非定常遷音速空気力と空力弾性^{*1}

アール H. ダウエル^{*2}

Key Words: Aeroelasticity, Unsteady Flows, Transonic Flows

概 要

四つのおもだった疑問について議論する。

- 空気力が、本質的に翼の運動の線形関数になるのは、どのような条件下であろうか。
- 空気力が、翼の運動に対して非線形関数であるという場合に、時にみられる、多価解(非一義解)は、どういう意味をもつのか。
- 流体運動の方程式を解く、差分法にとって代わるような有望な手法は、あるだろうか。
- 空力弾性(たとえばフラッタ)の解析において、非定常遷音速空気力計算機コードを使ったとき、確かで効率の良い計算手法は、何であろうか。

1. は じ め に

概要に掲げた、四つの質問を、この論文の骨子となるように選んでみた。こう選んだのには、いくつか理由がある。

- これらは、重要であり続けると思われる基本的な疑問であること。
- これらの質問に対する解答には、非定常遷音速空気力を空力弾性問題に適用することに関して、重要な帰結を含んでいること。
- 最近の研究は、少なくとも部分的に、これらに

対する答をひきだしていること。

しかしながら、これらの質問が、決して興味ある疑問のすべてを尽しているわけではない。

- 粘性や流れの剝離の重要な効果とか
- 差分解法で遂げた、意義深い進歩、およびそれにひき続く、遷音速流れのより高度な物理的解釈などといったいくつかの疑問については、幸いにして他の文献¹⁻⁴⁾に議論されている。

四つの質問を、それぞれ、2, 3, 4, 5章で論じる。各章は、他の章とは比較的独立して読むことができるので、読者には、適宜それを活かしていただきたい。

2. 非定常遷音速流れの線形/非線形挙動

2.1 動機と一般的な背景 空力弾性屋達は、ほとんどの空力弾性問題の解析に、動的線形系としての理論を用いている。なぜそうするのか、その動機は明白である。これまで、多くの経験、解釈、そして有効な計算/実験手順といったものが、線形系についてなされてきた。これに対し、非線形の解析や実験手法は、使えたとしても、その結果を得る段になると、とてつもなく高価なものについたり、また、解釈することがかなりむずかしくなったりする。こうしたことで、線形モデルは、適用さえできれば、非常に強力で、比較的単純で、しかもきわめて有用なのである。したがって、その線形モデルの有効範囲を見定めることが、非常に重要となってくる。

ここでも、われわれが対象とするのは、遷音速流れで実際に起こりうる、空力的非線形性についてである。もちろん、空力的な非線形性は、他の流れの領域でも起こるであろう。が、しかし、それが最も重要なことになりそうなのは遷音速流れである。事実、遷音速流れの領域では、その場の支配方程式が、本質的に非線形であることがしばしば起こる。しかし、いかなる翼型、いかなるマッハ数においても、もし迎角が十分に小さければ、空気力や衝撃波の運動は、迎角に関して線形となるであろう。さらに、迎角変動の振動数が増すにつれて、線形挙動とみなされる迎角の範囲が広がる、ということがいえる。おもな解析手段とし

著 者 紹 介

アール H. ダウエル (Earl H. Dowell) 1964 年 MIT において Sc. D. 取得。MIT 助教授、プリンストン大学教授を経、1983 年工学部長としてデューク大学教授、現在に至る。空力弾性学、構造力学、音響学の分野の研究者として知られる。アメリカ航空宇宙学会 SDM 学会賞受賞。昭和 59 年 11 月日本学術振興会の招へいで来日。

^{*1} 昭和 59 年 11 月 27 日、第 22 回飛行機シンポジウムで特別講演。昭和 60 年 6 月 29 日原稿受理 Unsteady Transonic Aerodynamics and Aeroelasticity

^{*2} Earl H. DOWELL デューク大学工学部長
翻訳：上田哲彦 (航空宇宙技術研究所)

て, Ballhaus と Goorjian^{5,6)} による, 低振動数, 遷音速微小擾乱の手法 (LTRAN 2) を用い, どのくらいまで線形で, どこから非線形になるのか, ということを調べるのを, ここでの目的とする. 既存の, あるいは将来のどんな非線形の空気力計算法でも, 同様の目的に使うことができる (また, そうするべきでもある).

まず, 衝撃波とその動きについて議論するのが, 理解の手助けになるだろう. これは, しばしば混乱のもとになるものである. 変動迎角についての定常微小擾乱空気力の理論では, どの適合*線形化の結論も, 集中荷重あるいは (しばしば, ショック・ダブレットと呼ばれる) 圧力パルスが, 定常状態の衝撃波位置に現れる^{7,8)} ことをいっている. 圧力パルスの強さは, 定常衝撃波の圧力跳躍に等しく, またその変動幅は, 変動迎角の大きさに比例する. これに対し, 翼弦の他の部分 (定常衝撃波の位置に中心をもつショック・ダブレットから離れた所) では, 圧力の振幅が (線形遷音速理論において) 変動迎角に比例し, 変動迎角が小さくなるにつれて, 比例して小さくなる. もちろん, 後者の振舞は, 古典理論でも同じである. 古典的線形理論と遷音速線形理論の最も重要な (これだけではないが) 相違点は, 後者における衝撃波の存在 (とその運動) であり, それは, 集中した衝撃力ダブレットを生じさせることにある. LTRAN 2 や他の遷音速計算機コードは, 衝撃波とその運動をとともに含んでいるが, 古典的な空気力学理論は, そのどちらも含んでいない. いくつかの, 非適合な遷音速手法では, 衝撃波の存在は含んでいるが, その運動は含まれていない.

これらの振舞いは, 変動迎角が小さくなった場合の非線形動力学理論でも見ることができる. LTRAN 2 を使って得た第1図を考えてみよう. これには, いくつかの迎角に対して, $M_\infty=0.86$ の, NACA 64 A 006 翼型の翼弦方向差圧分布 (下面から上面を引いたもの) を示してある. ここでは, 簡単のため, 定常と非定常の差を (数値的に) なくするように, 無次元振動数をゼロとしている. $\alpha=0.125^\circ$ とか 0.25° とかいった小さな迎角で見られるように, 圧力分布には, 平均 (迎角) 衝撃波位置, $x_s=0.584$ まわりのショック・ダブレットが現われる. ショック・ダブレットの幅は縦線で示してあり, 前方のものは下面にあるもので, 後方のものは上面に位置するものである. この幅は, 微小の α においては, α に比例する. しかし, α が増加し, 1° に近づくとつれ, 下面の衝撃波は消滅

第1図 差圧分布

し, 上面の衝撃波は後縁に向かい, そこに留まる. 小さな α に対しては, また, ショック・ダブレットの強さが, $\alpha=0$ の衝撃波前後の圧力跳躍を本質的に等しく, すなわち 0.43 である. ショック・ダブレットを離れたところでは, 圧力は, 小さな α で α に比例している. 最後に, 実用上重要なことであるが, 小さな α で, ショック・ダブレットの幅が狭くなるにつれ, α について非線形的な差分法はどれも, $\alpha \rightarrow 0$ で精度上の問題を生じる. これに対して, あらかじめ α について線形化する方法では, 衝撃波の運動を陽的に計算するため, こういった障害を避けることができる (たとえば Williams^{7,8)} や Fung 等⁹⁾ を参照). また, 理論と実験の洞察力のある評価については, Tijdeman¹¹⁾ や, Tijdeman と Seebass²⁾ の議論を参照されたい. Davis と Malcolm¹⁰⁾ の実験的研究は, 上記の確証をはっきりと与えており, ここでの議論にはとくに適切なものである.

2.2 $M_\infty=0.86$, 前縁まわりにピッチング運動する NACA 64 A 006 翼型 おもに次の事柄について検討された¹¹⁾. 動的空気力と衝撃波の動きに対する, 各無次元振動数での変動迎角の影響; 線形/非線形挙動の境界; 空力伝達関数に対する無次元振動数と振幅の影響; 定常空気力と衝撃波位置に対する変動迎角の影響; 動的空気力と衝撃波の動きに対する定常迎角の影響. ここでは, 紙面の都合により, 初めの2件のみを考えるにとどめる.

2.3 動的な力と衝撃波の動きに対する変動迎角の影響 揚力, ピッチングモーメントおよび衝撃波の運動が比較的線形であると見なせるか, それとも非線形であるのかを決めるため, どのくらいの振幅になると非線形効果が卓越してくるのか, を眺めてみたい.

* (訳注) 変動空気力成分を導く場合, 衝撃波の位置の変化を考慮してあるものを適合 (consistent) と呼び, 衝撃波位置を近似的に定常流位置や運動の平均位置に固定して扱うものを非適合 (inconsistent) と呼んでいる.

全体の揚力 (モーメント, 衝撃波の運動も同様) が, $C_L = C_{L0} + C_{L1}$ と分解されることに注意する. ここで, C_{L0} は, 平均迎角 α_0 による揚力, C_{L1} は, 与えられた α_0 まわりの, 変動迎角による揚力と定義する. 古典的線形理論 (遷音速線形理論ではない) では, C_{L1} は α_0 に独立である.

第2図では, 無次元振動数, $k=0.2$ について, 揚力, ピッチング・モーメントおよび衝撃波の変位が, 変動迎角 α_1 の関数として示されている. 揚力およびモーメント係数は, 通常定義によるもので, モーメントは翼弦中心まわりにとった. 衝撃波の変位は, 翼弦長で無次元化してある.

揚力は, モーメントに比べて大きな振幅に至るまで線形性を保持する傾向にあり, 一方, モーメントは, 衝撃波に比べると, より大きな振幅まで線形性を保つ傾向にあることがわかる. さらに, 後で述べるが, 無次元振動数が高くなればなるほど, 線形挙動の範囲は広がってくる. どの数値結果においても, 検知できるほどの高次調和成分は, なかったことを注意したい. 結果は, 揚力, モーメント, および衝撃波運動について, 実質的に単振動であった; したがって, 振幅や位相の決定は, いくつかの既存の方法のどれによっても, ただちに行うことができた.

2.4 線形/非線形挙動の境界 第2図に示ような結果を使って, 線形/非線形の境界線を, マッハ数対翼の振幅といった形で作ることができる. 線形からはずれた, という規準は, 衝撃波変位量が, 0.05 翼弦長を越える点に選んだ. 第2図に見られるように, この衝撃波変位5%の規準は控えめである. すなわ

第2図 動的空気力と衝撃波運動に対する変動迎角の影響 (振幅)

第3図 線形/非線形挙動の境界に対する無次元振動数の影響 (マッハ数～変動迎角)

ち, 揚力やモーメントは, この規準による α よりも高い α まで, 線形性を保つ傾向にある. また, この傾向は, 他の適当な規準でもってしても変わらない. しかし, 衝撃波が後縁に非常に近い位置まできたときには, この5%規準は, 修正する必要があるだろう.

$k=0$ と 0.2 について, 結果を第3図に示す. 定常流れ ($k=0$) で $M_\infty=0.88$ と 0.9 の場合, 線形挙動であるためには, 迎角が非常に小さくしなければならないことに注意する. 実際, これらのマッハ数の $k=0$ では, この線形性は成立しえないようである. 反面, $k=0.2$ では, 線形範囲は大きく広がっている. $M_\infty < M_\infty^{sc}$ あるいは, $M_\infty > M_\infty^{tc}$ で, すべての実用的な目的では, 線形範囲は制限なし, となる. 実際上, この範囲では非粘性・微小擾乱・遷音速理論の非線形性が重要になる前に, 他の物理効果, たとえば粘性などの影響が現れてくるであろう. M_∞^{sc} は, 衝撃波が初めて形成されるマッハ数であり, M_∞^{tc} は, それが後縁に到達するときのマッハ数である.

2.5 結論 衝撃波のない, $M_\infty < M_\infty^{sc}$ では, 実用的な迎角の範囲を通して線形である. これはまた, 衝撃波が後縁まで移動してしまった $M_\infty > M_\infty^{tc}$ でも同じである. $M_\infty^{sc} < M_\infty < M_\infty^{tc}$ では, 定常流れ ($k=0$) において, 線形挙動の起こる迎角が非常に小さくなるような線形/非線形の境界線が形成される. しかし, 線形挙動の範囲は, 非定常流れについては大体増加する.

$M_\infty^{sc} < M_\infty < M_\infty^{tc}$ の範囲では, 遷音速微小擾乱理論 (LTRAN 2) や完全ポテンシャル理論は, ある狭い M_∞

の帯域で $k=0$ ではうまくないようである。そこでは、衝撃波変位を、したがって空気力を、相当過大に見積もってしまう。このことは、さしあたって、理論に粘性が含まれていないことに原因があるとされよう。

空力伝達関数は、線形挙動に対して厳密に適用するものであるが、非線形の動的効果が重要となってきた場合でも、その有効性を維持できるものと考えられる。その理由として、

- 1) 非線形効果は、振動数が増すにつれて減少する。
- 2) 高い振動数では、古典的線形理論が適度に精度があり、実際、非粘性理論は、振動数が大きくなるにつれ、古典的線形理論に近づいていく^{7,8)}。

ことが挙げられる。

低振動数遷音速微小擾乱理論では、相似則が使え、それは必要とする多大の計算量を節減し、また、一つの翼型に関する結果を、翼型系全体にまで普遍化することができる。この議論については文献11を参照されたい。

ここでは、2次元流れを論じてきたが、一般的な考え方ややり方は、3次元流れに対しても有効である。とくに、3次元効果は、遷音速流についての線形挙動範囲を拡げる要因として期待できる。たとえば、遷音速微小擾乱理論、局所線形化、および古典理論などの精度は、3次元効果によって向上するであろう。

空力解析のいかなる遷音速の手法であっても、それが予知し、使用する平均定常流れが、正確なものでなければ、空力弾性屋達に有益な情報を与えることは期待できない。したがって、実験で得られるものも含めて、現在使用可能な、最良の定常流れを、直接入力できることが大いに望まれるところである。実験値を使うものは、定常流れ分については、おのずと粘性効果を含むものとなろう。とくに、平均衝撃波を正しい位置に据えることになる。

3. 遷音速流れにおける非定常振動についての多価性、遷移時間、および平均値

3.1 これまでの研究 Kerlick と Nixon は文献12において、遷音速流れにおける振動翼についての揚力を検討するために差分時間進行法による計算機コードを使用する場合、実質的な定常流れを得るまでには、時間を十分に進める必要がある、という重要な指摘を行った。さらに彼らは、定常状態に到達するまでの、遷移時間の推定法を示している。また、もし、遷移が完了する前に、すなわち定常状態に至る前に時間進行解を止めてしまったとすると、実際には起こらな

いにもかかわらず、翼の振動によって平均揚力に変化を生じた、という誤った結論を導いてしまうことを注意している。

しかしながら、おそらく驚くべきことに、ある狭いマッハ数範囲では、遷移が衰退し定常状態に落ち着くまでの時間が、恐しく長くなる。さらに、ある非常に狭いマッハ数範囲内では、迎角ゼロのまわりに振動する対称翼型についての揚力の平均値が、ゼロでないことが起こりうるのである。

3.2 最近の研究 文献12では、計算機コード LTRAN 2 を使って、 0.25° の迎角変動で、さまざまな無次元振動数 k で振動する翼型のマッハ数 0.875 の自由流れについて扱っている。そこでは、平均揚力の値が対応する振動揚力のピーク値の1%以下になるのに、典型的な場合、翼の振動を6周期までとらなければならないことを示している。文献11で、筆者とその共同研究者達は、(同じく計算機コード LTRAN 2 を使って) さまざまなマッハ数や無次元振動数における、種々の翼型 64 A 006, 64 A 010, MBB-A 3 についての検討を行った。文献11での計算は、翼の振動の6周期までを、時間方向前向きに行っている。Kerlick と Nixon によって見いだされたように、64 A 006 (対称) 翼型についての文献11の結果は、振動の6周期で検討したほとんどのマッハ数に対しては、振動翼についての中心すなわち平均の揚力が、翼が振動しないときの値(すなわちゼロ)から実質的に変化していないことを示している。しかし、 $M_\infty=0.9$ では、状況が違っていた。よって筆者は、誤って、平均揚力に変化がおきたと結論づけた。正しい結論は、 $M_\infty=0.9, 0.88$ では、実質的にゼロまで平均揚力が落ち着くのに、多くの周期(>40)が必要である、ということである。筆者とその共同研究者がその後行った計算で、このことが裏づけられている。

このように、筆者は、ゼロでない平均揚力は、迎角振動に応答する非線形空気力系において、数学的には可能ではあるけれど、LTRAN 2 を使って調べたパラメータの範囲では、そのような揚力は観察されなかった、と結論づけた。しかし、あるマッハ数では、平均揚力が落ち着くまでの時間は、極端に長いものとなる。

次に筆者は、Peter Goorjian¹³⁾ との議論に利するところが大きい。彼は、ゼロでない平均揚力が実際起きたことを示す $M_\infty=0.89$ での計算⁹⁾を行った。Goorjian の結果は、文献14で、より総合的に論じられており、そこでは、この計算の拡張版が与えられている。しかるに、筆者も共同研究者である Ueda と、この M_∞ について計算を行ってみた。その結果を第4図

a) $N=1\sim 20$ サイクル b) $N=21\sim 40$ サイクル第4図 揚力のヒステリシス曲線～変動迎角
NACA 64 A 006, $M_\infty=0.89, k=0.2$

と第5図に示す。これらの結果は、 $M_\infty=0.89$ で、ゼロでない平均揚力が確かに起こることを、明らかに示唆している。

第4図に示す(ヒステリシス)曲線に沿って、時間が増えている。見てわかるように、20周期から後の方で平均揚力は、はっきりとゼロとは異なり、また、さらにそれは、振動揚力の相当量にあたる。平均揚力は

$$C_{L\text{AVG}} = (C_L^+ + C_L^-) / 2$$

また、振動揚力は

$$C_{L\text{OSC}} = (C_L^+ - C_L^-) / 2$$

と定義され、ここで、 C_L^+, C_L^- は、 C_L の時間履歴における2つの隣接するピークのうちの、それぞれ、正側

第5図 平均揚力～振動回数の逆数 ($M_\infty=0.89$)

と負側のピーク値を表す。第5図では、平均揚力を $1/N$ に対してプロットしてあり、 N は、迎角振動の周期数である。

Goorjian が説明しているように、もし、翼の振動を正ではなくて、負の初期迎角から始めたとすると、平均揚力は、それに対応して、正ではなくて負となる(大きさは同じ)。実際、ヒステリシス曲線は、 C_L と α をともに符号返転させた2重鏡像となる。さらに、もし、振動している翼を、ちょうどゼロ迎角の位置で静止させると、平均揚力は、ある有限の値にとどまる。このことは、この単一(ゼロ)の迎角に対して、揚力には3個の解が存在することを示すことになる。この結果と、Steinhoff と Jameson¹⁸⁾の結果とは、完全に符合する。彼らは、完全ポテンシャル方程式の直接計算により非一義(多価)定常流れ解を得ている。

より最近、Salas¹⁹⁾は、定常流れについて、完全ポテンシャル方程式とオイラ方程式を調べた。同じような条件で、完全ポテンシャル方程式では非一義解を見いだしたが、オイラ方程式では得られていない。しかし、数値計算という手段では、対象内のすべての可能な条件について、非一義解が存在していないことを証明するのは、きわめてむずかしいことである。

当然、疑問は解消されていない。

—なぜ、マッハ数の狭い範囲内で、このゼロでない平均揚力が生じるのか。ここで、非一義解が観察された $M_\infty \cong .89$ は、 $k \rightarrow 0$ としたときに、線形挙動が最も小さくなるマッハ数に対応していることをいっておこう。第3図参照。

—数学的モデル化の、もしあるとするなら、どのレベルで非一義解が起こらなくなるのか。

—この結果は、物理的に意味があるのか。とくに、

粘性流れモデルについては、このことに対応するものは、もしあるなら何であるのか。

4. 差分法に対抗する他の有望な解法

計算機技術のたゆまぬ進歩は、費用を漸減させるものと思われるが、今後10年間、経済学だけは、差分法の効率改善、そしてまた、より廉価な他の解法を考案することに対して、多大な努力を払うことをしているであろう。ここでは、後者について、おもに Hounjet¹⁷⁾ と Cockey¹⁸⁾ の最近の研究を引合いに出して議論してみる。その著者達は、少し異なった観点から、積分方程式法(IEM)を使った。Hounjetの前の研究¹⁹⁾では、Williams-Eckhausモデル^{7,8)}を基礎にしている。これはまた、Cockeyの出発点でもある。IEMを考える動機やそれまでの研究についての解説は、Hounjet^{17,20-26)}によってよくまとめられている。

Hounjet と Cockey は、ともに遷音速微小擾乱方程式近似を用いており、その速度ポテンシャルを、定常部 $\phi^{(0)}$ と、(翼の運動による) 非定常部 $\phi^{(1)}$ に分けた。(無限に) 小さな(調和)運動を仮定すると、 $\phi^{(1)}$ を支配する場の方程式は、 $\phi^{(0)}$ に依存する変数係数の線形方程式である。すなわち、

$$(1-M_\infty^2)\phi_{xx}^{(1)} + \phi_{yy}^{(1)} - 2ikM_\infty^2\phi_x^{(1)} + k^2M_\infty^2\phi^{(1)} = [(M_L^2 - M_\infty^2)\phi_x^{(0)}]_x \quad (1)$$

ここで M_∞ は流れのマッハ数であり、 k は翼弦長を c とする無次元振動数 $k = \omega c / 2U$ である。 c は長さを無次元化するのに使われる。 M_L は局所マッハ数で

$$M_L^2 = M_\infty^2 + [3 - (2 - \gamma)M_\infty^2]M_\infty^2\phi_x^{(0)} \quad (2)$$

である。 $\phi^{(1)}$ の添字は、空間についての微分を表す。

ここからは、Hounjet と Cockey のやり方は違った道筋をとる。(1)式の右辺をゼロにすると、古典空気力理論になることに注意する。

4.1 Hounjet 古典空気力学((1)式左辺)のグリーン関数を使って、未知数 $\phi^{(1)}$ についての積分方程式を得る。すなわち

$$\begin{aligned} \phi^{(1)}(x, y) = & \int_0^\infty \Delta\phi^{(1)}(u) \frac{\partial}{\partial y} [E(x-u, y; k, M)] du \\ & + \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty m(u, v) \\ & \times E(x-u, y-v; k, M) dudv \quad (3) \end{aligned}$$

(3)式の右辺で、第1項は翼弦(と後流)に沿う積分であり、第2項の積分は、全体の流れ場(下記参照)についてのものである。 E は、放射条件と次式を満たす基本解を表す。

$$(1-M_\infty^2)E_{xx} + E_{yy} - 2ikM_\infty^2E_x + k^2M_\infty^2E = e^{ikx}\delta(x)\delta(y) \quad (4)$$

ここで $k \equiv kM_\infty^2/\beta^2$ で、 m は次式で与えられる。

$$m(x, y) = [3 - (2 - \gamma)M_\infty^2]M_\infty^2[\phi_x^{(0)}\phi_y^{(1)}] \quad (5)$$

古典(積分方程式)空気力理論では、もちろん、(3)式の2番目の積分は、 $\phi_y^{(0)}$ がゼロであることから、存在しない。遷音速 IEM においても、第2項は、 $\phi_y^{(0)} = 0$ である流れ場では、どこでも無視できる。すなわち、定常流れが十分に一樣である場合である。したがって、全流れ場の比較的小さな部分のみが、2番目の積分項に寄与し、そしてこのことが、この後の計算をかなり簡単なものにする。ここが、効率良い計算機コードを実現するためのキーポイントである。そして、(3)式の数値解は、Hounjet¹⁷⁾によって記述されているように決めることができる。

Hounjet によって求められた数値解は、二つの主要な特色を示す。

- (1) (翼の運動における線形化に関する)精度は、差分法によって得られるものと同程度である。
- (2) 計算時間は、LTRAN 2 (代表的な差分コード)の約1/4である。

最近 Hounjet は、この方法を3次元流れに拡張している*。

4.2 Cockey まず、(1)式を再記すると、

$$\begin{aligned} (1-M_\infty^2)\phi_{xx}^{(1)} + \phi_{yy}^{(1)} - 2ikM_\infty^2\phi_x^{(1)} + k^2M_\infty^2\phi^{(1)} \\ - (M_L^2 - M_\infty^2)\phi_{xx}^{(1)} - 2M_L(dM_L/dx)\phi_x^{(1)} = 0 \quad (10) \end{aligned}$$

もし、(10)式の左辺についてグリーン関数が定まったものとする、 $\phi^{(1)}$ についての積分方程式は、翼弦、衝撃波、および後流に沿う積分だけを含み、流れ場自体(衝撃波部分を除く)は含まれない。生憎、(10)式の終りの2項が変数係数であるため、このグリーン関数を求めることは、至難の業である。

そこで、Cockey は、グリーン関数を(近似的に)得るため、 M_L と dM_L/dx に対する局所線形化近似により、(10)式を変形した。あとの計算は、積分が翼弦(と後流)に加えて、衝撃波にも沿う以外、通常の手法に従う。

Cockey によって得られた結果は、二つの主要な特色を示す。

- (1) 衝撃波とその動きが考慮されているにもかかわらず、精度は、差分法のそれよりかなり悪い。
- (2) しかし、計算コストは、古典空気力理論にひけをとらない。

(1)はもちろん、残念な結果である。しかしながら、Cockey モデルでの衝撃波の旨い組み込み方と、Hounjet の実質的な成功は、Hounjet と Cockey の方法の特色を組み合わせるやり方を示唆している。

* (訳注) AIAA J., Vol.23, No. 4, 1985.

4.3 Hounjet と Cockey の考えられる統合 再び(1)式を考える。Cockey の方法で、 $M_L, dM_L/dx$ が、グリーン関数を得るために近似されたことを考えて、(1)式を次のように書き直す。

$$\begin{aligned} & (1 - M_\infty^2) \phi_{xx}^{(1)} + \phi_{yy}^{(1)} - 2ikM_\infty^2 \phi_x^{(1)} \\ & + k^2 M_\infty^2 \phi^{(1)} - (M_{LA}^2 - M_\infty^2) \phi_{xx}^{(1)} \\ & - 2M_{LA} \frac{dM_{LA}}{dx} \phi_x^{(1)} = (-M_{LA}^2 + M_L^2) \phi_{xx}^{(1)} \\ & + 2(M_L \frac{dM_L}{dx} - M_{LA} \frac{dM_{LA}}{dx}) \phi^{(1)} \end{aligned} \quad (11)$$

(11)式の右辺をゼロにおくと、Cockey のモデルになる。しかるに、右辺があると、導かれる積分方程式を解くのに、Hounjet の方法が使え、そこで、(1)式の左辺に対応した (Hounjet が使った) 古典的グリーン関数の代わりに、(11)式の左辺に対応した Cockey の近似的なグリーン関数を使う。おそらく、この複合法 (すなわち(1)式の代りに(11)式)を使う利点は、(11)式の右辺が、通常(1)式の右辺より小さく、したがって Hounjet のやり方に含まれている流れ場の範囲がせばまり、またしたがって、結果として計算機コードが、より効率よいものとなる点であろう。

最後に、この方法 (Hounjet の方法あるいはここで提案した複合法)は、いくつか考えられる形の右辺が、もちろん、ここでは既知である、という点が異なっているけれども、Lighthill のジェット騒音の理論²⁷⁾を偲ばせるものであることを書き留めておく。

5. 非定常遷音速空力コードを使った、空力弾性応答を決める効果的で効率よい計算方法

5.1 種々の計算法とその利点の比較 基本的な論点は、

- フラッタ解析を行う前に、規定された翼の運動に対して空力コードを走らせ、得られた空気力のデータを保存して使うべきなのか (オプション I)
- 翼と空気力の時間履歴を同時に決めるため、構造動力学コードと空力コードをいっしょに走らせるべきなのか (オプション II)

である。

二つのタイプの空気力計算機コードが使える。

- (1) 時間領域で計算するもの^{5,6,28,29-33)}。
- (2) 振動数領域で計算するもの^{7,8,17,34)}。

タイプ(2)のコード使用は、もちろん、オプション II の遂行を除外する。一方、タイプ(1)の計算機コードを使う方は、オプション I であっても II であってもよい。

以下に、それぞれのタイプの計算機コードをどのように使えば最も効果的であるのか、といったことで考

察を進め、タイプ(1)のコードに対しては、オプション I と II の利点を比較し議論する。とくにことわらない限り、フラッタの開始条件を決定するだけの、線形フラッタ解析を考える。タイプ(2)の空力コードは、暗に、この場合に限ることを想定している。また、後で議論するように、タイプ(1)の空力コードを使う場合は、線形あるいは非線形フラッタ解析のどちらでもよい。

5.2 タイプ(1)の空力コード—時間領域 フラッタ解が、 P 個の変数の組合せ (たとえば、動圧、翼端質量、舵面剛性)と、 M 個の構造モードについて得られるものとする。さらに、空気力計算機コードが翼のあらかじめ与えた運動について定常揚力になるまでの所用計算時間を、 T_A とし、流体・構造の同時時間進行計算が、遷移を終えるまでにかかる計算時間を、 T_F とする。 T_A と T_F の相対的大きさは、翼型形状、マッハ数 (T_A が)あるいは、構造減衰 (T_F が)に依存する。一般には、 $T_F > T_A$ であるが、例外もある。いくつかの M_∞ についての計算は、たんに、場合の数に比例して計算量がふえるだけなので、簡単のため、ある固定したマッハ数のみ考える。

では、オプション I と II を比較して利点を考えてみよう。

5.2.1 オプション I: 空力弾性計算前に空気力データ作成と保存 空気力を作る場合の総計算時間は、

$$M * T_A \quad (1.I)$$

で、 P に独立である。フラッタ解析自体にも、いくらか余分な時間がかかるが、それは、空気力を作るのに要する時間に比べると、とるに足らない量である。

5.2.2 オプション II: 空気力データと構造データの同時作成 総計算時間は

$$P * T_F \quad (1.II)$$

であり、もちろんこれは M に独立である。明らかに、二つのオプションのどちらが一般に好ましいかは、

$$M * T_A \leq P * T_F$$

による。オプション II がより好ましいものとなるためには、モード数 M が、パラメータの数 P より、何がしか多くなければならない。したがって、オプション II は、設計確認計算においてより有効であり、オプション I は、初期設計段階で、より有効となろう。

5.3 タイプ(2)の空力コード—振動数領域 この場合には、これまでオプション I のみが使われてきたが、下記の議論を参照されたい。

NF をフラッタ解析に必要な無次元振動数の数とする。 T_{AF} を、計算機コードが、一つの振動数について空気力を決めるのに要する時間とする。モードの数が

計算時間に影響しないように、空力影響係数法を使うものとする*。

オプションI: 空気を算出する計算時間は

$$NF * T_{AF} \quad (2.I)$$

(2.I) と時間領域で空気を計算する時間を比べる。前述の議論と (1.I) を参照のこと。

$$NF * T_{AF} \geq M * T_A$$

もし、 T_{AF} と T_A が同程度であるなら (競争によりそのようになる傾向がうかがえる)、(1.I) と (2.I) の間でどちらを選ぶかは、空力弾性計算で必要とするモードの数 M に対する振動数の数 NF に依存する。

オプションIA: このやり方は、まだ行われたことはないが、振動数領域の空気を求めてきて、パデ近似、あるいはそれに相当する表現³⁵⁾により曲線の当てはめを行い、それを用いて空気の微分方程式表示^{36,37)}を見だし、それから、時間進行フラッタ解析を行う。計算時間は、およそのところ、やはり

$$NF * T_{AF} \quad (2.IA)$$

となる。直接的な時間進行の空力コードを使う場合の対応する計算時間は (前議論参照)

$$P * T_F \quad (1.II)$$

である。 $T_{AF} \sim T_F$ と仮定すると、必要な無次元振動数の数に比べて、パラメータの数が多い場合には、オプションIIを使う時間領域法より、振動数領域空力法のほうが好ましいものとなる。

5.4 比較のまとめ (1.I), (1.II), (2.I), (2.IA) の推算を比較することにより、与えられた状況において、どれを選択するか、ということ、初期判断できるであろう。

5.5 非線形フラッタ解析

5.5.1 一般的考察 もし、非線形フラッタ解析が必要となれば、時間領域空力法、タイプ(1)、しか使えない。

もちろん、空力弾性計算は、時間領域あるいは振動数領域のどちらでも行える。しかし、オプションIとIIとの間には、若干のやりとりがある。オプションIでは、対象とする翼の応答レベルの数、 NR 、という乗数因子をさらに使わなければならない。線形のフラッタ解析では、1個の応答レベルのみが対象となる (厳密には、ゼロに向かう無限小の応答レベル)。したがって、比較する計算時間は、

$$\text{オプションI: } NR * M * T_A$$

$$\text{オプションII: } P * T_F$$

さらに、非線形フラッタ解析の場合には、パラメータの数、 P 、が、線形フラッタ解析より、何がしか多

くなる傾向にあることを注意しておく。

この二つのオプションが相対的にどちらがよいのか、については、オプションIに現れる因子 NR の分だけオプションIIに向く傾向にあること以外、前と同じである。非線形フラッタ解析において、オプションIを使えば、実際、振動数領域でのフラッタ解析になり、よるところの方法論は、文献38と39に記述されている。もちろんこの方法論は、翼の応答レベルが小さいとき、古典的な振動数領域のフラッタ解析に還元する。最近行われるオプションIIによる解法は、そのままわかりやすいもので、ここではとくにこれ以上ふれない。また、次のことをいっておくべきであろう。

- 振動数領域の非線形フラッタ解析では、通常、時間領域解析の近似より多くの近似を導入する。しかし、
- 幸いにして、線形のフラッタ解析は、それでよくこと足りるものであり、したがって、質問全部が、しばしば疑問の対象となってしまうことがある。

6. 結 論

6.1 現時点での解答 本論は、四つの質問から始めた。これらに対する解答は、将来必ずや洗練されていくものと思われる。しかし、現在までの知識に基づき、部分的な答としては、次のようなるだろう。

- 翼の十分に小さな運動 (翼弦長の5%以下の十分小さな衝撃波運動まで) に対しては、空気力は翼の運動に関して線形関数となる^{1-5,9,10)}
- 遷音速微小擾乱と完全ポテンシャル流れの解の、ある条件下で観察される非一義性は、支配方程式そのものに内在し、解法の数値的な所産ではない¹³⁻¹⁶⁾。オイラ方程式では、今日までこれに対応する解の非一義性は観察されていない。しかし現時点で、ポテンシャル流れの方程式解における非一義性が、ある条件で、オイラ方程式の解にも、あまり劇的ではない (あるいは同じくらいの) 形にしろ、あるかないかを見きわめるのはむずかしい。これは、今後の研究としての重要な課題*である。さらに、もしあるとするなら、そのような解の物理的意味を明らかにしなければならない。
- 差分法に対抗しうる有望な方法は、少なくとも一つ使えよう。Hounjet のフィールドパネル法で

* もし空力マトリックスの逆行列と直接とらずに、緩和法を使うとすると、新たな問題が生じる。

(訳注) 最近のNASAの情報では、非一義性は、衝撃波の等エントロピの仮定に帰因するという結論になりつつあるようである。

ある。この方法は、まだいっそうの改善が期待される。それは、ここで議論したように Cockey¹⁸⁾の研究であるかもしれない、また、3次元流れへの拡張でもあるだろう。差分法対有限要素法対フィールドパネル法の相対的利点については、今後の課題であり、これは、まちがいに活発な議論を呼ぶものと思われる。

- 空力弾性応答を決めるため、流体および構造の運動方程式を連立させて、時間について積分するオプションは、いくつかの応用に対しては魅力あるものである一方、振動数領域のフラッタ解析も依然として重要であり、ときにはより魅力的なオプションにもなりうる。振動数領域の空気力を作り出す方法として使えるものは、
 - ・ あらかじめ無限小調和翼運動を仮定する空力法^{7,8,17,38)}
 - ・ 時間進行空力コートによって得られる単一の時間履歴記録から、振動数領域のデータを作り出す、インパルス～伝達関数の考え方^{38~40)}
- 空力弾性解析については、相対的計算時間の簡単なオーダ評価が可能で、本論の中で議論された。線形のフラッタ解析は、遷音速流れの領域^{38~43)}においても、有力な役割を保ち続けるであろう。

6.2 今後の課題 なすべき研究課題は、枚挙にいとまがない。ここでは、対象としている流体および空力弾性現象の物理的なモデル化と解釈を、それらに共通のテーマとして改善してきた2, 3のものに焦点を絞ることにする。

- ・ ポテンシャル流れの解と、オイラ方程式の解において、前者が非一義解を呈する条件で、両者が表す定性的な差異をよく理解する必要がある。この差異を理解し解決するまで、これは、非一義解が観察される条件で、粘性の修正のためにポテンシャル流れの解と境界層修正を組み合わせるような方法すべてに、疑問を投げかけることになる。
- ・ オイラ方程式のためのより有効な(効率よい)解法をいかに考案するか、ということが、互いに補いあう論点でもある。MagnusとYoshihara⁴⁴⁾の先駆的業績から後、みるべきものはない。

いくつかの見込のある利点を持った可能性のある方法は、非線形の平均定常流れに、小さな(無限小)線形の動的擾乱がつけ加わったものとして流れを扱ってもよい、と仮定する方法がある。このやり方は、Williams^{7,8)}、FungとSeebass⁹⁾、Hounjet¹⁷⁾、EhlersとWeatherill⁴⁴⁾等によって、ポテンシャル流に対して効果的に使われている。

この方法はまた、Lighthill⁴⁵⁾、Williams他⁴⁶⁾等によって、パネルフラッタ(揚力なし)や揚力面空気力において境界層効果をモデル化するのに、その一つの極限的な形で使われている。

こうすることで、変数係数(空間依存)をもつ線形の時間依存偏微分方程式の組に帰着することができる。それは、平均定常流については、その代り、時間に依存しない非線形偏微分、オイラ方程式によっている。この方法の期待される利点として次の事柄を挙げることができる。

- 動的擾乱方程式とその解のために使う入力データを準備するのに、既存あるいは将来の定常流れコードを最大限利用することができる(もし、動的擾乱流れについても差分法を使えば、平均定常流れの差分格子がそのまま使える)。
- 拡張と一般化を必要とする変数係数の線形微分方程式の解法を使うことができる。Hounjet¹⁷⁾やWilliams等⁴⁶⁾の研究を参照されたい。
- 線形の動的方程式を解くことは、
 - ・ 空力弾性屋の(オイラ方程式の文脈内での)要求を、おそらく満たすであろうし、
 - ・ 平均定常流れのモデル化において、すなわち、動的擾乱方程式^{45,46)}について、(直接かつ完全ではなく)間接的また部分的に粘性効果を含めることができる。さらに
 - ・ 平均定常流れそのものの動安定を調べることができ、またそのことにより、オイラ方程式の非一義解の見通しについてのより深い理解に資することができる。

参考文献

- 1) Tijdeman, H.: Investigation of the Transonic Flow around Oscillating Airfoils, Ph. D. Thesis, Delft University, Dec. 1977.
- 2) Tijdeman, H. and Seebass, R.: Transonic Flow Past Oscillating Airfoils, Ann. Rev. Fluid Mech., 12 (1980), pp. 181-222.
- 3) Seebass, R.: Advances in the Understanding and Computation of Unsteady Flows, Presented at the International Symposium on Recent Advances in Aerodynamics and Aeroacoustics, Stanford University, August 22-26, 1983.
- 4) McCroskey, W. J.: Unsteady Airfoils, Ann. Rev. Fluid Mech., 14 (1982), pp.285-311.
- 5) Ballhaus, W. F. and Goorjian, P. M.: Implicit Finite Difference Computations of Unsteady Transonic Flows about Airfoils, AIAA J., 15 (1977), pp.1728-1735.
- 6) Ballhaus, W. F. and Goorjian, P. M.: Efficient Solution of Unsteady Transonic Flows about Airfoils, Paper 14, AGARD Conference Proceedings No. 226, Unsteady Airloads in Separated and Transonic Flows, 1978.
- 7) Williams, M. H.: The Linearization of Transonic Flows Containing Shocks, AIAA J., 17 (1979), pp. 394-397.

- 8) Williams, M. H. : Unsteady Thin Airfoil Theory for Transonic Flows with Embedded Shocks, AIAA J., 18 (1980), pp. 615-624 ; Unsteady Airloads in Supercritical Transonic Flows, Proceedings of the AIAA/ASME/ASCE 20th Structures, Structural Dynamics and Materials Conference, St. Louis, Mo., April 1979.
- 9) Fung, K. Y., Yu, N. J. and Seebass, R. : Small Unsteady Perturbations in Transonic Flows, AIAA J., 16 (1978), pp.815-822.
- 10) Davis, S. S. and Malcomb, G. : Experiment in Unsteady Transonic Flows, Proceedings of the AIAA/ASME/ASCE 20th Structures, Structural Dynamics and Materials Conference, St. Louis, Mo., April 1979.
- 11) Dowell, E. H., Bland, S. R. and Williams, M. H. : Linear/Nonlinear Behavior in Unsteady Transonic Aerodynamics, AIAA J., 21 (1983), pp. 38-46.
- 12) Kerlick, G. D. and Nixon, D. : Mean Values of Unsteady Oscillations in Transonic Flow Calculations, AIAA J., 19 (1981), pp. 1496-1498.
- 13) Goorjian, P. M. : Private communication, NASA Ames Research Center.
- 14) Dowell, E. H., Ueda, T. and Goorjian, P. M. : Transient Decay Times and Mean Values of Unsteady Oscillations in Transonic Flow, AIAA J., 21 (1983), pp. 1762-1764.
- 15) Steinhoff, J. and Jameson, A. : Multiple Solutions of the Transonic Potential Flow Equations, AIAA Paper No. 81-1019, AIAA Computational Fluid Dynamics Conference, Palo Alto, CA, June 1981.
- 16) Salas, M. D., Jameson, A. and Melnik, R. E. : A Comparative Study of the Nonuniqueness Problem of the Potential Equation, Presented at the 6th AIAA CFD Conference, Danvers, Mass., July 13-15, 1983.
- 17) Hounjet, M. H. L. : A Field Panel Method for the Calculation of Inviscid Transonic Flow about Thin Oscillating Airfoils with Shocks, NLR MP 81043 U, National Aerospace Laboratory, Netherlands, Presented at the International Symposium on Aeroelasticity, Nuremberg, October 5-7, 1981, Germany.
- 18) Cockey, W. D. : Panel Method for Perturbations of Transonic Flows with Finite Shocks, Ph. D. Thesis, Princeton University, June 1983.
- 19) Hounjet, M. H. L. : A Transonic Panel Method to Determine Loads on Oscillating Airfoils with Shocks, AIAA J., 19 (1981), pp. 559-566.
- 20) Morino, L. : A General Theory of Unsteady Compressible Potential Aerodynamics, NASA CR-2464, December (1974).
- 21) Morino, L. and Tseng, K. : Time-domain Green's Function Method for Three-dimensional Non-linear Subsonic Flows, AIAA Paper 78-1204 (1978).
- 22) Albano, E. and Rodden, W. P. : A Doublet Lattice Method for Calculating Lift Distribution on Oscillating Wings in Subsonic Flows, AIAA J., 7 (1969), pp. 279-285.
- 23) Nixon, D. : Calculation of Unsteady Transonic Flows Using the Integral Equation Method, AIAA Paper 78-13, January (1978).
- 24) Voss, R. : Time-linearized Calculation of Two-dimensional Unsteady Transonic Flow at Small Disturbances, DFLVR FB-81-01 (1981).
- 25) Williams, M. H. : Unsteady Thin Airfoil Theory for Transonic Flows with Embedded Shocks, Department of Mechanical and Aerospace Engineering, Report No. 1376, Princeton University, May 1978.
- 26) Liu, D. D. : A Lifting Surface Theory Based on an Unsteady Linearized Transonic Flow Model, AIAA Paper 78-501 (1978).
- 27) Goldstein, M. E. : Aeroacoustics, McGraw-Hill Book Co., New York, 1976.
- 28) Houwink, R. and van der Vooren, J. : Improved Version of LTRAN 2 for Unsteady Transonic Flow Computations, AIAA J., 18 Aug. (1980), pp. 1008-1010.
- 29) Hessenius, K. A. and Goorjian, P. M. : Validation of LTRAN 2-HI by Comparison with Unsteady Transonic Experiment, AIAA J., 20 May (1981), pp. 731-732.
- 30) Borland, C. J. and Rizzetta, D. P. : Transonic Unsteady Aerodynamics for Aeroelastic Applications, Vol. I, Technical Development Summary, AFWAL TR 80-3107, Vol. I, June (1982).
- 31) Borland, C. J. and Rizzetta, D. P. : Nonlinear Transonic Flutter Analysis, AIAA Journal, 20 (1982), pp. 1606-1615.
- 32) Borland, C. J., Rizzetta, D. P. and Yoshihara, H. : Numerical Solution of Three-dimensional Unsteady Transonic Flow over Swept Wings, AIAA J., 20 (1982), pp. 340-347.
- 33) Rizzetta, D. P. and Borland, C. J. : Unsteady Transonic Flow over Wings Including Inviscid/Viscous Interactions, AIAA J., 21, March (1983), pp. 363-371.
- 34) Ehlers, F. E. and Weatherill, W. H. : A Harmonic Analysis Method for Unsteady Transonic Flow and Its Application to the Flutter of Airfoils, NASA-CR-3537 (1982).
- 35) Dowell, E. H. : A Simple Method for Converting Frequency-Domain Aerodynamics to the Time Domain, NASA TM 81844 (1980).
- 36) Tran, C. T. and Petot, M. : Semi-empirical Model for the Dynamic Stall of Airfoils in View of the Application of Responses of a Helicopter Blade in Forward Flight, Paper 48, Proceedings, 6th European Rotorcraft and Powered-lift Aircraft Forum, Bristol, England, 1980.
- 37) McIntosh, S. : Private communication.
- 38) Ueda, T. and Dowell, E. H. : Flutter Analysis Using Nonlinear Aerodynamic Forces, AIAA Paper 82-0728 (1982).
- 39) Ueda, T. and Dowell, E. H. : Describing Function Flutter Analysis for Transonic Flow : Extension and Comparison with Time Marching Analysis, AIAA Paper 83-0958 (1983).
- 40) Ballhaus, W. F. and Goorjian, P. M. : Computation of Unsteady Transonic Flows by the Indicial Method, AIAA J., 16 (1978), pp. 117-124.
- 41) Yang, T. Y., Guruswamy, P., Striz, A. G. and Olsen, J. J. : Flutter Analysis of a NACA 64 A 006 Airfoil in Small Disturbance Transonic Flow, J. Aircraft, 17 (1980), pp. 225-232.
- 42) Edwards, J. W., Bennett, R. M., Whitlow, W., Jr. and Seidel, D. A. : Time-Marching Transonic Flutter Solutions Including Angle-of-Attack Effects, AIAA Paper 82-0685, Presented at the 23rd SDM Conference, New Orleans, LA, May 1982.
- 43) Bland, S. R. and Edwards, J. W. : Airfoil Shape and Thickness Effects on Transonic Airloads and Flutter, AIAA SDM Conference in Lake Tahoe, CA, May 1983, AIAA Paper no. 83-0959.
- 44) Magnus, R. J. and Yoshihara, H. : Calculation of Transonic Flow Over an Oscillating Airfoil, AIAA Paper 75-98, Jan. (1975).
- 45) Lighthill, M. J. : On Boundary Layers and Upstream Influence, II : Supersonic Flows without Separation, Proc. Royal Soc., A217, May (1953), pp. 478-507.
- 46) Williams, M. H., Chi, M. R., Ventres, C. S. and Dowell, E. H. : Aerodynamic Effects of Inviscid Parallel Shear Flows, AIAA J., 15 (1977), pp. 1159-1166.