上げ実績の評価などにより変更される可能性がある。したがって長期にわたる開発の計画に当たっては、種類の条件の見直しをつけることが重要であるが、あるものは切りすてて、とにかくスケジュールを確保できることを最優先をせざるをえない。

現在までの打上げにおいて、NASDA の追跡管制システムは一応所期の目的は十分果たしており、その点では高く評価できるが、将来においては開発および運用コストの低減が強く要求されており、高い信頼性を損なうことなく、さらに汎用化、省力化の努力をすすめる必要がある。

なお少し先の目標としては、わが国独自の TDRS

もようやく長期ビジョンに取り上げられつつあり、各方面の協力を得て実現させたい。

NASDA の追跡管制システムが自主開発によって今日まで発展し、その運用においてはほとんど完全な成功をおさめたのは、SA 10 の時代からわが国独自の開発の方針を採用して努力を重ねてきた関係各位の見通しのよさによるところが多い。その意味で SA 10 の指導に当たられた齋藤現宇宙開発委員、初期のシステム開発の任に当たられた村松元追跡管制部長をはじめ、協力いただいた各研究機関、メーカ、NASDA 関係者等多くの方々に深甚な謝意を表する次第である。

一解 説一

柔軟衛星のモデリング*

——ハイブリッド・システムとトランケーション——

狼 嘉彰**・藤井 裕矩***

Key words: Flexible spacecraft; modelling; truncation; hybrid coordinate

1. はじめに

柔軟な構造をもつ人工衛星の姿勢運動を解析するた

著者紹介

狼 嘉彰 (正会員)

昭和 14 年生。千葉県出身。昭和 43 年 3 月 東京工業大学大学院博士課程修了。同年科学技術庁航空宇宙技術研究所に入所。現在、宇宙研究グループ主任研究官。人工衛星の姿勢検出器・制御、大規模宇宙構造物のダイナミクスと制御などの研究に従事。工学博士。計測制御学会、日本機械学会、AIAA 各会員。

藤井 裕矩 (正会員)

昭和 19 年生。兵庫県出身。昭和 47 年 3 月 京都大学大学院修了。同年、東京都立工科短期大学に勤務。現在、同大学航空機体工学学科助教授。航空機力学、宇宙航行力学、とくに人工衛星の姿勢運動、大規模宇宙構造物のダイナミクス等の研究に従事。京都大学工学博士。AIAA, AAS 各会員。CASI 準フェロー。

* 昭和 58 年 9 月 22 日原稿受理 Dynamic Modelling of Flexible Spacecraft—Hybrid System and Truncation

** 航空宇宙技術研究所 Yoshiaki OHKAMI

*** 都立工科短期大学 Hironori FUJII

めに不可欠のモデリング問題については、1960 年代後半から 70 年代前半にわたって数多くの研究がなされている。モデリングおよび定式化の手法、運動方程式の吟味およびモード解析等の全般的なレビューは、すでに MODI¹⁾, WILLIAMS²⁾, 藤井³⁾らによって行われ、さらにそれ以前にも LIKINS⁴⁾ および HUGHES⁵⁾ の概説的な論文が広く利用されている。この 10 年余にわたる期間において、人工衛星の形態も大幅に変化し、比較的に柔軟性の弱い付属物体が大きな質量を有する中心剛体に取り付けられた形態 (たとえば Hermes 衛星) から、柔軟性のより強い形態 (たとえば NASA で計画された large space telescope) へ発展し、最近では中心剛体のない完全に柔軟な構造体ともいえる大規模宇宙構造物 (large space structures) の問題が議論されている。このような経過において柔軟衛星のモデリングの問題は複雑な様相を呈し、現在においても十分な精度と信頼性を保証する手法は確立されていない。

もとより、柔軟衛星の統一的なモデリング手法があるわけではなく、それを応用する際の目的によってアプローチも異なる。定性的な安定解析、姿勢制御系の線形化解析、姿勢捕捉マヌーバ・シミュレーション、構造体展伸・展開時のシステムダイナミクス・シミュレーション等の目的に応じて適切な手法・規模が選ばれる。本稿では、姿勢制御系の設計・解析における

“線形プラント”としての柔軟衛星モデリングに焦点を絞り、とくにハイブリッド座標系とトランケーションの問題に関する最近の研究⁵⁷⁻²⁴⁾を中心に概括的な解説を試みる。これは、モデリング問題の限られた一面をとらえたのにすぎず、他の重要な様相、たとえば構造力学・材料力学等の観点にはまったく触れていない点をあらかじめお断りしておきたい。また、制御問題は簡単に触れるにとどめたので、たとえば文献 25)~27)を参照されたい。

2. モデリングの手法

制御系設計のためのモデリング問題は、本来分布定数系として偏微分方程式で記述される柔軟体を有限次元変数の常微分方程式で表わし(しばしばディスクリート化と呼ばれる)、そのモデルの忠実性を保ったままモデル次元数をできる限り低減し(トランケーションと呼ばれる)、制御対象として取り扱いやすいモデルを得ることに帰着される⁶⁾。ここで、柔軟体を記述するために、通常の片持ちビーム等と同様に“モード座標”が用いられるが、同様に、人工衛星あるいは宇宙構造物全系の並進運動を表わす変位および回転運動を表わす姿勢角が必要である。これらの変数は“剛体モード”と呼ばれ、いわゆる中心剛体が存在する場合はもちろんのこと、全体が柔軟な宇宙構造物の場合にも考慮せねばならない⁷⁾。このように、モード座標とディスクリートな変数が混在する系をハイブリッド座標系(hybrid coordinate)と呼ぶ。この用語の一般化はLIKINS⁴⁾による。ハイブリッド座標系による表示から、制御系モデルを導く手法はヴィクル・モード法と付属物モード法に大別され、それらの得失についていまお議論がつづいている^{8), 9)}。

(i) 付属物モード法(Appendage Mode Method, 他に cantilever, constrained*, fixed-base mode とも呼ばれる): 剛体モードを拘束して、柔軟体の微小変位についてのみモード解析を行う。トランケーションにおいて数学的な厳密さを失うが、実用上の利点が多い。LIKINSのハイブリッド法⁴⁾もこのカテゴリに入るが、並進運動を拘束していない点に特徴がある。

(ii) ヴィクル・モード法(Vehicle Mode Method, このほかに normal, global, unconstrained*, spacecraft mode とも呼ばれる): 剛体モードを含めてヴィクル全体の運動方程式をモード解析の対象とする。数学的厳密さがあり、自由振動の解析に向くが、

制御問題を取り扱うのに便利でない場合もある。MEIROVITCHの方法¹⁰⁾もこのカテゴリに入るがフィロゾフィとトランケーション操作に特徴がある。

次節以下において各手法の概略を述べるが、議論を簡単にするために次の仮定をおく:

- 1) 柔軟体の弾性変形は微小とする。
- 2) 剛体モードの変位・回転角も微小とする。
- 3) 衛星系全体にわたってジャイロ効果はない。
- 4) ダンピング効果は原始モデルでは無視する。

以上の仮定によって、柔軟衛星の運動方程式は次式で表わすことができる^{4), 6), 8), 9)}。

$$\text{全衛星系の並進運動: } M\ddot{x} + P_x^T \ddot{u} = Q_x \quad (1)$$

$$\text{全衛星系の回転運動: } I\ddot{\theta} + H_x^T \ddot{u} = Q_\theta \quad (2)$$

$$\text{弾性変形: } M_e \ddot{u} + K_e u + H_e \dot{\theta} + P_e \ddot{x} = Q_e \quad (3)$$

以下において $[\cdot]^T$ は行列 $[\cdot]$ の転置を意味する。

ここで、 x は中心剛体または基準座標系の変位を、 θ はその回転角を表わす 3×1 行列、 I は全衛星系の慣性モーメントを表わす 3×3 行列である。柔軟弾性変形の自由度を n として、 u は柔軟体の変形を表わす $n \times 1$ 行列、 M_e は質量または慣性モーメントを、 K_e は剛性を表わす $n \times n$ 行列、 P_e および H_e は剛体モードと変形の自由度を結合させる $n \times 3$ 行列である。また、 Q_x , Q_θ は衛星系全体にかかる力、トルクを表わす 3×1 行列であり、 Q_e は柔軟体の各部に分布して作用する力またはトルクを表わす $n \times 1$ 行列である。制御力はこれら三者に含まれるものとする。すなわち、中心剛体または基準座標系に直接作用する力およびトルクを Q_{Rx} , $Q_{R\theta}$ とし、柔軟体上のアクチュエータ分布を表わす行列を $\mathcal{L}_x$, $\mathcal{L}_\theta$ とすれば、制御力モデルは

$$Q_x = Q_{Rx} + \mathcal{L}_x^T Q_e \quad (4)$$

$$Q_\theta = Q_{R\theta} + \mathcal{L}_\theta^T Q_e \quad (5)$$

と書くことができる。

一方、観測モデルは、使用するセンサのタイプおよびセンサ配置によって著しく様相を異にするが、姿勢角、姿勢レートおよび柔軟体変位を直接測定すると仮定した場合、観測出力を表わす $m \times 1$ 行列 y は

$$y = \mathcal{F}\theta + \mathcal{G}\dot{\theta} + \mathcal{L}u \quad (6)$$

と表わせる。ただし、 $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ は $m \times 3$ 行列、 $\mathcal{L}$ は柔軟体上のセンサ分布を表わす $m \times n$ 行列である。

実際の制御系を設計する場合には、アクチュエータおよびセンサの配置問題が重要な課題であるが本稿ではこの問題には触れない。ただし、物理量として明確な意味を有する制御力あるいはセンサ出力は、(1)~(6)式の実変位を変数とする‘原始モデル’においてのみ定義しうるものであり、次節以下において行われるさまざまな変数変換によって物理量としての性質を失

* 今後、大規模宇宙構造物では、中心剛体の意味が薄れるので、付属物/ヴィクル・モードよりも constrained/unconstrained (拘束/非拘束) mode の用語を用いるほうがよいとの主張がある^{11), 12)}。

っていく点は留意すべきであろう。

以上で展開された原始モデルは n 自由度の実変位 u によって弾性変形を表わすのに対し、MEIROVITCH¹⁰⁾ は一般化された弾性変形を用いることを主張している。すなわち、柔軟構造体は本質的に分布定数系によって、剛体運動は中心剛体の存在いかんにかかわらず常微分方程式で記述されるから、全系は偏・常微分方程式が混在しているという意味でハイブリッド系となる（先に述べた LIKINS の意味との相異に留意したい）。このとき弾性変位は位置 ξ と時間 t との関数となるが、これを n 個の許容関数 (admissible function) $\phi_j(\xi)$ で離散化する。すなわち、

$$u(\xi, t) = \sum_{j=1}^n \phi_j(\xi) \zeta_j(t) = \Phi \zeta \quad (7)$$

ここで

$$\Phi^T = [\phi_1, \dots, \phi_n] \quad (8)$$

$$\zeta^T = [\zeta_1, \dots, \zeta_n] \quad (9)$$

である。弾性変形を記述する偏微分方程式に (7) 式を代入すれば (1)～(3) 式を類似の運動方程式が得られる。すなわち、

$$\text{全衛星系の並進運動: } M\ddot{x} + P_E^T \ddot{\zeta} = Q_x \quad (10)$$

$$\text{全衛星系の回転運動: } I\ddot{\theta} + H_E^T \ddot{\zeta} = Q_\theta \quad (11)$$

$$\text{弾性変形: } M_E \ddot{\zeta} + K_E \zeta + H_E \ddot{\theta} + P_E \ddot{x} = Q_E \quad (12)$$

ここで、 ζ は一般化された弾性変形であるから、それによって各パラメータ行列も次のように再定義される。

$$M_E = \int \Phi^T \Phi dm_E \quad (13)$$

$$P_E = \int \Phi dm_E \quad (14)$$

$$H_E = \int \tilde{r} \Phi dm_E \quad (15)$$

$$K_E = [\Phi, \Phi] \quad (16)$$

ただし $\tilde{r}$ は微小質量 dm_E の位置を表わす 3×1 行列 $r = [r_1, r_2, r_3]^T$ から生成される 3×3 反対称行列

$$\tilde{r} = \begin{bmatrix} 0 & -r_3 & r_2 \\ r_3 & 0 & -r_1 \\ -r_2 & r_1 & 0 \end{bmatrix}$$

MEIROVITCH は数多くの論文において (10)～(16) 式を原始モデルとして使用することを主張している。さらに、行列 Φ の性質はあくまで一般性をもたせるべきであり、‘柔軟体の付属物モード’等の解釈を排除している。

しかしながら、きわめて単純な特殊例を除いて、 Φ が単一の関数として陽な形で与えられることはなく、むしろ、(13)～(16) 式の行列が有限要素法によるモード解析あるいは振動試験解析の結果として与えられる。BODLEY ら¹¹⁾ のアルゴリズム展開もこのような認識に基づいて行われている。

次章以下において、ヴィクル・モード法と付属物モード法の概要を記述するが、前者には MEIROVITCH の方法を、後者には LIKINS のハイブリッド法を含める。MEIROVITCH の方法のみが (10)～(12) 式を、他はすべて (1)～(3) 式を原始モデルとする。

3. 付属物モード法

次節のヴィクル・モード法では衛星系(ヴィクル)を何ら拘束することなしにモード解析を行うのに対し、本章の付属物モード法では柔軟付属物に対してのみモード解析を行う。この場合、系全体の剛体モードの自由度を拘束するので、拘束モード (constrained mode) とも呼ばれる。

3.1 片持ちモード法 (Cantilever Mode 法) N_e 個の柔軟付属物体 $\left(\sum_{k=1}^{N_e} \varepsilon_k \right)$ が取り付けられた中心剛体の並進・回転の自由度を拘束し、(3) 式の u を含む項

$$M_e \ddot{u} + K_e u = 0 \quad \left(n \in \sum_{k=1}^{N_e} \varepsilon_k \right) \quad (17)$$

に対してモード解析を行う。行列 M_e, K_e とともに正定であるから、その結果得られる固有値 Ω_j^2 、固有ベクトル ϕ_j によって次の規格化・対角化が可能である。

$$\Phi^T M_e \Phi = U_n \quad (18)$$

$$\Phi^T K_e \Phi = \Omega^2 = \text{diag} [\Omega_1^2, \dots, \Omega_n^2] \quad (19)$$

変数変換

$$u = \Phi \xi \quad (20)$$

によって、(1)～(3) 式は次式となる。

$$M\ddot{x} + P_e^T \Phi \ddot{\xi} = Q_x \quad (21)$$

$$I\ddot{\theta} + H_e^T \Phi \ddot{\xi} = Q_\theta \quad (22)$$

$$\ddot{\xi} + \Omega^2 \xi + \Phi^T H_e \ddot{\theta} + \Phi^T P_e \ddot{x} = \Phi^T Q_e \quad (23)$$

この段階で ξ をトランケートして、 $(N \times 1)$ 行列 $\tilde{\xi}$ に次元低下し ($N \ll n$)

$$M\ddot{x} + P_e^T \tilde{\Phi} \ddot{\tilde{\xi}} = Q_x \quad (24)$$

$$I\ddot{\theta} + H_e^T \tilde{\Phi} \ddot{\tilde{\xi}} = Q_\theta \quad (25)$$

$$\ddot{\tilde{\xi}} + \tilde{\Omega}^2 \tilde{\xi} + \tilde{\Phi}^T H_e \ddot{\theta} + \tilde{\Phi}^T P_e \ddot{x} = \tilde{\Phi}^T Q_e \quad (26)$$

ついで、 $(2N+12)$ 次元行列の状態ベクトル X を

$$X = [x^T; \dot{x}^T; \ddot{x}^T; \theta^T; \dot{\theta}^T; \ddot{\theta}^T; \tilde{\xi}^T; \dot{\tilde{\xi}}^T; \ddot{\tilde{\xi}}^T]^T \quad (27)$$

で定義すれば、(24)～(26) 式に対応する状態方程式は

$$\begin{bmatrix} U_{6+N} & & & O \\ & M & O & P_e^T \tilde{\Phi} \\ O & O & I & H_e^T \tilde{\Phi} \\ & \tilde{\Phi}^T P_e & \tilde{\Phi}^T H_e & U_N \end{bmatrix} \dot{X} + \begin{bmatrix} O & & & -U_{6+N} \\ O & O & O & \\ O & O & O & \\ O & O & \tilde{\Omega}^2 & \end{bmatrix} X = 0$$

$$= \begin{bmatrix} O \\ \dots \\ Q_x \\ \dots \\ Q_\theta \\ \dots \\ \phi^T Q_e \end{bmatrix} \quad (28)$$

となる。ただし、 U_{6+N} は単位行列である。これを $\dot{X} = AX + Bu$ の形に書くことは容易である。

3.2 LIKINS のハイブリッド法 LIKINS は、人工衛星の姿勢運動が重要であり、並進運動をシミュレーションや解析から取り除くことを提唱した。このため、基準剛体に固定された点の慣性空間上での変位 x ((1), (10) 式等で記述される) のかわりに、全系の質量中心の慣性空間上での変位で記述しなおした。こうすることにより、(1) 式は不要となるが、(3) 式の質量行列 M を換算質量で補正する必要が生ずる。その結果は、全衛星系質量を $\mathcal{M}$ とすると

$$\text{全衛星系の回転運動: } I\ddot{\theta} + H_e^T = Q_\theta \quad (29)$$

$$\text{弾性変形: } M_e \left(U_n - \sum_{j=1}^n m^j / \mathcal{M} \right) \ddot{u} + K_e u + H_e \dot{\theta} = Q_e \quad (30)$$

モード解析は (30) 式の u に関する斉次式

$$M_e \left(U_n - \sum_{j=1}^n m^j / \mathcal{M} \right) \ddot{u} + K_e u = 0 \quad (31)$$

について行う。この場合の拘束条件は、並進自由で回転のみ拘束する “translationally free but constrained against rotation” である。モード解析の結果得られる固有ベクトル ϕ を用いて (20) 式と同様な変数変換を行えば、(29) および (30) 式は

$$I\ddot{\theta} + \delta^T \ddot{\eta} = Q_\theta \quad (32)$$

$$\ddot{\eta} + \Omega^2 \eta + \delta \ddot{\theta} = \phi^T Q_e \quad (33)$$

ただし

$$\delta = \phi^T H_e \quad (34)$$

である。ここで、トランケーションを行い、 η を $\bar{\eta}$ に次元低下する。($2N+6$) 次元の状態ベクトル X を

$$X = [\theta : \bar{\eta} : \dot{\theta} : \dot{\bar{\eta}}] \quad (35)$$

で定義し、トランケーション後の行列を $\bar{\delta} = \phi^T H_e$ 等と記せば、(32), (33) 式から状態方程式

$$\begin{bmatrix} U_{3+N} & O \\ \dots & \dots \\ O & I & \bar{\delta}^T \\ \dots & \dots & \dots \\ \bar{\delta} & U_N \end{bmatrix} \dot{X} + \begin{bmatrix} O & -U_{3+N} \\ \dots & \dots \\ O & O & O \\ \dots & \dots & \dots \\ O & \Omega^2 & \dots \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} O \\ \dots \\ Q_\theta \\ \dots \\ \phi^T Q_e \end{bmatrix} \quad (36)$$

を得る。

4. ヴィクル・モード法

4.1 通常のヴィクル・モード法 この方法では、(1)~(3) 式の変数 x, θ, u を統合 (aggregate) して

変数 $q = [x^T, \theta^T, u^T]^T$ を定義し、原始モデルを次の形になおす。

$$M\ddot{q} + Kq = Q \quad (37)$$

ただし、

$$M = \begin{bmatrix} M & O & P_e^T \\ O & I & H_e^T \\ P_e & H_e & M_e \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} O & O & O \\ O & O & O \\ O & O & K_e \end{bmatrix},$$

$$Q = \begin{bmatrix} Q_x \\ Q_\theta \\ Q_e \end{bmatrix} \quad (38)$$

拡張された質量行列 M は正定 (positive definite)、剛性行列 K は半正定 (positive semidefinite) な ($6+n$) 次元の対称行列である。通常のヴィクル・モード法では剛性行列の半正定を保持したまま (37) 式の斉次方程式に対してモード解析を行って、正規モード (normal mode) に対応する固有値・固有ベクトルを得る。固有ベクトルから構成される変換行列 T により、実変位 q はモード座標 η に次式により変換できる。

$$q = T\eta \quad (39)$$

(39) 式を (37) 式に代入して左から T^T をかければ

$$(T^T M T) \ddot{\eta} + (T^T K T) \eta = T^T Q \quad (40)$$

となる。ここで、 M, K の性質から正規化・直交化

$$T^T M T = U_n \quad (41)$$

$$T^T K T = \bar{K} \quad (42)$$

が可能である。ただし、 $\bar{K}$ は剛体モードを含む固有振動数の自乗を対角要素とする行列で、すでに得られている正規モードの非ゼロ固有値を対角要素に並べた行列を ω とすると、

$$\bar{K} = \begin{bmatrix} O & O \\ \dots & \dots \\ O & \omega^2 \end{bmatrix} \quad (43)$$

で与えられる。以上により、完全に無干渉なモード座標に分解された方程式

$$\ddot{\eta} + \bar{K}\eta = T^T Q \quad (44)$$

を得る。(43) 式から明らかなように、 η の最初の 6 要素 η_j ($j=1, 2, \dots, 6$) は剛体モードに対応し、 $\eta_j = (T^T Q)_j$ の形をとる。

ダイナミック・シミュレーションあるいは制御系設計のために必要なトランケーション (truncation) は (44) 式に対して行い、 n 個すべてのモードを含む n から、‘重要と思われる’ N モードのみ抽出して ($N+6$) 行列 $\bar{\eta}$ を構成し、($n-N$) 個のモード $\bar{\eta}$ はモデルから除去する。係数行列 $\bar{K}$ および変換行列 T に対しても同様に

$$\bar{K} = \text{diag} [\bar{K} : \bar{K}] = \begin{bmatrix} O & O & O \\ \dots & \dots & \dots \\ O & \bar{\omega}^2 & O \\ \dots & \dots & \dots \\ O & O & \bar{\omega}^2 \end{bmatrix},$$

$$T^T Q = \begin{bmatrix} \bar{T}^T Q \\ \bar{T}^T Q \end{bmatrix}$$

を定義すれば, (44)式は

$$\dot{\eta} + \bar{K}\eta = \bar{T}^T Q \quad (45 \text{ a})$$

$$\dot{\eta} + \bar{K}\eta = \bar{T}^T Q \quad (45 \text{ b})$$

に分解される. 観測方程式 ((6)式)は

$$y = [O : \mathcal{F} : \mathcal{L}_0] T(\eta + \bar{\eta}) \\ + [O : \mathcal{G} : O] T(\eta + \bar{\eta}) \quad (46)$$

となる.

このトランケーションによって制御モデルに残されたモード η (retained mode または controlled mode) は, 切り捨てられたモード $\bar{\eta}$ (residual mode) と変数の上では無干渉化されている. しかしながら, 制御量 Q が, (45 b) 式により $\bar{\eta}$ を励起したり (control spillover と呼ばれる), 観測量 y が (46) 式から明らかのように $\bar{\eta}$ の影響を受けたりする (observation spillover と呼ばれる). これらの現象は初期の論文においても定式化されてはいたが (たとえば文献 4) 参照), spillover 現象として明確な定義を下し, 最適制御問題における分離定理への影響を論じたのは BALAS¹²⁾ である.

以上の問題を含みながらも, 制御モデルとしては低次元化された (45 a) 式を使用せざるをえない. このとき, 状態ベクトル X を

$$X = [\eta^T : \bar{\eta}^T]^T \quad (47)$$

で定義すれば (45 a, b) 式, (46) 式はおのの

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} O & U_N \\ -\bar{K} & O \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} O \\ \bar{T}^T Q \end{bmatrix} \quad (48)$$

$$y = \begin{bmatrix} O & \mathcal{F}T & \mathcal{L}_0T \\ O & \mathcal{G}T & O \end{bmatrix} X \quad (49)$$

で近似されることになる. (48) 式の X の係数行列について固有値解析を行い, その結果得られる固有ベクトルで構成される変換行列を用いれば, (48) 式は 12×12 のジョルダン行列と $(2N \times 2N)$ の対角行列 (対角要素は ω およびその複素共役 ω^*) からなる正準形に変換される.

4.2 HUGHES による記述法⁸⁾ 自由振動に対する α 次のヴィクル・モードの記述法として, 質量中心 O に対する位置 r における変位を表わす 3×1 行列 w_α を, 中心剛体 ($\mathcal{R}$) と, 柔軟付属物 $\left(\sum_{k=1}^{N_s} \varepsilon_k \right)$ とについて表わすと, 次のようになる.

$$w_\alpha(r) = x_{0\alpha} - \bar{r}\theta_\alpha + \begin{cases} 0 & (r \in \mathcal{R}) \\ u_\alpha & (r \in \sum \varepsilon_k) \end{cases} \quad (50)$$

このとき, (44) 式に列応して,

$$\ddot{w}_\alpha + \omega_\alpha^2 w_\alpha = 0 \\ \omega_\alpha^2 (p_\alpha + m x_{0\alpha}) = 0; \omega_\alpha^2 (h_\alpha + I \theta_\alpha) = 0 \quad (51)$$

ただし,

$$p_\alpha \triangleq \sum_{k=1}^{N_s} \int_{\varepsilon_k} u_\alpha dm; h_\alpha \triangleq \sum_{k=1}^{N_s} \int_{\varepsilon_k} \bar{r} u_\alpha dm \quad (52)$$

はおのおの $\sum \varepsilon_k$ での弾性変形による運動量, 角運動量であり, (51) 式の前 2 式は衛星全体に働く外力, モーメントがないとき全運動量, 全角運動量が保存されることを示し, 剛体モードについては $\omega_\alpha = 0$, 柔軟モードについては $\omega_\alpha \neq 0$ である. また (51), (52) 式から w_α に対する正規直交性が導かれる.

以上から, 外力のあるときの変位を

$$w(r, t) = X - \bar{r}\theta + \begin{cases} 0 & (r \in \mathcal{R}) \\ \sum_{\alpha=1}^{\infty} w_\alpha(r) \eta_\alpha & (r \in \sum \varepsilon_k) \end{cases} \quad (53)$$

と記述すると, ヴィクル・モードに対する運動方程式は次のように得られる.

$$m\ddot{X} = Q_x; \quad I\ddot{\theta} = Q_\theta \\ p_\alpha^T \ddot{X} + h_\alpha^T \ddot{\theta} + \eta_\alpha + \omega_\alpha^2 \eta_\alpha = \sum_{n=1}^{N_s} \int_{\varepsilon_n} u_\alpha^T Q_\varepsilon dt \\ (\alpha = 1, 2, \dots) \quad (54)$$

または, (51) 式から, 柔軟モードに対する式は,

$$\ddot{\eta}_\alpha + \omega_\alpha^2 \eta_\alpha = \sum_{k=1}^{N_s} \int_{\varepsilon_k} u_\alpha^T Q_\varepsilon dt + w_{0\alpha}^T Q_x + \theta_\alpha^T Q_\theta \quad (54)'$$

とも書ける.

4.3 MEIROVITCH の方法¹⁰⁾ 一般化された弾性変形を含む原始モデル (10) ~ (12) 式の変数を状態ベクトル X に統合し, 諸パラメータ行列を次のように定義する.

$$X_M = [\dot{x}^T : \dot{\theta}^T : \dot{\zeta}^T : x^T : \theta^T : \zeta^T]^T \quad (55) \\ I_M = \begin{bmatrix} M & O \\ O & K \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} O & K \\ -K & O \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} Q \\ \dots \\ O \end{bmatrix} \quad (56)$$

ただし, 行列 M, K および Q は, (18) 式の定義において添字 e を E に換え (10) ~ (12) 式に対応させたものである. 行列 K は半正定であるから, I_M も半正定であり, G は反対称 (skew symmetric) である. これらの定義により, (10) ~ (11) 式は

$$I_M \ddot{X}_M + G X_M = F \quad (57)$$

となる. 原始モデルの相異による u と ζ を除けば, (57) 式は (17) 式を状態ベクトルで表現したものにはかからない. ただし, (55) 式の X_M の各変数の並べ方が通常の状態変数と異なる. その理由は, MEIROVITCH の開発したジャイロスコピックな系の固有値問題を実対称行列の固有値問題に帰着させる方法¹³⁾ を適用することを意図しているからである. 行列 I_M の半正定によりその結果がただちに適用できないため, 制御により正定化を行う. すなわち, 制御レベルを二つに分

け、第1レベルでは剛体モードを、第2レベルでは振動モードをおのおの制御する。具体的には、

$$Q_x = -K_x x, Q_\theta = -K_\theta \theta \quad (58)$$

による状態フィードバックにより系を補強 (augment) することにより、(56)式の K は

$$K_s = \begin{bmatrix} K_x & O & O \\ O & K_\theta & O \\ O & O & K_E \end{bmatrix} \quad (59)$$

となり、これに従って I_M, G, F はそれぞれ I_s, G_s, F_s に書きなおせば、(57)式は

$$I_s \dot{X}_M + G_s X_M = F_s \quad (60)$$

となる。行列 K が正定であるから、 I_s も正定となり先に述べた標準的な固有問題を解いて得られる固有ベクトルによって変換行列 P が生成できる^{10), 13)}。これにより、

$$X_M = Pw \quad (61)$$

なる変換を行えば、全系は正準形

$$\dot{w} = Aw + P_s^T F_s \quad (62)$$

で表わされる。ここで A は固有振動数を要素とする対角行列である。したがって、第2レベルの制御では、完全に無干渉化された系を扱えばよい。とくに、各モードを単独に制御するモード制御器を制御すべきモード数だけ用意すれば、他のモードにまったく影響を与えない制御が可能であり、制御のスビルオーバーは回避できる。

以上が、MEIROVITCH が数多くの論文でくり返し主張するモデリングおよび制御の基本概念である。

5. 付属物モード法とヴィクル・モード法に対する比較・検討

本章では、前章までで得られた数学モデルに対する比較・検討手法として、固有値問題に基づく手法と、グリーン関数に基づく手法を紹介する。これらによって、付属物モード法とヴィクル・モード法の両展開による固有値他のモード展開変数の関係、ならびにトラッキングによる誤差の性質が明らかになる。

5.1 固有値問題¹⁴⁾ 一般に、姿勢運動・制御として、衛星の回転運動が重要な問題になる。この節では、簡単のために、(32), (33)式、ならびに、記号の意味は異なるが同等の表現として、衛星の非対称変形*(asymmetric deformation) 運動のみを考えることによって並進運動を省略した式(22), (23)を取り扱う。このことによって本質は失われず、また、並進運動を含めるように拡張することは容易である。

(32), (33)式は無次元化した変数

$$\gamma \triangleq I^{1/2}\theta, \Delta \triangleq \delta I^{1/2}, u_\theta \triangleq I^{-1/2}Q_\theta, u_e \triangleq \phi^T Q_e \quad (63)$$

($\Delta \triangleq \phi^T H_e I^{-1/2}$, $u_e \triangleq \phi^T Q_e$ と定義すれば、(22), (23)式も同等の取扱いとなる)を用いて

$$\begin{aligned} \ddot{\gamma} - \Delta^T \ddot{\eta} &= u_\theta \\ \ddot{\eta} + \Omega^2 \eta - \Delta \ddot{\gamma} &= u_e \end{aligned} \quad (64)$$

ここで、無次元化されたカップリング行列 Δ は

$$\Delta = \begin{bmatrix} \Delta^1 \\ \Delta^2 \\ \vdots \end{bmatrix}, \Delta^j = [\Delta_1^j, \Delta_2^j, \Delta_3^j] \quad (0 \leq \Delta_4^j < 1) \quad (j=1, 2, \dots)$$

であり、ヴィクル・モードに対応させるため状態方程式で記述すると次式が得られる。

$$\dot{X} = AX + Bu \quad (65)$$

ただし、

$$X = \begin{bmatrix} \gamma \\ \dot{\gamma} \\ \eta \\ \dot{\eta} \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} O & U_3 & O & O \\ O & O & -\Delta^T M_1 \Omega^2 & O \\ O & O & O & U_n \\ O & O & -M_1 \Omega^2 & O \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} O & O \\ M_2 & \Delta^T M_1 \\ O & O \\ \Delta M_2 & M_1 \end{bmatrix}, u = \begin{bmatrix} u_\theta \\ u_e \end{bmatrix}$$

$$M_1 = (U_n - \Delta \Delta^T)^{-1}, M_2 = (U_3 - \Delta^T \Delta)^{-1}$$

ヴィクル・モードの固有値は、行列 A の固有値 ω であり、この固有ベクトルを $\gamma, \dot{\gamma}, \eta, \dot{\eta}$ に対応して $x_1 \sim x_4$ に分解すれば、この固有値問題は次のように分解される：

$$\left. \begin{aligned} \left[\begin{array}{c|c} \omega U_3 & -U_3 \\ \hline O & \omega U_3 \end{array} \right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \left[\begin{array}{c|c} O & O \\ \hline \Delta^T M_1 \Omega^2 & O \end{array} \right] \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} &= 0 \\ \left[\begin{array}{c|c} \omega U_n & -U_n \\ \hline M_1 \Omega^2 & \omega U_n \end{array} \right] \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (66)$$

したがって、剛体モード ($\omega=0$) の6個に対する固有ベクトルは

$$x_1 = \text{任意}, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0 \quad (67)$$

また、柔軟モード ($\omega \neq 0$) に対する固有ベクトルは

$$(M_1 \Omega^2 + \omega^2 U_n) \phi = 0 \quad (68)$$

$$x_3 = \phi, x_4 = \omega \phi$$

$$x_2 = -(1/\omega) \Delta^T M_1 \Omega^2 \phi, x_1 = (1/\omega) x_2$$

で与えられる。また、剛体モードについては零固有値をもつことは明らかで、柔軟モードに対する固有値 ω は $\mu = -\omega^2$ とおいて

$$|M_1 \Omega^2 - \mu U_n| = 0 \quad (69)$$

または、

$$|M_1^{-1} \cdot | \mu U_n - \Omega M_1 \Omega | = 0 \quad (70)$$

* HUGHES らは、これを点対称の意味で Symmetry と呼んでいることに注意したい (たとえば文献 6))。

すなわち、実対称・正定行列の根として求まる。また、固有値 μ_α に周する固有ベクトル ψ^α は、

$$\psi^\alpha = (\mu_\alpha U_n - \Omega^2)^{-1} \Delta \chi^\alpha \quad (71)$$

から求まる。ただし、 χ^α は 3 次元行列

$$\{U_n - \mu_\alpha \Delta^T (\mu_\alpha U_n - \Omega^2)^{-1} \Delta\} \chi^\alpha = 0$$

の非零解である。

5.2 モーダル・アイデンティティ (modal identities)⁸⁾ HUGHFS は、グリーン関数を用いて、固有振動数とモード形状の積分、すなわち、運動量と角運動量、のモード変数が満たすべきアイデンティティを以下に引用するものを含めて計 25 個導いた。一般に、剛体モードと柔軟モードとの相互作用が問題となることを考えれば、モード形状よりもむしろ、(21)~(23) 式では付属物モード j の運動量 P_{jk} と角運動量 H_{jk} 、

$$P_{jk} \triangleq \int_{\mathcal{E}_k} U_j(r) dm; H_{jk} \triangleq \int_{\mathcal{E}_k} \tilde{r} U_j(r) dm \quad (72)$$

または、弾性変形の自由度 n を無限大に拡張して、

$$\sum_{k=1}^{N_s} \sum_{j=1}^{\infty} P_{jk} = P_c^T \Phi_c; \sum_{k=1}^{N_s} \sum_{j=1}^{\infty} H_{jk} = H_c^T \Phi_c$$

が、そして、ヴィクル・モードでの (54) 式では、 p_j , h_j がおのおの重要となることがわかる。ここで、 $U_j(r)$ は付属物モード j の 3×1 行列で示したモード形状であり、正規直交性および完全性は保証されているものとする。

5.2.1 付属物モードにおけるアイデンティティ 一般に、本問題においては収束性は保証されるのでグリーン関数 F は

$$F(r, \xi) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{U_j(r) U_j^T(\xi)}{\Omega_j^2} \quad (73)$$

となる。モード形状 U_j は直交性を満たしているから、

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\Omega_j^2} &= \text{trace} \int_{\mathcal{E}_k} F(r, r) dm \\ \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\Omega_j^4} &= \text{trace} \int_{\mathcal{E}_k} \int_{\mathcal{E}_k} F(\xi, r) F(r, \xi) dm^r dm^\xi \\ &\dots\dots\dots \end{aligned} \quad (74)$$

また、モード形状 $U_j(r)$ は完全性を満足しているからモード運動量に関して次のようなアイデンティティが得られる。

$$P_k^T P_s = m_k U_-; H_k^T P_s = \tilde{C}_k; H_k^T H_s = J_k \quad (75)$$

ここで、 r の基準点は中心剛体内にとり、

$$\begin{aligned} m_c &= \sum_{r=1}^{N_s} m_r = \sum_{n=1}^{N_s} \int_{\mathcal{E}_k} dm \\ C_c &= \sum_{r=1}^{N_s} C_r = \sum_{k=1}^{N_s} \int_{\mathcal{E}_k} r dm \\ J_c &= \sum_{r=1}^{N_s} J_r = - \sum_{k=1}^{N_s} \int_{\mathcal{E}_k} \tilde{r} \tilde{r} dm \\ P_k^T &\triangleq [P_{1k} \ P_{2k} \ \dots] \\ H_k^T &\triangleq [H_{1k} \ H_{2k} \ \dots] \end{aligned}$$

である。

5.2.2 ヴィクル・モードにおけるアイデンティティ 同様に、

$$\begin{aligned} \text{trace} \sum_{k=1}^{N_s} \int_{\mathcal{E}_k} F_k(r, r) dm \\ = \sum_{\alpha=1}^{\infty} \frac{1 + m \omega_{0\alpha}^T \omega_{0\alpha} + \theta_\alpha^T I \theta_\alpha}{\omega_{\alpha}^2} \end{aligned} \quad (76)$$

ここで、衛星全体の質量中心を r の原点にとり $J \rightarrow I$, また $m = m_r + m_c$, $I = I_r + I_c$ である。ここで、添字 r は中心剛体に関する値を示す。

また、後出の式 (89) と (51) とから、モード運動量、角運動量に関して次が得られる。

$$\sum_{\alpha=1}^{\infty} p_\alpha p_\alpha^T = [m_c m / m_r] U_3 - m^2 \tilde{r}_{cr} I_r^{-1} \tilde{r}_{cr} \quad (77)$$

$$\sum_{\alpha=1}^{\infty} p_\alpha h_\alpha^T = m \tilde{r}_{cr} I_r^{-1} I \quad (78)$$

$$\sum_{\alpha=1}^{\infty} h_\alpha h_\alpha^T = I I_r^{-1} I - I \quad (79)$$

ここで、 r_{cr} は剛体の質量中心位置を表わす行列であり、 $I_r = J_r + m_r \tilde{r}_{cr} \tilde{r}_{cr}$ である。

以上が、各モード展開が完全なときに満たされるべきアイデンティティであり、トランケーションの指標として用いることができる。また、これらは、両モード間の互換等に有用性をもつ。

5.3 付属物モードとヴィクル・モード

5.3.1 固有値の関係¹⁴⁾ 固有値解析から、両モードの固有値は (70) 式で関係づけられる。この式は解析的に解けないが、行列 $\Omega M_1 \Omega$ の性質を利用して次のような特性が明らかになる。

a. μ は正であり、ヴィクル・モードの固有値 $\omega_\alpha = \pm \sqrt{-\mu_\alpha}$ は純虚数である。

b. 第 α モードに対して $\Delta^\alpha = 0$ ならば、 $\omega_\alpha = \Omega_\alpha$, すなわち、中心剛体と柔軟物との干渉がないモードでは、両モードの周波数は一致する。

c. すべての μ は Ω^2 より大きい、したがって $|\omega_1| > \Omega_1$ となり、ヴィクル・モードの最低周波数は、付属物モードのそれより大きい。

d. 付属物モード周波数が単根で十分離れており、干渉が強い ($\Delta^\alpha \Delta^{\alpha T} \approx 0$) 場合には、 μ_α は Ω_α^2 で分離される。すなわち、

$$\Omega_1 < |\omega_1| < \Omega_2 < |\omega_2| < \dots < \Omega_n < |\omega_n| < \dots \quad (80)$$

e. Minimax 定理による固有値評価によって、

$$\frac{\Omega_\alpha^2}{1 - \Delta^\alpha \Delta^{\alpha T} + \varepsilon} \leq \omega_\alpha^2 \leq \frac{\Omega_\alpha^2}{1 - \Delta^\alpha \Delta^{\alpha T} - \varepsilon} \quad (81)$$

ここで、 $\varepsilon = \sqrt{\Delta_\alpha \Delta^{\alpha T} (\hat{\Omega}^\alpha / \Omega_\alpha)^2 \Delta_\alpha \Delta^{\alpha T}}$, また、 $\hat{\Delta}^\alpha, \hat{\Omega}^\alpha$ は、 Δ, Ω の第 α 行を取り除いた行列である。これから、高次の柔軟モードに対しては、 $\varepsilon \sim 0$ となるから、

$$|\omega_a| \sim \frac{\Omega_a}{\sqrt{1 - \Delta^a \Delta^{a*}}} \quad (82)$$

なる両モード振動数間の近似関係式が得られる。

5.3.2 モード座標の関係^{6), 8), 14), 15)} HUGHES のヴィクル・モードの記述法を用いれば, (21)~(23)式と(54)式との比較から, 中心剛体の変位 x , θ とヴィクル・モードの剛体モード X , Θ , ならびに柔軟モード η との間には, 次の関係が得られる。

$$x = X + \sum_{\alpha=1}^{\infty} x_{\alpha\alpha} \eta_{\alpha}; \quad \theta = \Theta + \sum_{\alpha=1}^{\infty} \theta_{\alpha} \eta_{\alpha} \quad (83)$$

5.1 節で取り扱った並進運動を省略した場合には, (39)式の変換行列 T は次のように求まる。

$$T = \begin{bmatrix} I^{-1/2} & \theta_1 & \theta_2 & \cdots \\ 0 & t_1 & t_2 & \cdots \end{bmatrix} \quad (84)$$

ここで, t_{α} はヴィクル・モードを付属物モードの線形結合で表わしたときの定数であり, 次の関係がある。

$$\theta = I^{-1/2} \Theta + \sum_{\alpha=1}^{\infty} \theta_{\alpha} \eta_{\alpha}, \quad q = \sum_{\alpha=1}^{\infty} t_{\alpha} \eta_{\alpha} \quad (85)$$

また, (70)と(71)式から, 固有値 ω (複素共役 ω^*) と固有ベクトル ψ とを用いて変換行列 T は次のようにも求まる。

$$T = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ \vdots & \vdots \\ 0 & T_{22} \end{bmatrix} \quad (86)$$

ただし,

$$T_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$T_{12} = \begin{bmatrix} \Delta^T \psi & \vdots & \Delta^T \psi \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \Delta^T \psi \omega & \vdots & \Delta^T \psi \omega^* \end{bmatrix}, \quad T_{22} = \begin{bmatrix} \psi & \vdots & \psi \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \psi \omega & \vdots & \psi \omega^* \end{bmatrix} \quad (87)$$

以上, (83), (84)式, また, (86)式から, ヴィクル・モードで表わしたときの剛体モード座標と中心剛体の変位とに介在する柔軟モード座標の関係が明らかになる。

5.3.3 伝達関数表示による比較^{2), 4), 5), 8)} 付属物モードにおける(21)~(23)式をラプラス変換し(初期条件を零とする), 剛体変位 $\bar{q}_r^T = [\bar{x}, \bar{\theta}]$ の制御力 $\bar{u}_r^T(s) = [\bar{Q}_x, \bar{Q}_{\theta}]$ に対するイナータンス (system inertia) $\bar{M}$ を考えると, 次のようになる。

$$\bar{M}(s) s^2 \bar{q}_r = \bar{u}_r(s) \quad (88)$$

ここで,

$$\bar{M}(s) = \begin{bmatrix} m_r U_3 & 0 \\ 0 & I_r \end{bmatrix} - \sum_{k=1}^{N_r} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{s^2 \begin{bmatrix} P_{jk} \\ H_{jk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{jk} \\ H_{jk} \end{bmatrix}^T}{s^2 + \Omega_{jk}^2}$$

また, 入力 $\bar{u}_r(s)$ は

$$\bar{u}_r(s) = \bar{u}_r(s) - \sum_{k=1}^{N_r} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{s^2 \begin{bmatrix} P_{jk} \\ H_{jk} \end{bmatrix} \phi_c^T \bar{Q}_c(s)}{s^2 + \Omega_{jk}^2}$$

このイナータンス $\bar{M}(s)$ は慣性モーメントと同じ単位を有するので, effective inertia matrix^{4), 5)} などとも呼ばれる。

ヴィクル・モードについては, (54)式で表わされる系にラプラス変換を施すと, 先と同様な表示を得る。

$$s^2 \bar{q}_r = \bar{M}^{-1}(s) \bar{u}_r + \bar{u}_{ee} \quad (89)$$

ここで,

$$\bar{M}^{-1}(s) = \begin{bmatrix} m_r U_3 & 0 \\ 0 & I_r \end{bmatrix}^{-1} + \sum_{\alpha=1}^{\infty} \frac{s^2 \begin{bmatrix} x_{0\alpha} \\ \theta_{\alpha} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{0\alpha} \\ \theta_{\alpha} \end{bmatrix}^T}{s^2 + \omega_{\alpha}^2}$$

$$\bar{u}_{ee}(s) = \sum_{\alpha=1}^{\infty} \frac{s^2 \begin{bmatrix} x_{0\alpha} \\ \theta_{\alpha} \end{bmatrix}}{s^2 + \omega_{\alpha}^2} \sum_{k=1}^{N_r} \int_{t_k}^{\infty} u_{\alpha}^T \bar{Q}_c dt$$

(88)式から, 付属物モード解析の特徴は, 柔軟性が, 全システムに対して, フィード・バック系で構成されるような影響を, また, (89)式から, ヴィクル・モード解析の特徴は, これが, フィード・フォワード系で構成されるような影響を与えることがわかる。

いま, 衛星にヴィクル・モードの固有振動数 ω_m の制御力が作用すると(89)式から

$$\bar{M}(i\omega_m) = 0 \quad (90)$$

すなわち, 大きな応答が生じる。一方, 付属物モードの固有振動数 Ω_m の制御力が作用すると, (88)式から

$$\bar{M}(i\Omega_m) = \infty \quad (91)$$

すなわち, 振動は柔軟モードに吸収され, 中心剛体は応答しないと考えられる。このことから, 衛星本体の運動が問題となる場合の制御では, Ω_m よりも ω_m , すなわち, ヴィクル・モードの振動数を避けねばならないことに注意する必要がある。

6. トランケーション

4章で示した数学モデルは, 実際の物理系に付随する力学特性を近似したものであることにまず注意が必要である。ついで, 柔軟宇宙船を数学モデルとして表現するために用いられる手法として, a) ランプ法 (lumping method), b) 有限要素法, c) マトリクス構造解析, d) 偏微分方程式の直接解法, 等がある。このうち, 最後の手法は単純な構造に対してしか適用できず, 他の手法については適用にあたり, すでに柔軟構造物の自由度は有限にとどまると考えるべきである。この時点で, 第一次のトランケーションが行われている。このことは, 本稿の対象外であるが, 以上の数学モデルは物理系に対するあくまで近似にすぎないことに注意が必要である。

この原始モデルの自由度が決定した時点で、前に示した種々の数学モデルの記述法は、変換に伴う数値計算誤差を伴わなければすべて同等であることは明らかである(ただし、MEIROVITCHの方法では、 $\phi_j(\xi)$ が原始モデルの正しい解であることが必要である)。とはいえ、この時点で数学モデルが有する自由度はきわめて多い。したがって、制御を行うためには、センサ/アクチュエータの数が限られていることと、計算容量に対する実装面から、また、ダイナミック・シミュレーションにおいても計算容量・速度・精度の面から、数学モデルの低次元化(トランケーション)を行う必要があり、このため種々の数学モデル記述法におけるトランケーション誤差が問題となる。

このようなトランケーションについては、可能なかぎり制御系をも組み込んだ後期の段階で行われるのが理想的であるが、一般に次元が大きくなるから、付属物モード→ヴィクル・モード→開ループ系モード→閉ループ系モードの各段階で次元低下が行われる必要がある。もちろん、可能であれば各段階でのトランケーションをとばすことができる。

このトランケーションの規範については、前章の結果を用いて、モード周波数に基づく手法と、モード・アイデンティティに基づく手法があり以下に紹介する。ほかに、伝達関数⁶⁾、モード可制御/可観測性¹⁵⁾、ならびに、ミッションの評価関数の各モードへのかかわりによるモード・コスト解析¹⁶⁾に基づく手法を加えることができる。

6.1 モード周波数に基づくトランケーション規範^{6), 16)~18)}

規範a. 制御力に含まれる最大振動周波数より十分高い周波数をもつ正規モード座標はトランケートできる。

(45)式からは、切り捨てられたモード $\bar{q}$ と残されたモードとは無干渉化されているから、数値計算誤差を考えないと、この規範が適用できる。この規範の正当性は、1)宇宙空間での外乱は低周波数域にあり、制御系や衛星内部の運動等が高周波数域の外乱の源でありうる、2)非常に高い振動周波数域での原始モデルには誤差が伴う、の2点にある。

規範b. 上の規範による正規座標トランケーションによって残される(21)~(23)式の固有値 μ に対して、トランケートされた(24)~(26)式の固有値 μ' がよい近似を与える限り、付属物モード座標はトランケートできる。

この μ_j' は式(70)と同様に、次式から求まる。

$$|\mu U_N - \bar{M}_1 \bar{Q}^2| = 0 \quad (j=1, \dots, \bar{N}) \quad (92)$$

$$|\mu U_N - \bar{M}_1 \bar{Q}^2| = 0 \quad (j=\bar{N}+1, \dots) \quad (93)$$

ここで、

$$\bar{M}_1 \triangleq (U_N - \bar{A} \bar{A}^T)^{-1}, \quad \bar{M}_1 \triangleq (U_N - \bar{A} \bar{A}^T)^{-1}$$

ついで、 μ_j の逆数 $\nu_j \triangleq 1/\mu_j$ ($j=1, \dots$) は

$$|\nu U_N - Q^{-1} M_1^{-1} Q^{-1}| = 0 \quad (94)$$

の解であることを利用して、 $Q^{-1} M_1^{-1} Q^{-1}$ のカップリング項の固有値 τ_j

$$\left| \tau^2 U_N - \begin{bmatrix} O & -\bar{Q}^{-1} \bar{A} \bar{A}^T \bar{Q}^{-1} \\ -\bar{Q}^{-1} \bar{A} \bar{A}^T \bar{Q}^{-1} & O \end{bmatrix} \right| = 0 \quad (95)$$

または、

$$|\tau^2 U_N - (\bar{A}^T \bar{Q}^{-2} \bar{A})(\bar{A}^T \bar{Q}^{-2} \bar{A})| = 0 \quad (96)$$

を用いると、

1. WIELANDT-HOFFMAN 定理の応用から

$$\sum_{j=1}^N (1/\mu_j - 1/\mu_j')^2 \leq 2 \text{ trace}(\bar{A}^T \bar{Q}^{-2} \bar{A})(\bar{A}^T \bar{Q}^{-2} \bar{A}) \quad (97)$$

2. Minimax 定理から

$$\frac{\mu_j'}{1 + \mu_j' \tau_1^2} \leq \mu_j \leq \frac{\mu_j'}{1 - \mu_j' \tau_1^2} \quad (98)$$

(ただし、 τ_1^2 は式(96)の最大の根)

が得られ、これらが、付属物モードのトランケーションによるヴィクル・モードのトランケーション誤差の評価を与える。

6.2 慣性的な完備性に基づく規範⁶⁾ HUGHES が示したモード・アイデンティティはモード展開において、モード変数が理想的には、付属物モードでは(75)式、ヴィクル・モードでは(77)~(79)式、を満たすことを示している。

付属物モードにおいては、(75)式から、次のような N_e 個の柔軟物 e_n に対する慣性的な完備性指標(inertial completeness index)が定義できる。

$$\mathcal{J}_k \triangleq \rho \left[M_{rk}^{-1/2} \begin{bmatrix} P_k^T P_k & P_k^T H_k \\ H_k^T P_k & H_k^T H_k \end{bmatrix} M_{rk}^{-1/2} \right] \quad (99)$$

$$(k=1, \dots, N_e)$$

ここで、 ρ はスペクトル・ノルムで、 $\rho[\cdot]=1$ が全完備(totally complete)を示し、

$$M_{rk} \triangleq \begin{bmatrix} \mathcal{M}_k U_k & -\tilde{C}_k \\ \tilde{C}_k & J_k \end{bmatrix}$$

である。したがって、トランケーションは $\mathcal{J}_n$ ができるだけ1に近い範囲で行うことになる。また、明らかに姿勢運動のみを問題とすると、ならびに、並進運動のみを問題とするときには、慣性的な完備性指標として、

$$\mathcal{J}_k \triangleq \rho[J_k^{-1/2} H_k^T H_k J_k^{-1/2}], \quad \mathcal{J}_k \triangleq \mathcal{M}_k^{-1} \rho[P_k^T P_k] \quad (100)$$

を、おのおの、用いることができる。

ヴィクル・モードにおけるトランケーションについても、同様に(77)~(79)式を用いることができる。こ

ここでは簡単のため、非対称変形運動のみを考える。このとき、慣性的な完備性指標は、

$$\sum_{\alpha=1}^{\infty} h_{\alpha} h_{\alpha}^T = I I_r^{-1} I - I \quad (101)$$

で与えられ、式(51)を用いると

$$\sum_{\alpha=1}^{\infty} \theta_{\alpha} \theta_{\alpha}^T = I_r^{-1} - I^{-1} = I_r^{-1} (I - I_r) I^{-1} \quad (102)$$

すなわち、 I_r が小さくなると、ある値の慣性的な完備性指標が与えられたとき、多くのモードがとられなければならないことがわかる。これから、完備性指標を

$$\mathcal{J} \triangleq \rho \left[I_r^{1/2} \left(\sum_{\alpha=1}^N \theta_{\alpha} \theta_{\alpha}^T + I^{-1} \right) I_r^{1/2} \right] \quad (103)$$

のように定義できる。したがって、この指標によって $\mathcal{J}$ に大きく寄与するヴィクル・モードは保持されねばならない。

ここで、付属物モード展開に関して周波数に基づくトランケーション規範と比較すると、非常な高周波数域は、完備性指標に寄与しにくいから、一般には両方の規範は似た傾向をもつと考えられる。すなわち、無限級数

$$\sum_{j=1}^{\infty} P_{jk} P_{jk}^T = \mathcal{M}_k U^{-1}, \quad \sum_{j=1}^{\infty} H_{jk} H_{jk}^T = J_k$$

が収束するなら、 $\Omega_{jk} \rightarrow \infty \Rightarrow \|P_{jk}\| \rightarrow 0; \|H_{jk}\| \rightarrow 0$ となる。したがって、付属物モードにおいては、この類似は考えられるが、とくにヴィクル・モードにおいては、それほど高くない周波数域では必ずしもそうならない (6.3 節)。

6.3 付属物モードとヴィクル・モード 付属物モードと、ヴィクル・モードはトランケーションによって近似モード展開となるが、厳密さからいえば後者の近似度が勝るといえる。また、5.3 節によって、加振がヴィクルモード周波数のとき、中心剛体の応答は理論的に無限大である。これはヴィクル・モード展開からは明らかであるが、付属物モード展開では過小評価をすることになり、制御の面から考えるとヴィクル・モード展開のほうがよりよい情報を含んでいて有利であることがわかる。

しかしながら、付属物モードは次のような実用性をもっている。まず、付属柔軟物は、それ自身で特性を調べることが多く、また、これのモードを調べることは、ヴィクル・モードの場合よりわかりやすく、かつ、一般的に容易である。ついで、付属物モード展開を用いトランケートすることによって、自由度が非常に多くなることを避けることができる。これらのことは、対象とするシステムによって有利性が異なってくることは明らかである。

したがって、付属物モードとヴィクル・モードの導

入と、各段階でのトランケーションの方法はケース・バイ・ケースと考えられ、対象となる衛星の形状・システムによって使い分けられるべきであろう。いくつかの、両モード展開の数値シミュレーションの結果を以下に示す。

ヘルメス (Hermes) 衛星のモデルについて、GARG¹⁰⁾ は周波数トランケーションに伴う両モード展開と、周波数領域での厳密解とを比較している。このシミュレーションによると、中心剛体の占める割合が小さくなるほど、両モード展開は異なってくる。ヴィクル・モード展開のほうが正確になる。このことは、前節の結果から推察できる。

完備性指標での比較は、中心に剛体をもつ柔軟平面板の衛星モデルについて HABLANI⁹⁾ が数値計算シミュレーションで行っている。この結果、1) モード変数に対する各モードの寄与は、付属物モードではほぼ周波数順であり、最初の数モードが主であるが、ヴィクル・モードではそうでない、2) 両モード展開の精度は、柔軟付属物と中心剛体との慣性比に依存し、この比の増加につれてヴィクル・モードの完備性指標を満たすためにとるべきモード数は増す、3) 与えられた完備性指標の値を満たすためにヴィクル・モードで保たれるべきモード数は、付属物モードのそれに比べて少なく、これはヴィクル・モードがよい情報を含むためである、4) 付属物モード展開を低い周波数で打ち切ると、残されたモードの高次モード部分は、より高次で打ち切られれば解消するような、拘束による誤差を、衛星の全角運動量に与え、指標計算に誤差を生じる、こと等を示している。

6.4 スピルオーバー問題 構造力学、ダイナミクス、制御理論はおおの完成の域に達しつつあるとはいえ、これらが一致して柔軟衛星の制御系の設計手法を取り扱い考察することについては依然発展途上にあると思われる。したがって、柔軟衛星の制御系設計問題をも含めた閉ループ系に対するトランケーション問題は十分明らかになっていない。この問題は、スピルオーバー問題としてとらえることができる。

トランケートされたモデルについて制御系を設計すると、(45b)式のモデル誤差 $\bar{T}^T Q$ によって、制御力 Q が切り捨てられた $\bar{q}$ に励起を与えたり、(46)式のように $\bar{q}$ が観測量 y に影響を与え、これらの制御/観測スピルオーバーによってとくに減衰が少ないシステムに対して不安定 (スピルオーバー不安定) を起こしうることとは BALAS¹²⁾ によって指摘されており、実験や数値シミュレーションによっても知られている。

このスピルオーバーは、センサ/アクチュエータの位置にも関係することも式(45)、(46)からわかる。

スピルオーバー不安定を回避するための一方法は、これを生じさせるモードを保つようにトランケートの次数を上げることが考えられる²⁰⁾。ただし、もちろん、制御系設計に許容される次数の問題とこれとは相克するものであるが、モード周波数に基づくトランケーション規範 a. (6.1 節) に対応するものである。

もしも、ヴィクル・モードのモード形状と、振動数が完全に求まり、かつ、おのおののモードの観測値が得られ、おのおののモードに対する制御力が与えられるならば、各モードは独立になり、式(45)、(46)から η と $\dot{\eta}$ は無干渉化されるからスピルオーバーは起こらない。この観点から、MEIROVITCH らは (たとえば、文献 10))、4.3 節で述べたように、スピルオーバーを起こさない独立モード空間制御を提案している。とはいえ、先にあげた制約は多大な計算量が必要であり、近似誤差を許さないとすれば無数の、もしくは分布したセンサが必要であり、近似誤差を許すならばこれによるスピルオーバーが考えられることから、これらは実際上は大きな制限となることに注意が必要である。

その他、制御系設計の面からの議論として、1) スピルオーバーがあっても不安定にならない制御則、たとえば、センサ/アクチュエータのコロケーション (collocation) を採用する²¹⁾、2) トランケートされたモードの影響を考慮して制御系を設計する (たとえば、model error sensitivity suppression²²⁾)、3) パラメータ変動に対してロバスト性 (robustness) をもつ制御設計を行う²³⁾、そして、4) 制御系の設計に対してスピルオーバーを除去できるようなセンサ/アクチュエータの個数と配置を決定する²⁴⁾、等がある。

この柔軟宇宙船の制御において重要となるスピルオーバーの問題は、モデリングと制御の両面からの一致した閉ループ系に対する総合的なトランケーションの問題、モデル誤差の問題としての検討が必要であろう。

7. おわりに

柔軟な衛星のモデリング問題について、とくに数学モデルの記述法とトランケーションに関して重要となる論点について解説を試みた。

衛星が回転している場合や、内部に大きな角運動量をもつ場合は、ジャイロスコピック系として取扱いが異なってくる^{28), 29)}。また、柔軟付属物の構造減衰はモデリングにおける重要問題であり、通常、モデル・ダンピングとして単純化して取り扱う³⁰⁾。これらの両者に関する詳しい議論は、いずれも割愛し参考文献を示すにとどめる。

本稿ではモデリングをダイナミクスの観点から述べたが、ダイナミック・モデルの各パラメータは構造解

析の結果によるものであるから、この解析結果のインターフェイス、ならびに、信頼性が重要であり、とくにトランケーション問題についても、制御系設計をふまえた閉ループ系としたダイナミックモデルとの関連においてとらえる必要がある。このようなモデリング問題に限らず、ますます大型化しつつある柔軟衛星の取扱い、航空宇宙工学の各分野の先進テクノロジーとも深く関連しており、非常に学際的色彩を帯びている。本稿が、このような問題に対する各分野の理解と関心を得て、新しい問題と手法の展開のきっかけとなるための一助となりえれば幸せである。

最後に、本稿をまとめるきっかけを与えて下さった宇宙科学研究所二宮敬虔教授、各種文献の収集・整理・評価に尽力いただいた東京都立工科短期大学田代伸一助手、航空宇宙技術研究所木田隆技官を始め、「柔軟な宇宙船の制御についての現状サーベイ」²⁵⁾に参加された諸氏、ならびに、東京芝浦電気、日本電気、日立製作所、三菱電機の各社、に深く感謝します。

参考文献

- 1) MODI, V. J.: Attitude Dynamics of Satellite with Flexible Appendages—A Brief Review, *J. Spacecraft and Rockets*, Vol. 11, No. 11 (1974), pp. 743-751.
- 2) WILLIAMS, C. J. H.: Dynamics Modelling and Formulation Techniques for Non-Rigid Spacecraft, *ESA SP-117* (1977), pp. 53-70.
- 3) 藤井裕矩: 柔軟な宇宙船の運動についての研究の現状 (力学的モデル化と姿勢運動), 東京都立工科短大研究報告, 第8号 (1980), pp. 25-40.
- 4) LUKINS, P. W.: Dynamics and Control of Flexible Spacecraft, *JPL TR 32-1329* (1970).
- 5) HUGHES, P. C.: Recent Advances in the Attitude Dynamics of Spacecraft with Flexible Solar Arrays, *Canadian Aeronautics and Space J.*, Vol. 19, No. 4 (1973), pp. 165-171.
- 6) HUGHES, P. C. and SKELTON, R. E.: Modal Truncation for Flexible Spacecraft, *J. Guidance and Control*, Vol. 4, No. 3 (1981), pp. 291-297.
- 7) MEIROVITCH, L. *et al.*: Distributed Control of Spinning Flexible Spacecraft, *J. Guidance Control*, Vol. 2, No. 5 (1979), pp. 407-415.
- 8) HUGHES, P. C.: Modal Identities for Elastic Bodies, with Application to Vehicle Dynamics and Control, *J. of Applied Mechanics*, Vol. 47, No. 1 (March 1980), pp. 177-184.
- 9) HABLANI, H. B.: Constrained and Unconstrained Modes: Some Aspects of Flexible Spacecraft, *J. Guidance & Control*, Vol. 5, No. 2 (1982), pp. 164-173.
- 10) MEIROVITCH, L. and ÖZ, H.: Modal-Space Control of Large Flexible Spacecraft Possessing Ignorable Coordinate, *J. Guidance & Control*, Vol. 3, No. 6 (1980), pp. 569-577.
- 11) BODLEY, C. S., DEVERS, A. D., PARK, A. C. and FRISCH, H. P.: A Digital Computer Program for

- the Dynamic Interaction Simulation of Controls and Structures (DISCOS), Vol. I, NASA Technical Paper 1219 (May 1978).
- 12) BALAS, M.: Feedback Control of Flexible Systems, IEEE Trans. Automat. Contr., Vol. AC-23(1978), pp. 673-679.
 - 13) MEIROVITCH, L.: A New Method of Solution of the Eigenvalue Problem for Gyroscopic System, AIAA J., Vol. 12, No. 12 (1974), pp. 1337-1342.
 - 14) OHKAMI, Y. and LIKINS, P. W.: Eigenvalues and Eigenvectors for Hybrid Coordinate Equations of Motion for Flexible Spacecraft, Celestial Mechanics, Vol. 19, No. 4 (1979), pp. 359-390.
 - 15) HUGHES, P. C. and SKELTON, R. E.: Controllability and Observability for Flexible Spacecraft, J. Guidance and Control, Vol. 3, No. 5 (Sept.-Oct., 1980), pp. 452-459.
 - 16) SKELTON, R. E., HUGHES, P. C. and HABLANI, H. B.: Order Reduction for Models of Space Structures Using Modal Cost Analysis, J. Guidance, Control and Dynamics, Vol. 5, No. 4 (July-Aug., 1982), pp. 351-357.
 - 17) LIKINS, P., OHKAMI, Y. and WONG, C.: Appendage Modal Coordinate Truncation Criteria in Hybrid Coordinate Dynamic Analysis, J. Spacecraft and Rockets, Vol. 13, No. 10 (Oct., 1976), pp. 611-617.
 - 18) LIKINS, P. and OHKAMI, Y.: Coordinate Transformation and Truncation for Rotating Spacecraft with Flexible Appendages, AIAA J., Vol. 13, No. 12 (Dec., 1975), pp. 1657-1665.
 - 19) GARG, S. C.: Frequency-Domain Analysis of Flexible Spacecraft Dynamics, J. Guidance, Control and Dynamics, Vol. 5, No. 1 (Jan.-Feb., 1982), pp. 54-59.
 - 20) REDDY, A. S. S. R., BAINUM, P. M., KRISHNA, R. and HAMER, H. A.: Control of a Large Flexible Platform in Orbit, J. Guidance and Control, Vol. 4, No. 6 (Nov.-Dec., 1981), pp. 642-649.
 - 21) BALAS, M. J.: Direct Output Feedback Control of Large Space Structures, J. of the Astronautical Sciences, Vol. XXVII, No. 2 (Apr.-Jun., 1979), pp. 157-180.
 - 22) SESAK, J. R., HALSTENBERG, R. V., CHANG, Y. and DAVIS, M. M.: Filter-Accommodated Optimal Control of Large Flexible Space Systems, AIAA Guidance and Control Conference, No. 81-1784 (Aug. 1981), pp. 177-186.
 - 23) KOSUT, R. L.: Stability of LQG Modal Control for Large Space Structures, AIAA Guidance and Control Conference, No. 81-1835 (Aug. 1981), pp. 359-364.
 - 24) KISSEL, G. J. and LIN, J. G.: Spillover Prevention Via Proper Synthesis/Placement of Actuators and Sensors, ACC (1982), pp. 1213-1218.
 - 25) 狼 嘉彰, 藤井裕矩ほか: 柔軟宇宙構造物のモデリングと制御—研究の現状と展望—, 東京都立工科短期大学 (1983. 3).
 - 26) BALAS, M. J.: Trends in Large Space Structure Control Theory: Fondest Hopes, Wildest Dreams, IEEE Transaction on AC, Vol. AC-27, No. 3 (Jun., 1982), pp. 522-535.
 - 27) STRUNCE, Jr., R. R. and TURNER, J. D.: Enabling Technologies for Large Precision Space Systems, NASA CP 2269, Part 2 (Nov.-Dec., 1982), pp. 601-624.
 - 28) ÖZ, H. and MEIROVITCH, L.: Optimal Modal-Space Control of Flexible Gyroscopic Systems, J. Guidance and Control, Vol. 3, No. 3 (May-June, 1980), pp. 218-226.
 - 29) OHKAMI, Y.: Commutativity of Inversion and Truncation Operation in Modal Analysis for Flexible Large Spacecraft, Proceeding of 2nd VPI & SU/AIAA Symposium (June, 1979), pp. 487-494.
 - 30) HUGHES, P. C.: Passive Dissipation of Energy in Large Space Structures, J. Guidance and Control, Vol. 3, No. 4 (July-Aug., 1980), pp. 380-382.

—解 説—

データ中継衛星 (TDRS-A) の軌道投入失敗とその回復処置*

西 田 正 純**

Key words: Artificial satellites; rockets; communication; tracking and data relay satellite; inertial upper stage

1. ま え が き

1983年4月4日, スペース・シャトルの第6回飛行で追跡およびデータ中継衛星 (TDRS-A: Tracking and Data Relay Satellite) が打ち上げられた。これま

で米航空宇宙局(NASA)は、米本土から見えない位置を飛行する周回衛星等と通信を行う場合には、世界中に設置した地上局による通信網 (STDN: Spaceflight Tracking Data Network) を利用してきた。しかし今回打ち上げられた衛星は、静止衛星軌道(静止軌道)上に位置して多くの衛星と米本土の間の通信を中継する機能をもっており、STDNに代わる役割を果たすものとして注目を浴びている。今回の衛星打上げでは、衛星がシャトルから放出された後、静止軌道に投

* 昭和58年9月29日原稿受理 Launch Failure of Tracking and Data Relay Satellite into the Proper Orbit and its Recovery Procedure

** 電波研究所衛星通信部 Masazumi NISHIDA