スレンダ翼・隙間・胴体結合体の空力特性 (II)*¹

Aerodynamic Characteristics of Slender Wing-Gap-Body Combinations (II)

山 本 雄 三*²・安 東 茂 典*³

Yuzo YAMAMOTO and Shigenori ANDO

Key Words : Aerodynamics, Aerodynamic Characteristics, Missiles

Abstract

Aerodynamic characteristics of slender wing-gap-body combinations are studied exactly in the frame of the slender-body theory. In our previous paper, the solutions of total lift and lift curve slope are obtained, in which the wings and the body have different incidence with respect to the free stream, and arbitrary width of chordwise gaps exist between the wings and body. In this work, the induced drag as well as the lift is evaluated exactly. This requires that the lift due to wings and one due to body are separately known. Together with the solutions of our previous paper, many problems in which missile aerodynamicists have interest may be covered.

1. 序 論

前報告¹⁾と同じく、翼が胴体に隙間を介して取り付けられているスレンダ翼・隙間・胴体結合体の空気を調べる。翼 (α_w) と胴体 (α_b) の迎え角はそれぞれ任意とする。解析は slender body theory の仮定内で厳密である。

前報告では、スレンダ物体の空気力評価の Ward の公式⁵⁾と、横断面流れ場解析のための複素共役速度 (Q)—垂直速度 (w) 関係式⁶⁾が多重連結 cross flow field へ拡張された。揚力・誘導抵抗評価のため、翼幅最大の cross flow field が調べられた。そして $\alpha_w \cdot \text{gap} \cdot \alpha$ case の全機揚力と、 $\alpha' \cdot \text{gap} \cdot 0$ case の全機揚力の閉じた解がえられた。それらの重ね合わせによって $\alpha_w \cdot \text{gap} \cdot \alpha_b$ case の全機揚力・揚力傾斜、 $\alpha \cdot \text{gap} \cdot \alpha$ case の誘導抵抗が厳密に評価された。しかしながら

$$D_i = (1/2)(\alpha_w L_{\text{wing}} + \alpha_b L_{\text{body}})$$

の関係 (文献 1, 式(3.3)参照) は指摘しながら、翼と胴体の揚力の分離はなされていない。

本研究では、 $\alpha_w \cdot \text{gap} \cdot \alpha_b$ case の誘導抵抗を評価するため、翼の揚力と胴体の揚力の分離を試みた。そのため、前報告で行った Ward の公式の多重連結 cross flow field への拡張がさらに発展される。そして、 $\alpha \cdot \text{gap} \cdot \alpha$ case の翼の部分の揚力と、 $\alpha' \cdot \text{gap} \cdot 0$ case の翼の部分の揚力の厳密解がえられる。これと、前報告の全機揚力の結果と合わせて、 $\alpha_w \cdot \text{gap} \cdot \alpha_b$ case の誘導抵抗が厳密に調べられる。前報告と本研究を通して、解析に際し流れは定常非粘性とし、この飛しょう体は細長いとされた。

この分野の研究は、Mirels^{2,4)}と Dugan³⁾の $\alpha \cdot \text{gap} \cdot \alpha$ case の翼・隙間・胴体結合体の揚力の解析がある。

この種の研究はミサイルの動翼の操舵等により胴体との間にできる翼弦方向の隙間の問題に応用され、ミサイルの空力設計に役立つであろう。ごく狭い翼弦方向の隙間の存在のため、最近盛んになった大型計算機利用の数値解析によるアプローチは若干の困難を引き起こすであろう。本研究のような解析と、計算機利用の解析は、一長一短であり、相補って有用性を高めよう。

2. 記 号

a : (翼の内縁の幅)/2

$a_t = a - (r^2/a)$

AR : アスペクト比 $(= (2b)^2/S)$

$A(\lambda, k)$: 式(4.2)参照

$a_0, b_0, \dots, a_n, \dots$: 係数, 式(3.1)参照

b : 半翼幅

$b_t = b - (r^2/b)$

C_L : 揚力係数 $(= L / \{(1/2)\rho U^2 S\})$

C_{Di} : 誘導抵抗係数 $(= D_i / \{(1/2)\rho U^2 S\})$

C_I, C_{II} : 文献 1, 式(4.8), (5.5), (5.8), (5.12)参照

C_k : cross flow 面内の k 番目の物体をまわる一周

*¹ 昭和 59 年 10 月 5 日原稿受理

*² 岐阜工業高等専門学校機械工学科

*³ 名古屋大学工学部航空学教室

積分路

 D_1 : 誘導抵抗 e : 飛行機効率ファクタ ($=C_L^2/(\pi AR C_{D_i})$) $f^{aa}, f_w^{aa}, f_w^{a0}$: 式(7.7), (7.8), (7.9)参照 $\mathcal{F} = F_x + iF_y$: 物体に働く横方向の空気力 $F(\phi, \mu'), E(\phi, \mu')$: 第1種, 第2種の不完全楕円積分, 母数 μ' K, E : 第1種, 第2種の完全楕円積分, 母数 k $K(\mu), E(\mu)$: 第1種, 第2種の完全楕円積分, 母数 μ $g(\lambda, \epsilon) = \lambda + \epsilon + \{\lambda^2/(\lambda + \epsilon)\}$ i_w : 翼の取付角 I_w^{aa}, I_w^{a0} : 定積分 J_A, J_B, J_C, J_D : Appendix II, III, IV, V 参照

$$k = \frac{\sqrt{b_t^2 - a_t^2}}{b_t} = \frac{\sqrt{(b^2 - a^2)(a^2 b^2 - r^4)}}{a(b^2 - r^2)}$$

$$k' = \sqrt{1 - k^2} = a_t/b_t = b(a^2 - r^2)/\{a(b^2 - r^2)\}$$

$$\bar{k}^2 = k^2/(1 + \bar{r}^2) = (b^2 - a^2)(a^2 b^2 - r^4)/\{a^2(b^2 + r^2)^2\}$$

$$\bar{k}^2 = 1 - k^2 = (1 - k^2 + \bar{r}^2)/(1 + \bar{r}^2)$$

 L, L_k : 揚力, k 番目の物体に働く揚力 $q(z), Q(\zeta)$: 複素共役速度 r : 胴体の半径 $\bar{r}$: 胴体の無次元半径 ($=2r/b_t = 2\lambda/(1 - \lambda^2)$) $\text{sn}u, \text{cn}u, \text{dn}u$: Jacobi の楕円関数 S : 翼面積, AR, C_L, C_{D_i} の項参照, 胴体貫通部を含むのが慣例であるが, 首尾一貫していればよい $u, E(u)$: 第1種, 第2種の不完全楕円積分, 母数 k U : 一様流流速または飛行速度 v : 変数, 第1種の不完全楕円積分, 母数 k $V_2(\alpha, k)$: Appendix I, 式(A1.2)参照 w : 垂直速度, および複素ポテンシャル

$$W(\zeta) = \sqrt{(b_t^2 - \zeta^2)(\zeta^2 - a_t^2)}$$

 x, y, s : 座標, 第1図参照 $z = x + iy$: 断面複素座標

$$z(\zeta) = (1/2)(\zeta + \sqrt{\zeta^2 + 4r^2})$$

 α : 迎え角, および変数 ϵ : 無次元隙間 ($=(a - r)/b$) $Z(u)$: Jacobi のツェータ関数 ($=E(u) - (E/K)u$) $\zeta = \xi + i\eta$: パラメータ面変数 $\lambda = r/b$: 胴体半径/半翼幅比 $\Lambda_0(\phi, \mu)$: Heuman のラムダ関数

$$\begin{aligned} &= (2/\pi)[E(\mu)F(\phi, \mu') + K(\mu)E(\phi, \mu') \\ &\quad - K(\mu)F(\phi, \mu')] \end{aligned}$$

$$\mu = \sqrt{\frac{k^2 - \bar{k}^2}{1 - \bar{k}^2}} = 2r \frac{\sqrt{(b^2 - a^2)(a^2 b^2 - r^4)}}{(a^2 + r^2)(b^2 - r^2)}$$

$$\mu' = \sqrt{1 - \mu^2} = (b^2 + r^2)(a^2 - r^2)/\{(a^2 + r^2)(b^2 - r^2) - r^2\}$$

 $\bar{I}^{(1)}(\alpha, k), \bar{I}^{(3)}(\alpha, k)$: Appendix I, 式(A1.1)(A1.3)参照 ϕ : 変数, $\sin \phi = \text{sn } u$ ψ : 変数, $\sin \psi = \sqrt{\bar{k}^2 \sin^2 \phi / (1 - \bar{k}^2 \sin^2 \phi)}$ および $\sin \psi = 1/\sqrt{1 + \bar{r}^2} = (1 - \lambda^2)/(1 + \lambda^2)$ ϕ_0, ϕ_0 : 速度ポテンシャルと流れ関数

添字

()^c: cross flow 上の量()_k: k 番目の物体についての量()_w, ()_b: それぞれ翼と胴体についての量()_{w+}: 片翼 (右側の翼) についての量()_t: パラメータ面の量() ^{$\alpha_1 \alpha_2$} : 翼迎角 α_1 , 胴体迎角 α_2 で, その間に隙間があるときの量() ^{$\alpha_1 \alpha_2$} : 翼迎角 α_1 , 胴体迎角 α_2 で, 隙間がない場合の量

3. 解析の方針

文献1と同じく, 翼と胴体の間に翼弦方向の隙間を有する細長い飛しょう体に働く空気力について論ずる. slender body theory が適用され, 飛行速度は亜・遷・超音速のいずれでもよい.

3.1 Wardの方法による揚力と誘導抵抗 Wardの方法⁵⁾が複数個の物体の問題に拡張される. slender body を仮定すると, $s = \text{const.}$ の面は二次元非圧縮として扱える. 揚力を決定する最大翼幅位置 $s=1$ の断面を考える. じょう乱 cross flow 複素ポテンシャル w^c は $z \rightarrow \infty$ において以下のように展開される.

$$w^c = a_0 \ln z + b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{-n} \quad (3.1)$$

全機揚力係数 C_L および誘導抵抗 D_1 は

$$C_L = -\pi AR(1/b^2)[\text{Re}(ia_1/U) - (1/2)a_0 r^2] \quad (3.2)$$

第1図 記号と座標

$$D_1 = (1/2)(\alpha_w L_w + \alpha_b L_b) \quad (3.3)$$

となる (文献 1 Appendix I 参照)。

Ward の文献のうち、誘導抵抗にあたるものは

$$D_i / \{(1/2)\rho U^2\} = \oint_C \phi_0 (\partial \phi_0 / \partial \nu) d\tau$$

これを多重連結 cross flow 場へ拡張しよう。

$$\begin{aligned} \frac{G}{(1/2)\rho U^2} &= \sum_{k=1}^m [-2i \oint_{C_k} w^c dz \\ &+ 2S_k'(s) z_{gk}(s) + 2S_k(s) z_{gk}'(s)]_{s=1} \\ D_i / \{(1/2)\rho U^2\} &= \sum_{k=1}^m \alpha_k \oint_{C_k} \phi_0 d\tau \end{aligned}$$

これより、われわれが応用しようとしているサイドフ
ォースなしの問題に対して

$$L = \sum_{k=1}^m L_k \quad (3.4)$$

$$D_i = (1/2) \sum_{k=1}^m \alpha_k L_k \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned} L_k / \{(1/2)\rho U^2\} \\ = -2 \left[\oint_{C_k} w^c dz + \alpha_k S_k(1) \right] \end{aligned} \quad (3.6)$$

をうる。

3.2 パラメータ面 ζ を用いた表現 なお、複素
共役速度 $q^c(z)$ がわかっているときには、

$$U \oint_C w^c dz = - \oint_C q^c(z) dz$$

の関係がある。さらに物理面の $q^c(z)$ が

$$\left. \begin{aligned} z &= z(\zeta) \\ q^c(z) dz &= q^c(z) (dz/d\zeta) d\zeta = Q(\zeta) d\zeta \end{aligned} \right\}$$

とパラメータ面を介して見いだされる場合 (文献 1,
第 2 図参照) には、

$$U \oint_C w^c dz = - \oint_C Q(\zeta) d\zeta$$

より、次の表現をうる。

$$\begin{aligned} L_k / \{(1/2)\rho U^2\} \\ = (1/U) \oint_{C_k} z(\zeta) Q(\zeta) d\zeta - \alpha_k S_k(1) \end{aligned} \quad (3.7)$$

前報告¹⁾において、写像関数 $\zeta = z - (r^2/z)$ または
 $z = z(\zeta)$ を用いてパラメータ面を利用した解析をし
た。 $\alpha' \cdot \text{gap} \cdot 0$ case においては、物理面 z の胴体がパ
ラメータ面 ζ の虚軸上に写像されるが、そこでの複
素共役速度 $Q^{ga}(\zeta)$ が求まっている。

$\alpha \cdot \text{gap} \cdot \alpha$ case の場合は、胴体の垂直速度がパラメ
ータ面での解析を複雑にするのを避けるため、物理面
流れに対し、一様流を加えた後等角写像をほどこして
再び一様流を減ずる、という変換を用いている。
 $Q^{ga}(\zeta)$ は求まっているが、このような変換をしてい
るため、式(3.7)を直接適用はできないが、具体的に
検討してみると、この $Q^{ga}(\zeta)$ をそのまま用いても、
翼の部分の揚力 L_w^{ga} に対しては正しい解を与える。

4. $\alpha \cdot \text{gap} \cdot \alpha$ case

前報告¹⁾式(4.10)では全機揚力まで評価されてい
る。記号を変更したので、改めて紹介する。

$$C_{L_w^{ga}} / (\alpha R) = (\pi/2) A(\lambda, k) + (\pi/2) \lambda^2 \quad (4.1)$$

ここで

$$\begin{aligned} A(\lambda, k) &= (a_\epsilon^2 + b_\epsilon^2)(1/b^2) - 2(b_\epsilon^2/b^2)(E/K) \\ &= 1 - 4\lambda^2 + \lambda^4 + (\lambda + \epsilon)^2 + \{\lambda^4/(\lambda + \epsilon)^2\} \\ &\quad - 2(1 - \lambda^2)^2(E/K) \end{aligned} \quad (4.2)$$

ここでは、翼と胴体の迎え角が等しい場合 ($\alpha \cdot \text{gap} \cdot$
 α case) の翼の部分に働く揚力を評価する。式(3.7)、
文献 1、式(4.4)等を用いると次の表現をうる。

$$C_{L_w^{ga}} / R = (1/2U) (I_w^{ga}/b^2) \quad (4.3)$$

$$I_w^{ga} = 2 \oint_{C_w} (1/2)(\zeta + \sqrt{\zeta^2 + 4r^2}) Q^{ga}(\zeta) d\zeta$$

$$\begin{aligned} Q^{ga}(\zeta) &= \frac{\alpha U}{W(\zeta)} \left(\zeta^2 + \frac{a_\epsilon^2 + b_\epsilon^2}{2} - W(\zeta) \right) \\ &\quad + \frac{iC_1}{W(\zeta)} \end{aligned}$$

ここで $W(\zeta) = \sqrt{(b_\epsilon^2 - \zeta^2)(\zeta^2 - a_\epsilon^2)}$ で、 C_1 は文献
1、式(4.8)参照。これらに従って I_w^{ga} を求めると、

$$I_w^{ga} = \alpha U \{ J_A + iJ_B - b_\epsilon^2(E/K) J_C \} \quad (4.4)$$

J_A, J_B, J_C については、それぞれ Appendix II, III,
IV を参照。式(4.3)、(A₂.1)、(A₂.4)、(A₂.5)、
(A₃.2)、(A₄.1)、(A₄.4)、(A₄.5)、(A₁.4)、(A₁.5)
より

$$\begin{aligned} I_w^{ga} &= \alpha U \{ (\pi/2)(a_\epsilon^2 + b_\epsilon^2) \\ &\quad - (2\bar{r}^2 \sqrt{1 + \bar{r}^2/\bar{k}'}) b_\epsilon^2 \bar{\Pi}^{(1)}(\alpha_1, \mu) \\ &\quad + \{ 2(1 + \bar{r}^2)^{3/2}/\bar{k}' \} b_\epsilon^2 V_2(\alpha_1, \mu) \\ &\quad - b_\epsilon^2(E/K) \{ \pi + (2\sqrt{1 + \bar{r}^2/\bar{k}'}) \bar{\Pi}^{(1)}(\alpha_1, \mu) \} \} \end{aligned} \quad (4.5)$$

式(4.3)、(4.5)より $C_{L_w^{ga}}$ が評価され、次の表現をう
る。

$$\begin{aligned} C_{L_w^{ga}} / (\alpha R) &= (\pi/4) A(\lambda, k) \\ &\quad + (1/2)(1 - \lambda^2) g(\lambda, \epsilon) E(\mu) \\ &\quad - (1/2)(1 - \lambda^2) \{ [\lambda + \epsilon - \{\lambda^2/(\lambda \\ &\quad + \epsilon)\}]^2 / g(\lambda, \epsilon) \} K(\mu) \\ &\quad - \{ 4\lambda^2(1 - \lambda^2)/g(\lambda, \epsilon) \} (E/K) K(\mu) \\ &\quad + (\pi/4) \{ g(\lambda, \epsilon)^2 + (1 \\ &\quad - \lambda^2)^2 \} A_0(\phi, \mu) \\ &\quad - (\pi/2)(1 - \lambda^2)^2 (E/K) A_0(\phi, \mu) \end{aligned} \quad (4.6)$$

ここで

$$g(\lambda, \epsilon) = \lambda + \epsilon + \{\lambda^2/(\lambda + \epsilon)\} \quad (4.7)$$

であり、文献 1、(5.13)式の $C_{L^{g0}}$ の結果と比較する
と、次の関係がある。

$$C_{L_w^{ga}} = C_{L^{g0}} \quad (4.8)$$

5. $\alpha' \cdot \text{gap} \cdot 0$ case

ここでは翼の迎え角が α' で胴体の迎え角がゼロの場合 ($\alpha' \cdot \text{gap} \cdot 0$ case) の, 翼に働く揚力を評価する. 式(3.7), 文献1, 式(5.2), (5.3), (5.4), (5.5)等を用いると次の表現をうる.

$$C_{LW}^{g0}/AR = (1/2U)(I_W^{g0}/b^2) \quad (5.1)$$

$$I_W^{g0} = 2 \oint_{C_{\infty}} (1/2)(\zeta + \sqrt{\zeta^2 + 4r^2}) Q^{g0}(\zeta) d\zeta$$

$$Q^{g0}(\zeta) = \frac{(\alpha' U/2)}{\pi W(\zeta)} \int_{a_i}^{b_i} \frac{2\xi_1^2}{\sqrt{\xi_1^2 + 4r^2}} \frac{W(\xi_1)}{\zeta^2 - \xi_1^2} d\xi_1$$

$$+ \frac{(\alpha' U/2)}{W(\zeta)} \left\{ \zeta^2 - \frac{a_i^2 + b_i^2}{2} + iW(\zeta) \right\}$$

$$+ \frac{iC_{II}}{W(\zeta)}$$

C_{II} については文献1の式(5.5), (5.8), (5.12)参照. これらに従って I_W^{g0} を具体的に求めると,

$$I_W^{g0} = \{iC_{II} - (\alpha' U/2)(1/2)(a_i^2 + b_i^2)\} J_C$$

$$+ i(\alpha' U/2) J_B + (\alpha' U/2) J_A + (\alpha' U/\pi) J_D \quad (5.2)$$

J_A, J_B, J_C, J_D については Appendix II, III, IV, V をそれぞれ参照. 式(5.2), (A₂.1), (A₂.4), (A₂.5), (A₃.2), (A₄.1), (A₄.4), (A₄.5), (A₅.9), (A₁.4), (A₁.5)より I_W^{g0} について次の表現をうる.

$$I_W^{g0} = 2\pi i C^{g0} - (\pi \alpha' U/2) \{ (1/2)(a_i^2 + b_i^2) - b_i^2(E/K) \}$$

$$+ [iC^{g0} - (\alpha' U/2) \{ (1/2)(a_i^2 + b_i^2) - b_i^2(E/K) \}]$$

$$\times \{ (2\sqrt{1 + \bar{r}^2}/\bar{k}) \tilde{I}^{(1)}(\alpha_1, \mu) \}$$

$$+ (\alpha' U/\pi) \bar{r}^2 (1 + \bar{r}^2) b_i^2 K^2(\mu)$$

$$- (\alpha' U/\pi) (1 + \bar{r}^2) \{ K(\mu) (1 + \bar{r}^2) - E(\mu) \} b_i^2 \tilde{I}^{(1)}(\alpha_1, \mu) \quad (5.3)$$

式(5.1), (5.3)より C_{LW}^{g0} が評価される.

$$C_{LW}^{g0}/AR = C_{LW}^{ga}/AR - (\pi/8) A(\lambda, k)$$

$$+ (1/\pi) \{ (C_{LW}^{ga}/AR) - (\pi/4) A(\lambda, k) \}$$

$$\times [4\lambda^2 K(\mu) / \{ (1 - \lambda^2) g(\lambda, \epsilon) \}]$$

$$+ (\pi/2) \Lambda_0(\psi, \mu)$$

$$- (1/4) \{ (1 + \lambda^2)^2 / (1 - \lambda^2) \}$$

$$\times g(\lambda, \epsilon) K(\mu) \Lambda_0(\psi, \mu)$$

$$+ (2/\pi) \lambda^2 E(\mu) K(\mu) + (1/4) (1 - \lambda^2)$$

$$\times g(\lambda, \epsilon) E(\mu) \Lambda_0(\psi, \mu) \quad (5.4)$$

6. $\alpha_w \cdot \text{gap} \cdot \alpha_b$ case (重ね合せ)

$\alpha \cdot \text{gap} \cdot \alpha$ case の流れ場と $\alpha' \cdot \text{gap} \cdot 0$ case の流れ場を重ね合わせて, $\alpha_w \cdot \text{gap} \cdot \alpha_b$ case の流れ場を求め.

$$w(\alpha_w \cdot \text{gap} \cdot \alpha_b)$$

$$= w(\alpha \cdot \text{gap} \cdot \alpha)(\alpha_b/\alpha)$$

$$+ w(\alpha' \cdot \text{gap} \cdot 0) \{ (\alpha_w - \alpha_b)/\alpha' \} \quad (6.1)$$

式(6.1), (3.4), (3.6)より次式をうる事が容易にわかる.

$$C_L(\alpha_w \cdot \text{gap} \cdot \alpha_b) = C_L^{ga}(\alpha_b/\alpha)$$

$$+ C_L^{g0} \{ (\alpha_w - \alpha_b)/\alpha' \} \quad (6.2)$$

$$C_{LW}(\alpha_w \cdot \text{gap} \cdot \alpha_b) = C_{LW}^{ga}(\alpha_b/\alpha)$$

$$+ C_{LW}^{g0} \{ (\alpha_w - \alpha_b)/\alpha' \} \quad (6.3)$$

$C_L^{ga}, C_{LW}^{ga} = C_L^{g0}, C_{LW}^{g0}$ はそれぞれ式(4.1), (4.6), (5.4)で評価されている. なお,

$$C_{Lb}(\alpha_w \cdot \text{gap} \cdot \alpha_b) = C_L(\alpha_w \cdot \text{gap} \cdot \alpha_b)$$

$$- C_{LW}(\alpha_w \cdot \text{gap} \cdot \alpha_b) \quad (6.4)$$

となり, 誘導抵抗については式(3.5)より

$$C_{Di}(\alpha_w \cdot \text{gap} \cdot \alpha_b) = (1/2) \{ \alpha_w C_{LW}(\alpha_w \cdot \text{gap} \cdot \alpha_b)$$

$$+ \alpha_b C_{Lb}(\alpha_w \cdot \text{gap} \cdot \alpha_b) \} \quad (6.5)$$

または, 飛行機効率ファクタについては

$$e(\alpha_w \cdot \text{gap} \cdot \alpha_b)$$

$$= (1/\pi AR) \{ [C_L(\alpha_w \cdot \text{gap} \cdot \alpha_b)]^2 / C_{Di}(\alpha_w \cdot \text{gap} \cdot \alpha_b) \}$$

$$= (2/\pi AR) \{ [C_L(\alpha_w \cdot \text{gap} \cdot \alpha_b)]^2 /$$

$$\sum_k \alpha_k C_{Lk}(\alpha_w \cdot \text{gap} \cdot \alpha_b) \} \quad (6.6)$$

となる.

7. 極 限 特 性

$C_L^{ga}, C_{LW}^{ga}, C_{LW}^{g0}$ の $\epsilon \rightarrow 0$ の極限特性は, 以下の表現になる.

$$C_L^{ga}/AR|_{\epsilon \rightarrow 0} = [C_L^{ga}/AR]$$

$$- [f^{ga}/\ln(1/\epsilon)] + O(\epsilon) \quad (7.1)$$

$$C_{LW}^{ga}/AR|_{\epsilon \rightarrow 0} = [C_L^{ga}/AR]$$

$$- [f_w^{ga}/\ln(1/\epsilon)] + O(\epsilon) \quad (7.2)$$

$$C_{LW}^{g0}/AR|_{\epsilon \rightarrow 0} = [C_L^{g0}/AR]$$

$$- [f_w^{g0}/\ln(1/\epsilon)] + O(\epsilon) \quad (7.3)$$

ここで, $C_L^{ga} = C_L^{g0}, C_{LW}^{ga} = C_{LW}^{g0}$ に注意. C_L^{ga}, f^{ga} 等の内容は次の表現となる.

$$C_L^{ga}/AR = (\pi/2)(1 - \lambda^2 + \lambda^4) \quad (7.4)$$

$$C_{LW}^{ga}/AR = (1 + \lambda^2)^2 \cot^{-1} \lambda - \pi \lambda^2 - \lambda(1 - \lambda^2)$$

$$(7.5)$$

$$C_{LW}^{g0}/AR = (2/\pi)(1 + \lambda^2)^2 (\cot^{-1} \lambda)^2$$

$$- (4/\pi) \lambda (1 - \lambda^2)^2 \cot^{-1} \lambda$$

$$- (\pi/2) \lambda^2 - (4/\pi) \lambda^2 \ln[2\lambda/(1 + \lambda^2)] \quad (7.6)$$

$$f^{ga} = \pi(1 - \lambda^2)^2 \quad (7.7)$$

$$f_w^{ga} = 2(1 - \lambda^2)^2 \cot^{-1} \lambda + 2\lambda(1 - \lambda^2) \ln[2\lambda/(1 + \lambda^2)]$$

$$(7.8)$$

$$f_w^{g0} = (4/\pi)(1 - \lambda^2)^2 (\cot^{-1} \lambda)^2$$

$$(8/\pi) \lambda (1 - \lambda^2) [\ln[2\lambda/(1 + \lambda^2)]$$

$$+ \ln\{4\lambda(1 - \lambda^2)/(1 + \lambda^2)\}] \cot^{-1} \lambda$$

$$\begin{aligned}
 & -2\lambda(1-\lambda^2)\ln\{4\lambda(1-\lambda^2)/(1+\lambda^2)\} \\
 & + (4/\pi)\lambda\ln\{2\lambda/(1+\lambda^2)\} \\
 & \times \ln\{4\lambda(1-\lambda^2)/(1+\lambda^2)\} \quad (7.9)
 \end{aligned}$$

文献1の式(7.3), (7.4), (7.5)で $C_L(\alpha_w \cdot \text{gap} \cdot \alpha_b)$, $\partial C_L([\alpha_b + i_w] \cdot \text{gap} \cdot \alpha_b) / \partial \alpha_b$, $e(\alpha \cdot \text{gap} \cdot \alpha)$ の極限特性を示しているの、上記の結果と合わせて参照されたい。

8. 考 察

式(4.8)に示されるように、翼の迎え角も胴体の迎え角も α である $\alpha \cdot \text{gap} \cdot \alpha$ case の翼の部分の発生する揚力が、胴体だけ回転して迎え角をゼロにした $\alpha \cdot \text{gap} \cdot 0$ case の全機揚力と一致するという興味深い関係が見いだされた。Bleakney と Morikawa¹³⁾ は、翼胴体結合体に相反関係を適用して、次の関係を明白にしている。

$$C_L^0 = C_{Lw}^0 + C_{Lb}^0 = C_{Lw}^0 + C_{Lb}^0$$

上式は、文献13の式(4)を現報告書の記号で書いたものである。現問題に適用すると、少なくとも翼の部分の揚力については重ね合わせができるので、上式の右辺は C_{Lw}^0 となり、式(4.8)の結果と一致する。

なお、文献1の式(6.3), (7.5)で述べたように、

第2図 翼の迎え角が α 、胴体の迎え角がゼロで、隙間のない場合の空力特性

第3図 $f^{\alpha}, f_w^{\alpha}, f_w^0$ と胴体半径比 λ の関係

$$\partial C_L([\alpha_b + i_w] \cdot \text{gap} \cdot \alpha_b) / \partial \alpha_b = C_L(\alpha \cdot \text{gap} \cdot \alpha) / \alpha \quad (8.1)$$

$$e(\alpha \cdot \text{gap} \cdot \alpha) = (2/\pi) C_L(\alpha \cdot \text{gap} \cdot \alpha) / \alpha R \quad (8.2)$$

であり、すなわち $\alpha_w \cdot \text{gap} \cdot \alpha_b$ case の揚力傾斜および $\alpha \cdot \text{gap} \cdot \alpha$ case の誘導抵抗は、 $\alpha \cdot \text{gap} \cdot \alpha$ case の全機揚力と直接関係がある。なお、式(8.1), (8.2)は隙間なしの場合にも成立する。

翼の迎え角が α 、胴体の迎え角がゼロで隙間のない場合の空力特性を第2図に示す。slender body の仮定より、 $C_L/\alpha R$ が λ の関数となる。 $C_L^0 = C_{Lw}^0, C_{Lb}^0$ は λ の増加とともに単調に減少する。なお、 $C_L^0/\alpha R$ を破線で示した。

$f^{\alpha}, f_w^{\alpha}, f_w^0$ と胴体半径比 λ の関係を第3図に示す。式(7.1)~(7.3)に示すように、揚力係数に対する隙間比 ϵ の影響は $O(1/\ln(1/\epsilon))$ である。式(3.3)、文献1の式(7.4), 式(7.6)より、揚力傾斜、誘導抵抗に対する隙間比 ϵ の影響も $O(1/\ln(1/\epsilon))$ である。同じ翼弦方向の隙間翼としてとらえられる ground effect wing

第4図 翼と胴体の迎え角が等しく、隙間のない場合の空力特性

第5図 ϵ - λ 平面に表した $C_L^0/\alpha R$ の等高線

第6図 $\lambda=0.3$ の場合の $C_L^{ga}, C_L^{ga} = C_L^{ga}, C_L^{ga}$ と隙間比 ϵ の関係

の問題⁷⁻⁹⁾において、スパン効率パラメータに隙間比 ϵ が $O(1/\epsilon)$ でなく $O(\ln(1/\epsilon))$ で影響をもつことを考えると興味深い。

翼と胴体の迎え角が等しく、隙間のない場合の空力特性を第4図に示す¹⁰⁾。

$$(2/\pi)C_L^{ga}/(\alpha AR) = e^{ga} \quad (8.3)$$

の関係があり、 e のスケールを右側に記した。 C_L^{ga} , C_L^{ga} は、それぞれ C_L^{ga} や e^{ga} に対する翼と胴体の寄与である。

隙間比 ϵ および胴体半径 λ に対する C_L^{ga} の値を第5図に示す。横軸には ϵ を対数目盛で、縦軸には λ を線形目盛でとり、同一の $C_L^{ga}/\alpha AR$ の値を等高線にて示した。式(8.1), (8.2)に示すように、 $C_L^{ga}/\alpha AR$ は揚力傾斜 $\partial C_L/(\alpha_b + i_w) \cdot \text{gap} \cdot \alpha_b / \partial \alpha_b$ 、飛行機効率ファクタ $e(\alpha \cdot \text{gap} \cdot \alpha)$ と直接関係がある。

$C_L^{ga}, C_L^{ga} = C_L^{ga}, C_L^{ga}$ と隙間比 ϵ の関係の1例として、 $\lambda=0.3$ の場合を第6図に示す。破線で示したのは、式(7.1)~(7.3)の極限特性によるもので、 ϵ が小さくなった場合の収束が悪いことがわかる。参考のため、隙間がない場合 ($\epsilon=0$) の各種揚力係数の値を左端に示した。

最後に、揚力係数、誘導抵抗係数、スパン効率ファクタと迎え角 α_b の関係を、翼の胴体に対する取り付け角 $i_w=3^\circ$ 、胴体半径比 $\lambda=0.3$ 、隙間比 $\epsilon=0.007$ の場合について第7図に示す。なお、隙間なし ($\epsilon=0$) の場合を破線で示した。隙間ありの場合も隙間なしの場合もともに、全機揚力係数がゼロの近くで飛行機効率ファクタ e の著しい悪化がみられる。

9. 結 論

翼が胴体に隙間を介して取り付けられている細長い飛しょう体に働く揚力が slender body の仮定内で厳密に調べられた。任意の迎え角の翼 (α_w)・隙間・胴体 (α_b) 結合体についての空気を調べるために、 $\alpha \cdot \text{gap}$

第7図 $\lambda=0.3, i_w=3^\circ$ で、 $\epsilon=0.007$ と $\epsilon=0$ の場合の空力特性

α case と $\alpha' \cdot \text{gap} \cdot 0$ case の全機揚力および翼の部分の揚力が求められた。これらの解の重ね合せにより、 $\alpha_w \cdot \text{gap} \cdot \alpha_b$ case の空力特性が得られた。

本解析のために、空気力評価の Ward の方法⁵⁾と流れ場解析の White & Landahl⁶⁾の複素共役速度 (Q)・垂直速度 (w) 関係式が複数の物体の場合へ拡張された。

$\alpha_w \cdot \text{gap} \cdot \alpha_b$ case の揚力、揚力傾斜、誘導抵抗が厳密に調べられた。解析は slender body theory に基づくため、空力特性の結果は亜・遷・超音速を通して有効である。

隙間が非常に小さくなった場合の、揚力・飛行機効率ファクタ等への隙間比 ϵ の影響は $O(\epsilon)$ でなく、 $O(1/\ln(1/\epsilon))$ であることが解析によりわかった。これは、同じ翼弦方向の隙間を有する翼の問題の一つである ground effect wing のスパン効率パラメータ e に対する隙間比 ϵ の影響が $O(1/\epsilon)$ でなく $O(\ln(1/\epsilon))$ であること⁷⁻⁹⁾と比較すると興味深い。なお本解析では流れは非粘性としたが、実際は粘性による剝離の効果で、GEW の場合と同じく隙間比 ϵ の影響も $O(1/\ln(1/\epsilon))$ より $O(\epsilon)$ に近いものとなるだろう¹²⁾。

なお、本研究における数値例を求めるため、名古屋大学大型計算機センターの FACOM M380 を用いた。

参考文献

- 1) 山本雄三, 三木一生, 安東茂典: スレンダー翼・隙間・胴体結合体の空力特性, 日本航空宇宙学会誌, 26 (1978), pp. 152-158.
- 2) Mirels, H.: Gap Effect on Slender Wing-Body Interference, J. A. S., 20 (1953), pp. 574-575.

- 3) Dugan, D. W. : Gap Effect on Slender Wing-Body Interference, J. A. S., 21 (1954), pp. 57-58.
- 4) Mirels, H. : Lift Effectiveness of Slender Wings on Cylindrical Bodies, J. A. S., 20 (1953), pp. 504-505.
- 5) Ward, G. N. : Supersonic Flow Past Slender Pointed Bodies, Quart. J. Mech. Appl. Math., II, Pt. 1 (1949), pp. 75-97.
- 6) White, R. B. and Landahl, M. T. : Effect of Gaps on the Loading Distribution of Planar Lifting Surfaces, AIAA J., 6 (1968), pp. 626-631.
- 7) Ando, S. : An Idealised Ground Effect Wing, Aero. Quart., XVII (1966), pp. 53-71.
- 8) Mamada, H. and Ando, S. : Minimum Induced Drag of a Hemi-Circular Ground Effect Wing, J. Aircraft, 10 (1973), pp. 660-663.
- 9) Ando, S. and Yashiro, H. : Minimum Induced Drag of Ground Effect Wings, J. Hydronautics, 10 (1976), pp. 106-112.
- 10) Schlichting, H. and Truckenbrodt, E. : Aerodynamics of the Airplane, McGraw-Hill, New York, 1979, p. 421.
- 11) Byrd, P. F. and Friedman, M. D. : Handbook of Elliptic Integrals for Engineers and Scientists, 2nd ed., Springer-Verlag, Berlin, 1971.
- 12) Ando, S. : Limitation of Lifting Line Theory for Wing Having Very Small Chordwise Gap, Trans. Japan Soc. Aero. Space Sci., 9 (1966), pp. 1-10.
- 13) Bleakney, W. M. and Morikawa, G. K. : Reciprocity Relations in Wing-Body Systems, J. A. S., 19 (1952), pp. 784-785.

Appendix I 本研究の積分実行に必要な楕円積分公式のおもなもの

本研究の積分実行に必要な楕円積分公式のおもなものをこの付録でまとめる。

文献 11, 公式 410.07 より, $0 < -a^2 < \infty$ に対して,

$$\tilde{I}^{(1)}(a, k) \equiv \int_0^K du / (1 - a^2 \sin^2 u) \quad (A_1.1)$$

ここで, K は第 1 種の完全楕円積分, k は母数, $\tilde{I}^{(1)}(a, k)$ は第 3 種の楕円積分。() は引数が慣用的使用とは異なるのでつけた。加うるに, 文献 11, 公式 410.07 より $0 < -a^2 < \infty$ に対して

$$V_2(a, k) \equiv \int_0^K du / (1 - a^2 \sin^2 u)^2 \quad (A_1.2)$$

および, 文献 11, 公式 415.01 より $1 < a^2 < \infty$ に対して,

$$\tilde{I}^{(3)}(a, k) \equiv \int_0^K du / (1 - a^2 \sin^2 u) \quad (A_1.3)$$

をあげる。

これらは

$$\tilde{I}^{(1)}(a_1, \mu) \quad [a_1^2 = (\bar{k}^2 / \bar{k}'^2)]$$

$$V_2(a_1, \mu) \quad [a_1^2 = (\bar{k}^2 / \bar{k}'^2)]$$

$$\tilde{I}^{(3)}(a_3, \mu) [a_3^2 = (1 - \bar{k}^2 \sin^2 \phi_1) / (1 - \bar{k}^2) \sin^2 \phi_1]$$

として, 本研究の解析の中で用いられた。そして内容は次に示す。

$$\begin{aligned} \tilde{I}^{(1)}(a_1, \mu) &= \{ \bar{r}^2 / (1 + \bar{r}^2) \} K(\mu) \\ &\quad + (\pi/2) (\bar{k}' / \sqrt{1 + \bar{r}^2}) \Lambda_0(\phi, \mu) \end{aligned} \quad (A_1.4)$$

$$\begin{aligned} V_2(a_1, \mu) &= \frac{\bar{k}'^2}{2} \frac{E(\mu)}{1 + \bar{r}^2} \\ &\quad + \left\{ \frac{\bar{r}^2 - 1}{1 + \bar{r}^2} + \frac{1 + k^2}{2(1 + \bar{r}^2)^2} \right\} K(\mu) \\ &\quad - (\pi/4) \{ (\bar{k}' / \sqrt{1 + \bar{r}^2}) \{ \bar{k}^2 - 3 \\ &\quad + 1 / (1 + \bar{r}^2) \} \} \Lambda_0(\phi, \mu) \end{aligned} \quad (A_1.5)$$

$$\begin{aligned} \tilde{I}^{(3)}(a_3, \mu) &= - \frac{\bar{k}' \sin \phi_1}{\cos \phi_1} \\ &\quad \times \frac{\sqrt{1 - \bar{k}^2 \sin^2 \phi_1}}{\sqrt{1 - \bar{k}^2 \sin^2 \phi_1}} KZ(\phi_1, \mu) \end{aligned} \quad (A_1.6)$$

Appendix II J_A の評価

J_A は以下に示す積分である。

$$J_A = \oint_{Cw.} \frac{\xi^3 + \xi^2 \sqrt{\xi^2 + 4r^2}}{W(\xi)} d\xi = J_{A1} + J_{A2} \quad (A_2.1)$$

ここで, J_{A1}, J_{A2} は

$$J_{A1} = \int_{a_i}^{b_i} 2\xi^3 d\xi / \sqrt{(b_i^2 - \xi^2)(\xi^2 - a_i^2)} \quad (A_2.2)$$

$$J_{A2} = \int_{a_i}^{b_i} 2\xi^2 \sqrt{\xi^2 + 4r^2} d\xi / \sqrt{(b_i^2 - \xi^2)(\xi^2 - a_i^2)} \quad (A_2.3)$$

である。ここで一周積分を実軸上の積分に直す際に, 以下の関係に注意しなければならない

$$\begin{aligned} W(\xi)|_{\xi=\epsilon \pm i0} &= \sqrt{(b_i^2 - \xi^2)(\xi^2 - a_i^2)}|_{\xi=\epsilon \pm i0} \\ &= -[\operatorname{sgn}(\eta)] \sqrt{(b_i^2 - \xi^2)(\xi^2 - a_i^2)} \end{aligned}$$

なお, 積分の分解されたもののうち, 前者 (A2.2) は楕円積分ではないが, 後者 (A2.3) は楕円積分である。

式 (A2.2) を評価するため

$$\xi^2 = b_i^2 - (b_i^2 - a_i^2) \sin^2 \phi$$

と変数変換をする。

$$J_{A1} = 2 \int_0^{\pi/2} \{ b_i^2 - (b_i^2 - a_i^2) \sin^2 \phi \} d\phi$$

となり, 次の結果をうる。

$$J_{A1} = (\pi/2) (b_i^2 + a_i^2) \quad (A_2.4)$$

式 (A2.3) を評価するために, 変数 ϕ を導入する。

$$\xi = b_i \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi}$$

$$J_{A2} = 2 b_i^2 \sqrt{1 + \bar{r}^2}$$

$$\times \int_0^{\pi/2} \frac{(1 - k^2 \sin^2 \phi)(1 - \bar{k}^2 \sin^2 \phi)}{\sqrt{(1 - k^2 \sin^2 \phi)(1 - \bar{k}^2 \sin^2 \phi)}} d\phi$$

この積分実行のため, 文献 11, 公式 284.07 を用いる。新しい母数 μ を導入して,

$$\mu^2 = (k^2 - \bar{k}^2) / (1 - \bar{k}^2)$$

最終的に J_{A2} の表現として次式をうる.

$$J_{A2} = -(2\bar{r}^2\sqrt{1+\bar{r}^2}b_t^2/\bar{k}')\tilde{I}^{(1)}(\alpha_1, \mu) \\ + (2(1+\bar{r}^2)^{3/2}b_t^2/\bar{k}')V_2(\alpha_1, \mu) \quad (A_2.5)$$

Appendix III J_B の評価

J_B は以下に示す積分である.

$$J_B = \oint_{C_{w.}} (\xi + \sqrt{\xi^2 + 4r^2}) d\xi \quad (A_3.1)$$

これは

$$J_B = \left(\int_{a_t}^{b_t} d\xi + \int_{b_t}^{a_t} d\xi \right) (\xi + \sqrt{\xi^2 + 4r^2}) = 0 \quad (A_3.2)$$

Appendix IV J_C の評価

J_C は以下に示す積分である.

$$J_C = \oint_{C_{w.}} \frac{\xi + \sqrt{\xi^2 + 4r^2}}{W(\xi)} d\xi = J_{C1} + J_{C2} \quad (A_4.1)$$

ここで J_{C1}, J_{C2} は

$$J_{C1} = \int_{a_t}^{b_t} 2\xi d\xi / \sqrt{(b_t^2 - \xi^2)(\xi^2 - a_t^2)} \quad (A_4.2)$$

$$J_{C2} = \int_{a_t}^{b_t} 2\sqrt{\xi^2 + 4r^2} d\xi / \sqrt{(b_t^2 - \xi^2)(\xi^2 + a_t^2)} \quad (A_4.3)$$

である. J_{C1} については次の結果となる.

$$J_{C1} = \pi \quad (A_4.4)$$

J_{C2} については, 変数 ϕ を導入すると

$$J_{C2} = 2 \frac{k}{\bar{k}} \int_0^{\pi/2} \frac{1 - \bar{k}^2 \sin^2 \phi}{\sqrt{(1 - k^2 \sin^2 \phi)(1 - \bar{k}^2 \sin^2 \phi)}} d\phi$$

文献 11, 公式 284.09 より新しい母数 μ を導入して, 最終的に次の表現をうる.

$$J_{C2} = \{2k/(\bar{k}\bar{k}')\}\tilde{I}^{(1)}(\alpha_1, \mu) \quad (A_4.5)$$

Appendix V 二重積分 J_D の評価

J_D は以下に示す積分である.

$$J_D = \oint_{C_{w.}} d\xi \frac{\xi + \sqrt{\xi^2 + 4r^2}}{W(\xi)} \\ \times \int_{a_t}^{b_t} d\xi_1 \frac{\xi_1^2}{\sqrt{\xi_1^2 + 4r^2}} \frac{W(\xi_1)}{\xi^2 + \xi_1^2} \quad (A_5.1)$$

この二重積分の積分順序を交換すると,

$$J_D = \int_{a_t}^{b_t} d\xi_1 \xi_1^2 W(\xi_1) \{J_{D1}(\xi_1) \\ + J_{D2}(\xi_1)\} / \sqrt{(\xi_1^2 + 4r^2)} \quad (A_5.2)$$

$$J_{D1}(\xi_1) = \int_{a_t}^{b_t} \frac{2\xi}{\sqrt{(b_t^2 - \xi^2)(\xi^2 - a_t^2)}} \frac{d\xi}{\xi^2 - \xi_1^2} \quad (A_5.3)$$

$$J_{D2}(\xi_1) = \int_{a_t}^{b_t} \frac{2\sqrt{\xi^2 + 4r^2}}{\sqrt{(b_t^2 - \xi^2)(\xi^2 - a_t^2)}} \frac{d\xi}{\xi^2 - \xi_1^2}$$

$J_{D1}(\xi)$ については次の結果となる.

$$J_{D1}(\xi_1) = 0 \quad (A_5.4)$$

$J_{D2}(\xi)$ については変数 ϕ を導入すると,

$$J_{D2}(\xi_1) = \frac{2}{b_t^2 - a_t^2} \\ \times \frac{k}{\bar{k}} \left[\int_0^{\pi/2} \frac{\bar{k}^2 d\phi}{\sqrt{(1 - k^2 \sin^2 \phi)(1 - \bar{k}^2 \sin^2 \phi)}} \right. \\ \left. - \int_0^{\pi/2} \frac{1 - \bar{k}^2 \sin^2 \phi_1}{\sqrt{(1 - k^2 \sin^2 \phi)(1 - \bar{k}^2 \sin^2 \phi)}} \right. \\ \left. \times \frac{d\phi}{\sin^2 \phi - \sin^2 \phi_1} \right]$$

文献 11, 公式 284.09 より新しい母数 μ を導入して,

$$J_{D2}(\xi_1) = [2k/\{(b_t^2 - a_t^2) \\ \times (\bar{k}\bar{k}')\}]\{\tilde{I}^{(3)}(\alpha_3, \mu)/\sin^2 \phi_1\}$$

式(A2.6)より次の表現をうる.

$$J_{D2}(\xi_1) = -\frac{2\sqrt{1+\bar{r}^2}}{b_t^2 - a_t^2} \\ \times \frac{\sqrt{1 - \bar{k}^2 \sin^2 \phi}}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi}} \frac{KZ(\psi_1, \mu)}{\sin \phi_1 \cos \phi_1} \quad (A_5.6)$$

式(A5.2), (A5.5), (A5.6)より

$$J_D = -2b_t^2 k^2 \int_0^{\pi/2} \sin \phi_1 \cos \phi_1 KZ(\psi_1, \mu) d\phi_1 \quad (A_5.7)$$

$Z(\psi_1, \mu)$ の中の変数が ψ_1, μ であることから, 変数を ϕ_1 に統一する.

$$\sin \phi_1 = \sqrt{\bar{k}'^2 \sin^2 \phi_1 / (1 - \bar{k}^2 \sin^2 \phi_1)}$$

の関係がある.

$$J_D = -2b_t^2 k^2 \bar{k}^2 [K(\mu)\tilde{J}_{D1} + E(\mu)\tilde{J}_{D2}] \quad (A_5.8)$$

ここで,

$$\tilde{J}_{D1} = \int_0^{\pi/2} E(\psi_1, \mu) \sin \phi_1 \cos \phi_1 d\psi_1 \\ / (\bar{k}'^2 + \bar{k}^2 \sin^2 \phi_1)^2$$

$$\tilde{J}_{D2} = -\int_0^{\pi/2} F(\psi_1, \mu) \sin \phi_1 \cos \phi_1 d\psi_1 \\ / (\bar{k}'^2 + \bar{k}^2 \sin^2 \phi_1)^2$$

$\tilde{J}_{D1}, \tilde{J}_{D2}$ はそれぞれ次の結果となる.

$$\tilde{J}_{D1} = \frac{-1}{2\bar{k}^2} \left\{ E(\mu) + \frac{\mu^2}{\bar{k}^2} K(\mu) \right. \\ \left. - \frac{1}{\bar{k}'^2} \left(1 - \frac{\mu^2 \bar{k}'^2}{\bar{k}^2} \right) \tilde{I}^{(1)}(\alpha_1, \mu) \right\}$$

$$\tilde{J}_{D2} = (1/2\bar{k}^2) \{ K(\mu) - (1/\bar{k}'^2) \tilde{I}^{(1)}(\alpha_1, \mu) \}$$

そして, これらの関係より, 次の表現をうる.

$$J_D = b_t^2 (1 + \bar{r}^2) (\mu^2 \bar{k}^2 / \bar{k}^2) K^2(\mu) \\ - (1 + \bar{r}^2) b_t^2 \{ K(\mu) [1 + (\mu^2 \bar{k}^2 / \bar{k}^2)] \\ - E(\mu) \} \tilde{I}^{(1)}(\alpha_1, \mu) \quad (A_5.9)$$