text{EE}}\beta^2 w_{in} \quad (28.1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& [f_{cn, \text{EEEE}} - 2\bar{a}_{23}\beta f_{in, \text{EEE}} - (2\bar{a}_{12} + \bar{a}_{33})\beta^2 f_{cn, \text{EE}} \\
& + 2\bar{a}_{13}\beta^3 f_{in, \text{E}} + \bar{a}_{11}\beta^4 f_{cn}] \\
& + [\bar{b}_{21}w_{cn, \text{EEEE}} + (2\bar{b}_{23} - \bar{b}_{31})\beta w_{in, \text{EEE}} \\
& - (\bar{b}_{11} + \bar{b}_{22} - 2\bar{b}_{33})\beta^2 w_{cn, \text{EE}} \\
& - (2\bar{b}_{13} - \bar{b}_{32})\beta^3 w_{in, \text{E}} + \bar{b}_{12}\beta^4 w_{cn}] \\
& = w_{cn, \text{EE}} + W_{A, \text{EE}}\beta^2 w_{cn} \quad (28.2)
\end{aligned}$$

となることが求められる。ここで

$$\beta = n\sqrt{i/R} \quad (29)$$

である。なお(22)式の無次元化記号を用いている。

変位を(26)式のように表わした場合、完全固定の境界条件(25)式は、各 n について

$$\left. \begin{aligned} w_{in} = w_{cn} = 0, \quad w_{in, \text{E}} = w_{cn, \text{E}} = 0 \\ u_{in} = u_{cn} = 0, \quad v_{in} = v_{cn} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

となる。 $v_{in} = v_{cn} = 0$ の条件は、(26)式を先に(3)式から導いた $v_{B, y}$ の表示式に代入して $w_{in} = w_{cn} = w_{in, \text{E}} = w_{cn, \text{E}} = 0$ の条件をも用い、かつ $\cos n\theta$, $\sin n\theta$ の係数を 0 とおくことにより

$$f_{in, \text{EE}} + \bar{a}_{23}f_{cn, \text{E}} - \bar{a}_{12}\beta^2 f_{in} + \bar{b}_{21}w_{in, \text{EE}} = 0 \quad (31.1)$$

$$f_{cn, \text{EE}} - \bar{a}_{23}f_{in, \text{E}} - \bar{a}_{12}\beta^2 f_{cn} + \bar{b}_{21}w_{cn, \text{EE}} = 0 \quad (31.2)$$

が得られる。すなわち f_{in} , f_{cn} , w_{in} , w_{cn} だけで表わすことができる。同様に、 $u_{in} = u_{cn} = 0$ の条件は、先に(3)式から導いた $v_{B, y}$ と $u_{B, y} + v_{B, x}$ の式から $(u_{B, y} + v_{B, x})_y - (v_{B, y})_x = u_{B, yy}$ を求め、この式に(26)式を代入して $w_{in} = w_{cn} = w_{in, \text{E}} = w_{cn, \text{E}} = 0$ の条件をも用い、かつ $\cos n\theta$, $\sin n\theta$ の係数を 0 とおいて

$$\begin{aligned}
& f_{in, \text{EEE}} + 2\bar{a}_{23}\beta f_{cn, \text{EE}} \\
& - (\bar{a}_{12} + \bar{a}_{33})\beta^2 f_{in, \text{E}} - \bar{a}_{13}\beta^3 f_{cn} + \bar{b}_{21}w_{in, \text{EEE}} \\
& + (\bar{b}_{31} - 2\bar{b}_{23})\beta w_{cn, \text{EE}} = 0 \quad (32.1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& f_{cn, \text{EEE}} - 2\bar{a}_{23}\beta f_{in, \text{EE}} \\
& - (\bar{a}_{12} + \bar{a}_{33})\beta^2 f_{cn, \text{E}} + \bar{a}_{13}\beta^3 f_{in} \\
& + \bar{b}_{21}w_{cn, \text{EEE}} - (\bar{b}_{31} - 2\bar{b}_{23})\beta w_{in, \text{EE}} = 0 \quad (32.2)
\end{aligned}$$

と表わされる。

2.4 差分方程式による固有値計算 この問題は小林の前論文³⁾と同様差分表示式を用いて解く。第2図に示すように両端の間を m 等分して $\xi = \Delta\xi \times j$ と表わす。中央差分表示式

$$(G, \xi)_j = (G_{j+1} - G_{j-1}) / (2\Delta\xi)$$

第2図 等間隔分割

$$\begin{aligned}
(G, \xi)_j &= (G_{j+1} - G_{j-1}) / (\Delta\xi)^2 \\
(G, \xi\xi)_j &= (G_{j+2} - 2G_{j+1} + 2G_{j-1} - G_{j-2}) / \{2(\Delta\xi)^3\} \\
(G, \xi\xi\xi)_j &= (G_{j+3} - 4G_{j+1} + 6G_j \\
&\quad - 4G_{j-1} + G_{j-3}) / (\Delta\xi)^4 \quad (33)
\end{aligned}$$

を用いる。そのため両端の点 0, m から領域外に -1 , -2 , および $m+1$, $m+2$ 点を設ける。各 j 点の w_{in} などを一つの関数記号で

$$\begin{aligned}
w_{in} &= q_{4j}, \quad w_{cn} = q_{4j+1} \\
f_{in} &= q_{4j+2}, \quad f_{cn} = q_{4j+3} \quad (34)
\end{aligned}$$

と表わす。 $j=0 \sim m$ 点で平衡方程式(27.1), (27.2), 適合条件式(28.1), (28.2)の四つの式を差分表示で書くと $4(m+1)$ 個の式が作られる。一方 0, m 点でそれぞれ境界条件式(30.1)~(30.4), (31.1), (31.2), (32.1), (32.2)が差分表示で書かれ 8×2 個の式が作られる。各点の未知量は四つで全未知量は $q=8$ から q_{4m+11} まで $4(m+5) = 4m+20$ 個、方程式の数も $4(m+1) + 8 \times 2 = 4m+20$ で一致し、この方程式は

$$\begin{bmatrix} \ddots & & & \\ & C & & \\ & & \ddots & \\ & & & \ddots \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_{-8} \\ \vdots \\ q_{4m+11} \end{Bmatrix} = 0 \quad (35)$$

の形で書かれる。したがって

$$|C| = 0 \quad (36)$$

が分岐座屈荷重を求める方程式である。

ところで、(26)式で $\sin n\theta$, $\cos n\theta$ 両方の項を用いている関係から、 f_{in} と f_{cn} の係数、 w_{in} と w_{cn} の係数の間に単純な関係があるため、行列式 C の各要素には

$$|C| = \begin{vmatrix} k_{11} & s_{11} & k_{12} & s_{12} & \cdots \\ -s_{11} & k_{11} & -s_{12} & k_{12} & \cdots \\ k_{21} & s_{21} & k_{22} & s_{22} & \cdots \\ -s_{21} & k_{21} & -s_{22} & k_{22} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix} \quad (37)$$

の関係が成り立つ。もちろんある領域では $k_{ij} = s_{ij} = 0$ となることを含めて成り立つ要素間の関係である。そこで各行、各列の順序を入れかえて

$$\begin{aligned}
|C| &= \begin{vmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & s_{11} & s_{12} & \cdots \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & s_{21} & s_{22} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots \\ -s_{11} & -s_{12} & \cdots & k_{11} & k_{12} & \cdots \\ -s_{21} & -s_{22} & \cdots & k_{21} & k_{22} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} K & S \\ -S & K \end{vmatrix} \quad (38)
\end{aligned}$$

が導かれることは容易にわかる。まず下の行に $(-i)$ を掛けて上の行に加え、次に左の列に i を掛けて右の列に加えることにより

$$|C| = \begin{vmatrix} K+iS & -iK+S \\ -S & K \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} K+iS & 0 \\ -S & K-iS \end{vmatrix}$$

$$= |K+iS| |K-iS| \quad (39)$$

が導かれる。ここで $i=\sqrt{-1}$ である。[$K-iS$] の各要素は [$K+iS$] の各要素の共役複素数だから、 $|K-iS|$ の値は $|K+iS|$ の値の共役複素数である。したがって $|C|$ の値は負になることはない。すなわち

$$|C| \geq 0 \quad (40)$$

であることが結論される。したがって $|C|=0$ となる分岐座屈荷重を求めるに当って $|C|$ の値が正だから負に変わるところを探すという手法は使うことができないという注意が必要である。

3. 実験

3.1 FW 円筒殻 最初の実験として、フィラメント・ワインディング (FW) で作った円筒殻について圧縮座屈実験を行った。第3図に示したように、内側直径 $2R=200$ mm, 長さ 240 mm の円筒殻の両端を固定金具に低融点合金で埋め込み、試験円筒部分の長さ $L=200$ mm とした。低融点合金 (トキワメタル TU-60) の融点は 60°C である。円筒殻の層数は3で、積層構成は第1表に示したように、円周巻き層の外側に $\pm 20^\circ$ のヘリカル巻きをしたもの (A) と、 $\pm 20^\circ$ へ

第3図 実験装置

第4図 FW 円筒殻

第2表 FW No. 3 円筒殻の局部座屈荷重と最高荷重

負荷	局部座屈荷重 (kN)	最高荷重 (kN)
第1回	6.90, 7.49, 8.03	8.08
第2回	6.02, 7.00, 7.29, 7.39	7.71
第3回	5.84, 6.80, 7.24	7.63
破壊後	5.13	6.11

リカル巻きの外側に円周巻きしたもの (B) との2種類である。 $\pm 20^\circ$ のヘリカル巻きのゆえに、第4図にA試験円筒の写真で示したように、表層は $+20^\circ$ 層と -20° 層とが3角形の形で互い違いに入れかわる。試験円筒殻の板厚 (最も薄いところ) は $t=0.382$ mm, V_f は 55% であった。

荷重方式としては、インストロン試験機により第3図に示すように上端は半球座を介して end-shortening (E-S) を与え、対応する荷重を第3図に示す位置のロードセルで測定した。36個の抵抗線歪計による歪の測定、4個のダイヤルゲージによる両端板間の接近量を測定したが、その測定結果の記載は省略する。実験で到達した最高荷重を、座屈荷重の理論値と比較して第1表に示した。この実験結果の E-S~荷重の関係の一例を第5図に示したが、第2表にも示したように、まず凹みが一つの局部座屈 (Local Buckling) が起こり、そのときの荷重低下は小さく 50N 程度であった。E-S を増すと荷重は増加し、3~4回の局部座屈荷重 (そのたびごとに凹みの数は増加) を経て最高荷重に

第1表 FW 円筒殻の座屈荷重: 実験値と理論値の比較

FW 構成	線形理論値 (kN) C1 (3層)	実験値 (kN)		$\frac{P_{cr, exp}}{P_{cr, lin}}$	線形理論値 (kN)		
					C1	S2	
		試験円筒番号	最高荷重		FW	3層	FW
A: 外側 $\pm 20^\circ (\beta_s=2/3)$ 内側 $90^\circ (\beta_c=1/3)$	9.47 (15)	1 3	7.78 8.08	0.82 0.85	12.76 (16)	9.46 (14)	12.74 (16)
B: 外側 $90^\circ (\beta_c=1/3)$ 内側 $\pm 20^\circ (\beta_s=2/3)$	11.66 (15)	2 4	7.10 7.10	0.61 0.61	14.38 (4)	11.64 (15)	14.38 (4)

括弧内の数値は円周方向波数 n を示す。

第5図 FW 円筒殻 A-No. 3 の荷重 (P) $\sim$ E - S (ϵ) の第2回の負荷および除荷の履歴 (矢印は局部座屈を示す。実荷重は縦軸の値に 0.33 kN を加えたものである)

到達した。最高荷重は最初の局部座屈荷重よりかなり高く、かつ最高座屈荷重時の荷重低下はそれほど大きくない。その後 E - S を取り去ると、ある所で荷重が上がって完全に元に戻った。つまりほとんど弾性変形座屈で、塑性変形や亀裂の発生は少ないと考えられる。第2表に FW 試験円筒 No. 3 に何回も負荷した場合の局部座屈荷重と最高荷重を示したが、2回目以降の最高荷重などの低下量はさほど大きくない。また3回目にかかなり大きな E - S を与えて、大撓みのダイヤモンド型座屈変形の角では局部的に繊維切れが生じた後でも、荷重を0に戻すと外見上元通りの円筒殻に戻り、その後の負荷に対しても第1回目の最高荷重の約76%の荷重負担を示した。

第1表に“3層”と記して示した理論値は、層構成が第4図に示す FW でなく、 $+20^\circ$ 、 -20° 、 90° などのように3層から成るとして、(6)式の弾性係数を求め、付録に示す線形理論により、C1 固定 ((A6)式)の境界条件の下に求めた固有値で、この3層近似に対しては線形理論での厳密解である。フィラメントワイ

ンディングの場合は、第4図に示すように場所により $+20^\circ$ が上の領域と -20° が上の領域があって場所により(6)式の弾性係数が異なるから、上記の3層の取扱いは厳密には正しくない。そこで一つの試みとして、マクロ的に平均化の考えを用い、2領域の弾性係数の平均値を用いることにすると、 $B_{xx}=B_{yy}=D_{xx}=D_{yy}=0$ になる。このような弾性係数で計算した座屈荷重を“FW”と記して第1表に付記した。“FW”とした場合は“3層”とした場合よりも座屈荷重がAでは34.7%、Bでは23.3%高くなっている。

参考までに、境界条件が S2 単純支持 ($w=M_x=N_x=v=0$) の場合の計算結果をも第1表に示した。境界条件による差はきわめて小さいことが見られる。

実験値(最高荷重)と3層近似理論値との比は、A試験円筒殻では82~85%とかなり良い値であるが、B試験円筒殻では61%でありよくない。

3.2 積層円筒殻 FW 円筒殻では場所により弾性係数が変わるので、座屈荷重の厳密な理論値を求めるのは困難である。そこで理論値と比較する本実験としては、第3表に示す4種類の積層構成の継目なし積層円筒殻について行った。実験装置、荷重方法、測定方

第6図 積層円筒殻 No. 2 の荷重 (P) $\sim$ E - S (ϵ) の負荷および除荷の履歴 (実荷重は縦軸の値に 0.13 kN を加えたものである)

第3表 積層円筒殻：座屈荷重の実験値、線形理論値、座屈前変形理論値の比較

試験円筒殻番号	積層構成 (内側→外側)	板厚 t (mm)	V_f (%)	実験値 (kN) $P_{cr exp}$	線形理論値 (kN) $P_{cr lin}$	座屈前変形理論値 (kN) $P_{cr pre}$	$\frac{P_{cr exp}}{P_{cr lin}}$	$\frac{P_{cr exp}}{P_{cr pre}}$	$\frac{P_{cr pre}}{P_{cr lin}}$
1	$+20^\circ, -20^\circ, 90^\circ$	0.420	56.4	13.27 ($n=10$)	13.89 ($n=15$)	14.01 ($n=14$)	0.956	0.947	1.009
2	$0^\circ, +45^\circ, -45^\circ, 90^\circ$	0.578	58.4	27.34 ($n=8$)	28.17 ($n=13$)	29.74 ($n=14$)	0.970	0.919	1.056
3	$+30^\circ, -30^\circ, -30^\circ, +30^\circ, 90^\circ, 90^\circ$	0.899	57.6	88.39 ($n=?$)	116.89 ($n=0$)	113.26 ($n=4$)	0.756	0.780	0.969
4	$0^\circ, +60^\circ, -60^\circ, -60^\circ, +60^\circ, 0^\circ$	1.017	52.8	98.19 ($n=?$)	108.61 ($n=8$)	121.88 ($n=10$)	0.904	0.806	1.122

第7図 各種層円筒殻の座屈変形または破壊状況の写真

法すべて FW 円筒殻の場合と同じである。実験した積層円筒殻の厚さ t 、繊維体積含有率 V_f 、および実験で得られた座屈荷重と座屈波形の周方向波数 n を第3表に示した。

この4試験円筒殻の E-S~荷重関係は、いずれも局部座屈を起こすことなく、座屈まで完全に直線関係を示し、最初の座屈が最高荷重となり、荷重低下もかなり大きかった。一例として積層円筒殻 No. 2 の場合を第6図に示した。試験円筒殻 No. 2 の座屈変形の写真を第7(A)図に示した。No. 1, No. 2 は座屈後除荷すると完全に元の円筒形に復元した弾性座屈であった。No. 3 は、座屈直後はほぼ中央断面で外側 90° 層に、第7(B)図の写真で示すような円周方向に一周するクラックが生じ破壊した。No. 4 は突然大音響を発生して円筒中央部分の円周方向ほぼ全域にわたって小さな破片となって飛び散るという、座屈か材料破損かわからないような破壊が生じた。非常に危険な実験であった。その破壊状況の写真を第7(C)図に示した。したがって No. 3, No. 4 については座屈波形が不明であったので、円周方向波数は ($n=?$) と記しておいた。(C) 図で上部荷重ヘッドと半球座とのズレが見られるのは、座屈破壊時の衝撃により試験体がこれだけ左側に移動したことを示す。No. 4 の場合、最高荷重での平均応力は約 160 MPa で、歪測定値および荷重から算出される外側 0° 層の圧縮応力は 500 MPa 程度であった。座屈荷重の解析値からみて、No. 3, No. 4 いずれも、圧縮による直接の材料破損ではなく、座屈後の曲げ変形により破壊が生じたものと考えられる。

この試験円筒殻から試験片を切り出して(6)式の21個の弾性係数を実験により精度よく求めることは不可能に近い。石川・小山・小林²⁾は、先に同質のプ

第4表 計算に用いたカーボン繊維とエポキシ樹脂の弾性係数

カーボン繊維	エポキシ樹脂
$E_{fs}=223.6 \text{ GPa}$	$E_m=3.43 \text{ GPa}$
$k=E_{fr}/E_{fs}=0.09$	$\nu_m=0.38$
$\nu_{frr}=0.30$	
$\nu_{frr}=0.42$	
$G_{frr}=46.1 \text{ GPa}$	

第5表 プリプレグ積層試験円筒殻の各 V_f に対する一方向材の弾性係数

No.	1	2	3	4
V_f (%)	56.4	58.4	57.6	52.8
E_L GPa	127.6	132.0	130.2	119.6
E_T GPa	8.54	8.84	8.72	8.05
G_{LT} GPa	4.02	4.25	4.16	3.66
ν_{LT}	0.332	0.330	0.331	0.334

リプレグシートで作った一方向材の試験片について一方向材としてのすべての弾性係数を測定し、小林・石川の弾性係数解析理論⁸⁾によって逆にカーボン繊維およびエポキシ樹脂の弾性係数を算出している。そこでその結果(第4表)を利用して、小林・石川の弾性係数解析理論に従ってまずこの試験円筒殻の V_f での一方向材の弾性係数を算出した。その結果を第5表に示す。これを基礎に(7)式より求めた各試験円筒の弾性係数を第6表に示した。第3表の理論値はこの弾性係数値を用いて計算したものである。座屈前変形を考慮した理論計算に当っては、全長 L を 100 等分して差分計算した。試験円筒 No. 1 については 200 等分した計算も行い 100 等分した計算結果の精度が十分であることを確認している。

試験円筒殻 No. 1, 2, 4 の座屈荷重については、実験値は線形理論値に非常に近い値で、これまでの等方

第6表 積層試験円筒殻の弾性係数
(単位; A_{ij} : MN/m, B_{ij} : kN, D_{ij} : N·m)

No. 1 試験円筒殻

A_{xx}	29.93	B_{xx}	-1.842	D_{xx}	0.3540
A_{yy}	21.00	B_{yy}	2.309	D_{yy}	0.4164
A_{xy}	4.54	B_{xy}	-0.233	D_{xy}	0.0558
A_{xs}	0	B_{xs}	-0.656	D_{xs}	0.0918
A_{ys}	0	B_{ys}	-0.099	D_{ys}	0.0139
A_{ss}	5.02	B_{ss}	-0.233	D_{ss}	0.0630

No. 2 試験円筒殻

A_{xx}	32.40	B_{xx}	-3.886	D_{xx}	1.0816
A_{yy}	32.40	B_{yy}	3.886	D_{yy}	1.0816
A_{xy}	10.30	B_{xy}	0	D_{xy}	0.1071
A_{xs}	0	B_{xs}	-0.648	D_{xs}	0
A_{ys}	0	B_{ys}	-0.648	D_{ys}	0
A_{ss}	11.05	B_{ss}	0	D_{ss}	0.1282

No. 3 試験円筒殻

A_{xx}	49.75	B_{xx}	-6.258	D_{xx}	2.726
A_{yy}	49.75	B_{yy}	10.217	D_{yy}	4.371
A_{xy}	15.85	B_{xy}	-1.979	D_{xy}	0.870
A_{xs}	0	B_{xs}	0	D_{xs}	0.528
A_{ys}	0	B_{ys}	0	D_{ys}	0.185
A_{ss}	16.95	B_{ss}	-1.979	D_{ss}	0.944

No. 4 試験円筒殻

A_{xx}	51.62	B_{xx}	0	D_{xx}	7.848
A_{yy}	51.62	B_{yy}	0	D_{yy}	2.372
A_{xy}	16.56	B_{xy}	0	D_{xy}	0.766
A_{xs}	0	B_{xs}	0	D_{xs}	0.245
A_{ys}	0	B_{ys}	0	D_{ys}	0.703
A_{ss}	17.53	B_{ss}	0	D_{ss}	0.850

性円筒殻の実験結果ではまったく考えられない値である。また No. 1, 2, 4 では座屈前変形を考慮して求めた座屈荷重が線形理論値よりも高いという結果が得られた。これも等方性円筒殻の場合には、C1 境界条件では座屈前変形は座屈荷重を古典理論値の 0.927 倍に下げるという事実と反対である。No. 3 だけ $P_{cr pre}/P_{cr lin}$ が 1 より低いのは、これだけ線形理論での座屈荷重が軸対称変形 ($n=0$) であることによるもので、後で説明するように当然のことである。 $P_{cr exp}/P_{cr pre}$ を算出してみると、等方性円筒殻の場合よりもある程度よい妥当な結果で、従来の等方性円筒殻の実験に比べて高精度の実験結果が得られたものと考えられる。つまり $P_{cr exp}/P_{cr lin}$ の値が高く出た一つの理由として座屈前変形の影響があると考えられる。なお、どのような形状のどの程度の大きさの座屈前変形が生ずるか、No. 1, 2 試験円筒殻について、分岐座屈が起こる荷重での計算結果を第8図に示した。

FW 円筒殻の実験で、局部座屈を起こしながら最高荷重に到達するという特性は、従来の等方性円筒殻

第8図 積層円筒殻 No. 1 および No. 2 の分岐座屈直前の座屈前変形

の実験では経験したことのない特異な現象である。そこで FW 円筒殻Bに対応する積層構成および板厚の積層円筒殻として No. 1 を作り実験したが、積層円筒殻 No. 1 では、その E-S~荷重関係は第6図と同様で、このような現象はまったく起こらなかった。かつ“(最高荷重の実験値)/(座屈荷重の線形理論値)”は FW 円筒殻 0.61 に対し積層円筒殻約 0.96 で、FW 円筒殻のほうがずっと低い。もしも前述の意味の“FW”としての弾性係数を用いるならば、FW 円筒殻の実験値と理論値の比は $7.10/14.38=0.49$ となる。したがって上記の特性は、FW のゆえに $+20^\circ$ の繊維と -20° の繊維との重なりにより板厚分布が一樣でなくなることで、すなわち初期不整に相当するものが生じていること、に起因すると考えられる。

4. 座屈前変形の影響についての考察

$P_{cr pre}/P_{cr lin}$ が等方性の場合 1 より小さいのがなぜ試験円筒殻 1, 2, 4 の場合 1 より大きくなったのかを調べるため、座屈前変形の影響が最も大きい No. 4 試験円筒殻に注目して、まず V_1 を 52.8% と一定にした $[0^\circ, \alpha, -\alpha, -\alpha, \alpha, 0^\circ]$ なる積層構成の円筒殻を考え、 α を 60° (試験円筒殻 No. 4) から 0° まで変

第9図 $V_1=52.8\%$, $[0^\circ, +\alpha, -\alpha, -\alpha, +\alpha, 0^\circ]$ 積層円筒殻の $(P_{cr})_{pre}/(P_{cr})_{lin}$ と α の関係

第10図 軸方向強化一方向材円筒殻の $(P_{cr})_{pre}/(P_{cr})_{lin}$ と V_f との関係

えると $P_{cr,pre}/P_{cr,lin}$ がいかに変わるかを計算した結果を第9図に示す。 $\alpha=0^\circ$ になっても1.069で1より大きい。 $\alpha=0^\circ$ というのは繊維がすべて軸方向の円筒殻である。そこで次に $\alpha=0^\circ$ として V_f を52.8%から0% (等方性エポキシ円筒殻) まで変えると $P_{cr,pre}/P_{cr,lin}$ がいかに変わるかを計算した結果を第7表および第10図に示した。 $V_f=0$ ではこれまで知られている等方性の場合の答と一致している。大体 V_f の低下に伴い $P_{cr,pre}/P_{cr,lin}$ が下がる傾向があるが、1.0と交差する V_f の値が0.015と意外に小さい。

第7表には線形理論での軸対称変形座屈荷重の計算結果も示した。また第11図に線形理論での座屈荷重と座屈前変形、分岐座屈荷重の関係の説明図を示した。重要なことは、等方性円筒殻の場合は軸対称変形座屈荷重と非対称変形座屈荷重とが等しいが、異方性円筒殻ではそれが異なることである。まず、座屈前変形の荷重～E-S曲線は必ず線形理論軸対称変形座屈荷重より低い。したがって、線形理論で軸対称変形座屈荷重のほうが低い場合は、もしもこの曲線上で分岐座屈が起こるとすれば、それは必ず線形理論での座屈

第11図 線形理論および座屈前変形理論での軸圧縮荷重対圧縮歪の関係と分岐座屈荷重

荷重より低いということになる。そして、その座屈波形は、線形理論では軸対称であるのが、座屈前変形理論では非対称となる。また上記の理由で、等方性円筒殻では、線形理論の両座屈変形に対する座屈荷重が等しいから、座屈前変形理論での分岐座屈荷重は必ず線形理論値より低くなる。

非対称変形座屈荷重のほうが軸対称変形座屈荷重よりも低い場合は、座屈前変形理論での分岐座屈荷重が線形理論での分岐座屈荷重より低くなければならない理由はない。上記の計算結果は、逆に座屈前変形は分岐座屈荷重を高める働きをすること、および第7表は $P_{cr,lin,sym}/P_{cr,lin}$ が大きくなるほど $P_{cr,pre}/P_{cr,lin}$ が大きくなることを示している。

試験円筒殻の寸法 $L=2R(=200\text{ mm})$ の場合について $P_{cr,pre}/P_{cr,lin}$ が1より大きくなるという結果が導かれたが、長さが十分長いと、中央に座屈前変形はポアソン比の影響だけ様に膨れたものに近い領域が存在することになり、かつこの部分により決まる座屈荷重は線形理論値に近いはずである。上記の $V_f=52.8\%$ 、 $\alpha=0^\circ$ 、 $t=1.017\text{ mm}$ の場合について、 $L=300, 400, 800, 1,600\text{ mm}$ の場合について等分割数それぞれ200, 400, 800, 1,600にとって計算した結果

第7表 軸方向に一方向強化円筒殻の座屈荷重の V_f による変化 ($P_{cr,pre}$: 座屈前変形理論値, $P_{cr,lin}$: 線形理論での非対称変形座屈荷重, $P_{cr,lin,sym}$: 線形理論での軸対称変形座屈荷重)

V_f	0.004	0.008	0.015	0.03	0.05	0.07	0.1	0.2	0.4	0.528
$P_{cr,pre}$ (kN)	13.788 (n=8)	14.602 (n=9)	15.651 (n=9)	17.064 (n=9)	18.515 (n=8)	19.809 (n=8)	24.075 (n=8)	31.960 (n=8)	49.023 (n=8)	63.900 (n=8)
$P_{cr,lin}$ (kN)	14.465 (n=9)	14.985 (n=9)	15.671 (n=9)	16.966 (n=9)	18.123 (n=8)	19.123 (n=8)	23.104 (n=8)	29.999 (n=8)	45.817 (n=8)	59.791 (n=8)
$P_{cr,lin,sym}$ (kN)	15.612	17.240	19.584	23.869	28.567	32.705	40.492	58.301	92.555	116.827
$\frac{P_{cr,pre}}{P_{cr,lin}}$	0.953	0.975	0.999	1.006	1.022	1.036	1.042	1.065	1.070	1.069
$\frac{P_{cr,lin,sym}}{P_{cr,lin}}$	1.079	1.151	1.250	1.407	1.576	1.710	1.753	1.943	2.020	1.954

第12図 座屈荷重に対する長さの影響

を第12図に示した。 $L=1,600$ mm で $P_{cr\ pre}/P_{cr\ lin}=1.001$ で十分1に近い値になっている。 $L=400$ mm の場合の座屈前変形は、変位 w の一様膨張からの変動分が一様膨張の10%以下になるのは付根から約52 mmのところ、1%以下になるのは約94 mmのところ、変動の半波長は約38 mmであった。この計算例で $L/2R$ を大にしても $P_{cr\ pre}/P_{cr\ lin}$ がなかなか1に近づかないのは、 $\alpha=0^\circ$ の場合は軸方向の剛性が大きくて座屈前変形における末端の影響域が長く、かつ座屈波形の軸方向半波長が約151 mmと長いことによると考えられる。著者の一人は先に半無限長の直交異方性円筒殻について、異方性の度合が強くなると $P_{cr\ pre}/P_{cr\ lin}$ は等方性の0.927から急速に下から1に近づくという結果(文献5)第4図)を得ているが、上記の長さの影響の検討結果は、本論文の結果と前論文の結果は矛盾しないことを示している。

別に、4通りの基礎的な積層構成の場合について、板厚方向に均質化し、 $V_f=65\%$ 、板厚1 mmの数値例で計算した結果を第8表に示した。上述のように線形理論で軸対称変形座屈荷重のほうが低いCase4の場合は $P_{cr\ pre}/P_{cr\ lin}<1$ になっている。それ以外の場

第8表 4種類の基礎的な積層構成円筒殻の座屈荷重の $P_{cr\ pre}/P_{cr\ lin}$

CASE	積層構成			$P_{cr\ lin}$ (kN)	$P_{cr\ lin\ sym}$ (kN)	$P_{cr\ pre}$ (kN)	$P_{cr\ pre}/P_{cr\ lin}$
	β_a	β_c	$\beta_h(\pm\theta)$				
1	0.5	0.5	0	107.99 ($n=7$)	285.75	108.00 ($n=7$)	1.000
2	0	1	0	73.74 ($n=8$)	136.18	74.03 ($n=8$)	1.004
3	1/3	1/3	1/3 ($\pm 45^\circ$)	185.74 ($n=9$)	240.85	186.85 ($n=9$)	1.006
4	0	0	1 ($\pm 45^\circ$)	104.38 ($n=0$)	(*)	103.61 ($n=9$)	0.993

* Case 4は軸対称変形座屈荷重が線形理論値。なお非対称変形では $n=2$ のとき座屈荷重は最小で、112.39 kNである。

合は $P_{cr\ pre}/P_{cr\ lin}>1$ になっているが、その値はほとんど1に近い。Case 1は $P_{cr\ lin\ sym}/P_{cr\ lin}$ が大きいにもかかわらずほとんど1.0である。つまり $P_{cr\ lin\ sym}/P_{cr\ lin}$ が大きければ $P_{cr\ pre}/P_{cr\ lin}$ が大きくなるという一般論は成り立たず、その積層構成に依存することである。先に述べたように、同一の積層構成のなかで $P_{cr\ lin\ sym}/P_{cr\ lin}$ が大きくなれば $P_{cr\ pre}/P_{cr\ lin}$ が大きいということである。

JONESらの論文⁶⁾の数値例で、 $P_{cr\ pre}/P_{cr\ lin}$ が最高1.05程度になったものが見られる。しかしJONESの論文の数値例は、(i)境界条件が単純支持S2であること、(ii)一方向材の基礎弾性係数比として、たとえば G_{LT}/E_T , ν_L を固定してパラメータとして E_L/E_T だけを単独に変えているから、弾性係数比が必ずしも実際の複合材料に対応していない、ということで、 $\alpha=0^\circ$ のみの一方向材円筒殻の場合についても直接数値的に比較することはできない。

5. 結 論

一般の積層円筒殻について座屈前変形を考慮して座屈荷重を求める方法を提案し、とくにその分岐点を求める方程式“係数の行列式=0”の行列式の値は分岐点以外では非負であることを証明した。実験円筒殻ほか若干の数値例について計算した結果、座屈荷重に対する座屈前変形の影響について次の事柄が明らかにされたものと考えられる。

- 1) CFRP 積層円筒殻では、積層構成と長さによつては、座屈前変形により座屈荷重が線形理論値よりも高くなる。本論文の数値例では最高12.2%増であった。
- 2) 上記のようになるのは、線形理論での非対称変形座屈荷重が軸対称変形座屈荷重より低い場合に限る。この場合も長さが長くなると座屈前変形理論の座屈荷重は線形理論値に近づく。軸対称変形座屈荷重のほうが低い場合は座屈前変形は座屈荷重を線形理論値より低くするが、その量は等方性の場合より小さい。
- 3) 等方性円筒殻の場合は、線形理論での非対称変形座屈荷重と軸対称変形座屈荷重が等しいことが、座屈前変形が座屈荷重を線形理論値より低くする要因になっている。

FW、積層両円筒殻について実験の結果、

- 1) 積層円筒殻については、座屈荷重の実験値は座屈前変形を考慮した理論値と非常によい一致を示した。
- 2) FW 円筒殻では、最高荷重に到達する前に荷重低下の小さい数回の局部座屈を起こすという現

象を示した。座屈荷重の実験値は、同一の積層構成に対し、FW 円筒殻のほうが積層円筒殻より低い。

- 3) 内厚が薄い円筒殻では、FW, 積層ともに、除荷後はほぼ完全に元の円筒形に復元する弾性座屈で、再荷重可能である。

の結論が得られたものと考えられる。

本実験円筒殻の作製にあたりお世話いただいた、東レ開発研究所藤原元三室長と乗田敏毅氏に厚くお礼申し上げます。

付録 線形理論での座屈荷重の厳密解法

N_z のうち一様軸圧縮荷重を N_0 と記して、(6)式を平衡方程式(8), (9)に代入し、非線形項を省略すると、中央面の変位 u_0, v_0, w で表わした線形理論での圧縮座屈方程式

$$\begin{aligned} & A_{zz}u_{0,zz} + 2A_{zy}u_{0,z} + A_{yy}u_{0,yy} \\ & + A_{zz}v_{0,zz} + (A_{zy} + A_{yz})v_{0,z} \\ & + A_{yy}v_{0,yy} + (A_{zy}w_{,z} + A_{yz}w_{,y})/R \\ & - B_{zz}w_{,zzz} - 3B_{zy}w_{,zyz} \\ & - (B_{zy} + 2B_{yz})w_{,zyy} - B_{yy}w_{,yyy} = 0 \end{aligned} \quad (A 1)$$

$$\begin{aligned} & A_{zz}u_{0,zz} + (A_{zy} + A_{yz})u_{0,z} + A_{yy}u_{0,yy} \\ & + A_{zz}v_{0,zz} + 2A_{zy}v_{0,z} \\ & + A_{yy}v_{0,yy} + (A_{yz}w_{,z} + A_{zy}w_{,y})/R \\ & - B_{zz}w_{,zzz} - (B_{zy} + 2B_{yz})w_{,zyz} \\ & - 3B_{yz}w_{,zyy} - B_{yy}w_{,yyy} = 0 \end{aligned} \quad (A 2)$$

$$\begin{aligned} & B_{zz}u_{0,zzz} + 3B_{zy}u_{0,zyz} + (B_{zy} + 2B_{yz})u_{0,zyy} \\ & + B_{yy}u_{0,yyy} + B_{zz}v_{0,zzz} + (B_{zy} + 2B_{yz})v_{0,zyz} \\ & + 3B_{yz}v_{0,zyy} + B_{yy}v_{0,yyy} - (A_{zy}u_{0,z} + A_{yz}u_{0,y} \\ & + A_{yy}v_{0,z} + A_{yz}v_{0,y})/R - D_{zz}w_{,zzzz} \\ & - 4D_{zy}w_{,zzzy} - 2(D_{zy} + 2D_{yz})w_{,zzyy} \\ & - 4D_{yz}w_{,zyyy} - D_{yy}w_{,yyyy} + 2(B_{zy}w_{,zzz} \\ & + 2B_{yz}w_{,zyz} + B_{yy}w_{,yyy})/R - A_{yy}w/R^2 \\ & - N_0w_{,zz} = 0 \end{aligned} \quad (A 3)$$

が導かれる。座屈荷重 N_{0cr} の厳密解は以下に述べる方法で求められる⁹⁾。

$$\begin{aligned} u_0 &= U \sin \{(\lambda/R)x + n\theta\}, v_0 = V \sin \{(\lambda/R)x + n\theta\} \\ w &= W \cos \{(\lambda/R)x + n\theta\} \end{aligned} \quad (A 4)$$

を(A 1)~(A 3)に代入すると U, V, W につき斉次3元連立方程式が導かれ、その係数の行列式=0 から

λ について8次式が導かれる。そこでその八つの根 λ_i (N_0 の関数) と $(U/W)_i, (V/W)_i$ を求め、 u_0, v_0, w の一般解は

$$\begin{aligned} u_0 &= \sum_{i=1}^8 W_i (U/W)_i \sin \{(\lambda_i/R)x + n\theta\} \\ v_0 &= \sum_{i=1}^8 W_i (V/W)_i \sin \{(\lambda_i/R)x + n\theta\} \\ w &= \sum_{i=1}^8 W_i \cos \{(\lambda_i/R)x + n\theta\} \end{aligned} \quad (A 5)$$

と表わされる。これを両端の境界条件、たとえばC1固定の場合は

$$w=0, w_{,z}=0, u_0=0, v_0=0 \quad (A 6)$$

に代入して W_i ($i=1\sim 8$) について斉次8元連立方程式を導き、その係数の行列式=0 から固有値の最小値 N_{0cr} を求める。

参考文献

- 1) 粕谷平和, 植村益次: 積層複合円筒殻の軸圧縮座屈に及ぼすカップリング効果, 日本航空宇宙学会誌, 第30巻, 第346号 (1982.11), pp. 664-675.
- 2) ALMROTH, B. O.: Influence of Edge Conditions on the Stability of Axially Compressed Cylindrical Shells, NASA CR-161 (1965).
- 3) KOBAYASHI, S.: The Influence of Prebuckling Deformation on the Buckling Load of Truncated Conical Shells under Axial Compression, NASA CR-707 (1967).
- 4) 小林繁夫: 円筒殻の圧縮座屈荷重に対する座屈前変形の影響, 日本航空学会誌, 第15巻, 第163号 (1967), pp. 258-263.
- 5) KOBAYASHI, S.: The Influence of Prebuckling Deformation on the Buckling Load of Orthotropic Cylindrical Shells under Axial Compression, Trans. Japan Soc. Aero. Space Sci. Vol. 11, No. 19 (1968), pp. 60-68.
- 6) JONES, R. M. and HENNEMANN, J. C. F.: Effect of Prebuckling Deformations on Buckling of Laminated Composite Circular Cylindrical Shells, AIAA J., Vol. 18, No. 1 (1980), pp. 110-115.
- 7) 石川隆司, 小山一夫, 小林繁夫: カーボンコンポジットとカーボン繊維の弾性係数, 日本航空宇宙学会誌, 第23巻, 第263号 (1975.12), pp. 678-684.
- 8) 小林繁夫, 石川隆司: 一方向繊維強化複合材料の弾性係数, 日本航空宇宙学会誌, 第23巻, 第256号 (1975.5), pp. 319-326.
- 9) CHENG, S. and Ho, B. P. C.: Stability of Heterogeneous Anisotropic Cylindrical Shell under Combined Loading, AIAA J., Vol. 1, No. 4 (1963), pp. 892-898.