初期撓みをもつ一様断面棒の引張荷重を受けるときの弾塑性解析 (第3報)*¹

圧縮荷重を受ける場合との比較

An Elastoplastic Analysis of Uniform Bars with Initial Deflection under Opposite Tension Loads at Ends (Report 3)

Comparison with the Same Bar Subjected to Central Compression Loads at Ends

吉澤 愛彦*²・倉西 正嗣*²

Aihiko YOSHIZAWA and Masatsugu KURANISHI

Key Words: Structural Analysis, Plasticity, Beam-Column in Tension and Compression

Abstract

An elastoplastic behavior of uniform bars with initial deflection under opposite tension loads at ends has been already reported in previous reports 1 and 2. The present paper treats the comparison of this case with the well known case where an initially deflected uniform bar is subjected to central compression loads at ends, pointing out differences between these two cases, as follows. In case of tension the bending moment first rises to a maximum value, afterward reduces gradually and then converges to an ultimate state where the bending moment is reduced to naught, while the axial force keeps its value. Contrary to this, in case of compression the buckling occurs, the axial force reaches its maximum value and then the axial force gradually reduces up to an ultimate state where the balancing axial force becomes naught, while the bending moment takes its maximum value.

1. 緒 言

本論文は先に明らかにした初期撓みをもつ一様断面棒の両端に引張荷重が作用するときの解析結果^{1,2)}を同じ棒の両端に中心圧縮荷重が作用するときの従来からよく知られている基本的な弾塑性挙動と比較検討したものである。

それは具体的には、引張荷重を受ける場合と同様な基礎仮定を用い、同じ初期撓み棒の両端に中心圧縮荷重が加えられる場合について軸力と曲げモーメントおよび撓みの関係を求め、これを引張荷重の場合と対照させた。その概要は軸力と曲げモーメントの関係で表させると次のとおりである。

引張荷重の場合には軸力の増加に対して曲げモーメントが最初はある極大値を採り、その後減少して最後の終局状態では曲げモーメントがゼロで軸力のみの状態に収束するのに対し、圧縮荷重の場合には最初に挫屈を起こしてそのとき軸力が極大値となるが、その後釣合荷重は減少し、終局状態では軸力がゼロで曲げモーメントのみの状態に収束することが示されている。

このように同じ初期撓み棒が両端に引張荷重を受ける場合と圧縮荷重を受ける場合とでは、似たような問題ではあるが、両者の示す弾塑性挙動に著しい相違のあることが明示された。

2. 圧縮荷重を受ける場合の基礎式

まず、第1図に示すような前報での引張荷重を受ける場合に扱ったものとまったく同じ棒がその両端に中心圧縮荷重 P を受ける場合について、前報と同様な基礎仮定のもとに記号も同じものを使用して軸力、曲げモーメントおよび撓みの関係式を誘導しよう。

釣合はもちろん棒の中央点のみで満足させるから、その条件は

$$M = P \cdot V_m \quad (1)$$

であって、ここに V_m は中点での現在撓みであり、曲げモーメント M は第1図の断面上に採った Z 軸の正側に圧縮応力を生じさせるものを正符号と決める。

また、棒の軸線に沿う座標 y の原点を中点に採り、 ϕ 、 ϕ_0 をそれぞれ中点 $y=0$ での現在曲率、初期曲率として、その曲率変化は次式で与える。

$$\phi - \phi_0 = \pi^2 (V_m - V_{0m}) / l^2 \quad (2)$$

ここに V_{0m} は中点での初期撓み、 l は棒の実長である。

棒の材料は縦弾性係数が E で降伏応力が σ_y の完全塑性体を仮定するから、圧縮荷重の増加に伴う棒の中

*¹ 昭和59年7月12日、第26回構造強度に関する講演会にて発表。昭和60年12月13日原稿受理

*² 日本大学理工学部機械工学科

第1図 圧縮荷重を受ける初期撓み一様断面棒

第2図 圧縮荷重を受ける場合の応力分布

中央断面での応力分布の推移の段階としては以下に述べるものを考慮すればよいことになる。すなわち、変形推移の順にいうとまず全面弾性域にあるI段階、次に圧縮側のみ降伏しているII段階、最後に圧縮側も引張側ともに降伏しているIII段階の三つである。

そこでこれら3個の段階での応力分布の様式を圧縮応力が正符号をもつものとし、前報と同じ形式に表して第2図に示す。ここで、 α , ξ はそれぞれ引張側と圧縮側の端辺での応力の大きさを表す無次元パラメータであり、 β , γ はそれぞれ圧縮側と引張側での降伏領域の進行度を表す無次元パラメータである。

以下第2図を参照して、前報と同じ定義で無次元化した軸力 $\bar{P}$ ($=P/P_y$, $P_y = bh\sigma_y$)、曲げモーメント $\bar{M}$ ($=M/M_y$, $M_y = bh^2\sigma_y/6$) および現在撓み $\bar{V}_m$ ($=6V_m/h$) を各段階について求めよう。

2.1 I段階 第2図(a)から $\bar{P}$, $\bar{M}$ を求めるとその結果は

$$\begin{cases} \bar{P} = (\xi - \alpha)/2 \\ \bar{M} = (\xi + \alpha)/2 \end{cases} \quad (3)$$

と得られる。

$\bar{V}_m$ は第2図(a)に示す断面内での応力変化を表す直線 ab (これを前報では曲率直線と名づけた) の傾斜が $(\xi + \alpha)\sigma_y/h = E(\phi - \phi_0)$ となることから、(2)式を用いて次式のように求められる。

$$\bar{V}_m = n + k(\xi + \alpha)/2 \quad (4)$$

ここで前報の場合と同様に、 $n(=6V_{0m}/h)$ は初期撓み比を、また $k(=\sigma_y/\sigma_n)$ は降伏応力と挫屈応力の比、すなわち細長比を表す。

釣合条件(1)式を無次元化した表式 $\bar{M} = \bar{P} \cdot \bar{V}_m$ に以上の(3), (4)式を入れると、 α , ξ についての2次方程式が次のように得られる。

$$k\alpha^2 + 2(n+1)\alpha - k\xi^2 - 2(n-1)\xi = 0 \quad (5)$$

上式を α について解き、2根のうちの根号が正符号のものを採って α は次式のように決まる。

$$\alpha = \left[-(n+1) + \sqrt{(n+1)^2 + k\xi(k\xi + 2(n-1))} \right] / k \quad (6)$$

したがって、 k , n の与値に対して上式で $0 \leq \xi \leq 1$ の範囲で ξ を与えると α が求められ、(3), (4)式から $\bar{P}$, $\bar{M}$, $\bar{V}_m$ の関係が定められる。

圧縮荷重を受ける場合には初期撓みがないときが問題となるから、次に $n=0$ のときについて調べよう。(6)式で $n=0$ とすると

$$\alpha = [-1 + \sqrt{1 - k\xi^2}] / k \quad (7)$$

となるから、 $0 \leq \xi \leq 1$ であることに注意すると、 α は k の値が1より小であるかまたは大であるかによって次の二つの場合に分けて考慮する必要がある。

i) $k \leq 1$ の場合: この場合に(7)式は $\alpha = -\xi$ となり、これは応力分布が一様圧縮応力状態にあることを示す。このとき(3), (4)式から当然 $\bar{P} = \xi$, $\bar{M} = \bar{V}_m = 0$ となって棒は全然撓むことなく、 $\xi=1$ では $\bar{P} = 1$ となり、一様降伏圧縮応力状態に達する。

ii) $k > 1$ の場合: (7)式は $0 \leq \xi \leq 1/k$ の範囲で $\alpha = -\xi$ となり、i)と同様に $\bar{P} = \xi$, $\bar{M} = \bar{V}_m = 0$ である。また、 $1/k < \xi \leq 1$ では $\alpha = (k\xi - 2)/k$ を得るから、 $\bar{P} = 1/k$, $\bar{M} = \xi - (1/k)$, $\bar{V}_m = k[\xi - (1/k)]$ となって、棒は $\xi = 1/k$ となると弾性挫屈を起こして撓み始めることを示している。この挫屈を起こすときの $\bar{P}$ の値は当然 $\bar{P} = 1/k$ である。

結局、I段階では $n=0$ の場合に $k < 1$ であると棒は挫屈せずに一様降伏圧縮応力状態に達し、 $k=1$ であると $\bar{P}=1$ で挫屈を起こし、また $k > 1$ であると $\bar{P} = 1/k$ で挫屈を起こして撓みを生ずることになる。

なお、圧縮側が降伏し始めるときの $\bar{P}$ と $\bar{M}$ の関係は(3)式で $\xi=1$ とし、 α を消去すると $\bar{P} + \bar{M} = 1$ を得て、これは前報での引張荷重の場合に引張側が降伏し始めるときの条件と同じ結果となる。

2.2 II段階 第2図(b)から $\bar{P}$, $\bar{M}$ を求めるとその結果は次のように得られる。

$$\begin{cases} \bar{P} = 1 - (ts)/2 \\ \bar{M} = ts(3 - 2t)/2 \end{cases} \quad (8)$$

ここに、 s , t は前報と同じく α , β の代りに用いる

補助変数であつて次のように定義される.

$$\left. \begin{aligned} s &= 1 + \alpha \\ t &= 1 - \beta \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

また, $\bar{V}_m$ は I 段階のときと同様に第 2 図 (b) に示される曲率直線 ab の傾斜と (b) 式に与えた曲率変化の関係から次のように求められる.

$$\bar{V}_m = n + (ks)/(2t) \quad (10)$$

以上の (8), (10) 式を釣合条件 $\bar{M} = \bar{P} \cdot \bar{V}_m$ に入れたと次の s, t についての代数方程式を得る.

$$kt^2s^2 - 2[2t^3 - (n+3)t^2 + k]s - 4nt = 0 \quad (11)$$

上式を s について解き, 2 根のうちの根号が正符号のものを採って s は次のように決まる.

$$s = [2t^3 - (n+3)t^2 + k + \sqrt{[2t^3 - (n+3)t^2 + k]^2 + 4knt^2}] / (kt) \quad (12)$$

因みに (12) 式で $t=1$ ($\beta=0$) として s を元の α にもどすと, その結果は I 段階の α を与える (6) 式にて $\xi=1$ とした表式と一致することはもちろんである.

次に, II 段階の最後, すなわち引張側端辺が降伏に達するときの t を定めるために (11) 式で $s=2$ ($\alpha=1$) と置けば

$$2t^3 - (n+3)t^2 + (n-k)t + k = 0 \quad (13)$$

となるが, この t についての 3 次方程式は $0 < t < 1$ を満足する 1 根を必ずもつことがわかり, 所要の t が定まるからこれを t_0 とする. すると $t_0 \leq t \leq 1$ の範囲の t を (12) 式に与えて s が決まり, それから (8), (10) 式により $\bar{P}, \bar{M}, \bar{V}_m$ の関係が定められる.

以上の結果をもとに I 段階と同様に $n=0$ の場合を検討してみよう (12) 式で $n=0$ とすると

$$s = [2t^3 - 3t^2 + k + \sqrt{(2t^3 - 3t^2 + k)^2}] / (kt) \quad (14)$$

となるが, 上式の根号内の $2t^3 - 3t^2 + k$ の符号は k が 1 より小であるかまたは大であるかによって決まるから, s は次の二つの場合に分かれる.

i) $k \leq 1$ の場合: この場合には $2t^3 - 3t^2 + k = 0$ を満足する t が存在するのでこれを t_0 とすると ($k=1$ では $t_0=1$), $t_0 \leq t \leq 1$ の範囲では $2t^3 - 3t^2 + k \leq 0$ であつて, (14) 式から $s=0$ ($\alpha=-1$) を得る. これは応力分布が一様降伏圧縮応力状態にあることを示している.

また, $0 < t < t_0$ では $2t^3 - 3t^2 + k > 0$ であつて, (14) 式は $s = 2(2t^3 - 3t^2 + k)/(kt)$ となり, $\bar{P}, \bar{M}, \bar{V}_m$ は (8), (10) 式から決まる値をもち, 棒は $t=t_0$ で挫屈を起こして撓み始めることを示している. この挫屈を起こすときには当然 $\bar{P}=1$ である.

ii) $k > 1$ の場合: 前節で述べたようにこの場合には I 段階で弾性挫屈を起こすから, $s=0$ となること

はない. それを検証すると, $0 < t \leq 1$ では $2t^3 - 3t^2 + k > 0$ となるので (14) 式は $s = 2(2t^3 - 3t^2 + k)/(kt)$ となる. これは棒が挫屈して撓んでいる状態を示している.

以上のことから, II 段階で $n=0$ の場合には, 棒は $k \leq 1$ であると一様降伏圧縮応力状態 ($\bar{P}=1, \bar{M}=\bar{V}_m=0$) から挫屈を起こし, $k > 1$ であると弾性挫屈後の撓みを生じている状態にあることがわかる.

なお, 引張側が降伏し始めるときには (8) 式で $s=2$ として t を消去すると, $\bar{M} = (1-\bar{P})(1+2\bar{P})$ を得るが, これは前報での引張荷重の場合に圧縮側が降伏し始めるときの条件と同じ結果になる.

2.3 III 段階 第 2 図 (c) から $\bar{P}, \bar{M}$ を求め, またこの図に示される曲率直線 ab の傾斜と (2) 式に与えた曲率変化の関係から $\bar{V}_m$ を求めるとその結果は

$$\left. \begin{aligned} \bar{P} &= 1 - 2t + u \\ \bar{M} &= -6t^2 + 6(1+u)t - (2u+3)u \\ \bar{V}_m &= n + k/u \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

となる. ただしここで, t, u は β, γ の代りに用いる補助変数であつて次のように定義される.

$$\left. \begin{aligned} t &= 1 - \beta \\ u &= 1 - \beta - \gamma \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

(15) 式を釣合条件 $\bar{M} = \bar{P} \cdot \bar{V}_m$ に入れて整理すると

$$6ut^2 - 2[3u^2 + (n+3)u + k]t + 2u^3 + (n+3)u^2 + (n+k)u + k = 0 \quad (17)$$

を得る. 因みに上式で $u=t$ ($\gamma=0$) と置けば, II 段階最後の状態 ($s=2$) を定める (13) 式を得て, この式を満足する t を前述のように t_0 とした.

次に, $u \rightarrow 0$ ($\beta + \gamma \rightarrow 1$) となるときに応力分布がどのようなになるかを調べるために, (17) 式で $u \rightarrow 0$ としてみると, $k(1-2t) \rightarrow 0$, すなわち $t \rightarrow 1/2$ を得る. したがって, $\beta + \gamma \rightarrow 1$ のときには $\beta \rightarrow 1/2, \gamma \rightarrow 1/2$ となつて, 応力分布は断面の図心軸を境として圧縮側と引張側のそれぞれが全域で降伏している終局状態になることがわかる.

それゆえ III 段階では, (17) 式を t について解き, その 2 根のうちの根号が負号となるものを採って

$$t = [3u^2 + (n+3)u + k - \sqrt{-3u^4 + (n^2+9)u^2 + 2knu + k^2}] / (6u) \quad (18)$$

を得る. 上式で $0 < u \leq t_0$ の範囲の u を与えて t が決まり, これらの t, u を (15) 式に入れることによって $\bar{P}, \bar{M}, \bar{V}_m$ の関係が定められる.

なお, 前述したように, $u \rightarrow 0$ のときには終局状態に到達して $t \rightarrow 1/2$ となるから, このときには $\bar{P} \rightarrow 0, \bar{M} \rightarrow 1.5, \bar{V}_m \rightarrow \infty$ となることは当然である.

また、 $n=0$ の場合には、前節までに明らかにしたように棒はI段階またはII段階で挫屈を起こすから、(15)、(18)式で $n=0$ と置くだけでこの挫屈後のIII段階での関係が定められる。

3. 圧縮荷重を受ける場合との比較

前章で明らかにしたように、そこで誘導した圧縮荷重を受ける場合の基礎式を用いると、細長比を表す k と初期撓み比 n を与えることによって無次元化した軸力 $\bar{P}$ 、曲げモーメント $\bar{M}$ 、現在撓み $\bar{V}_m$ の関係を計算することができる。そこで、 $k=0.2$ 、 $k=1.0$ 、 $k=2.0$ の3通りの場合について n をパラメータとして与え、 $\bar{P}$ と $\bar{M}$ の関係を計算し、この結果を前第2報の引張荷重を受ける場合の $\bar{P}$ と $\bar{M}$ の関係を示す第14図、第15図、第16図と比較対照して図示すると第3図、第4図、第5図のようになる。

これらの結果から、引張荷重の場合には $\bar{P}$ の増加に対して $\bar{M}$ が極大値を採るが、それは n が増大するほど1.5の値に接近するのに対し、圧縮荷重の場合には挫屈が生ずるので、そのとき $\bar{P}$ が極大値を採り、それは n が減少するほど $n=0$ で挫屈するときの値に接近することがわかる。この $n=0$ のときを引張荷重の場合と比較すれば両者の相違がとくに著しいこともわかる。また、第5図は $k=2.0$ のときの関係であるから、圧縮荷重の場合に $n=0$ のときは $\bar{P}=0.5$ で弾性挫屈を起こし、 $\bar{P}$ の極大値は0.5を越えることがないことが示され、 $k=0.2$ と $k=1.0$ のときの第3図、第4図に比べて引張荷重の場合との違いが顕著に表されている。そうして終局状態では引張荷重の場合に $\bar{P}=1$ 、 $\bar{M}=0$ となるが、これに対して圧縮荷重の場合であると $\bar{P} \rightarrow 0$ 、 $\bar{M} \rightarrow 1.5$ となることが示されている。

次に、 $\bar{P}$ と $\bar{V}_m$ の関係については前報には示さなかったのであるが、圧縮荷重の場合のその関係が前章での結果によって計算されるので、その両者を $\bar{P}$ と $\bar{M}$ の関係と同じく $k=0.2$ 、 $k=1.0$ 、 $k=2.0$ のそれぞれについて比較対照して図示すると第6図、第7図、第8図のように得られる。

これらの図で、 $\bar{P} \sim \bar{V}_m$ 関係を示す曲線と縦軸の交点が初期撓み比 n を表すが、それらの曲線は $\bar{P} \sim \bar{M}$ 関係の曲線とは異なり、引張荷重と圧縮荷重の場合で両者が連続していることが示されている。そうして引張荷重の場合には $\bar{P}$ の増加に対して $\bar{V}_m$ は単調に減少するだけであるが、圧縮荷重の場合には挫屈によって $\bar{P}$ が極大値を採り、それは n の増大に伴って低下することがわかる。とくに $k=2.0$ のときの第8図では、先に示した $\bar{P} \sim \bar{M}$ 関係と同じく $n=0$ のときに

第3図 引張と圧縮の場合の $\bar{P}$ と $\bar{M}$ の関係 ($k=0.2$)

第4図 引張と圧縮の場合の $\bar{P}$ と $\bar{M}$ の関係 ($k=1$)

第5図 引張と圧縮の場合の $\bar{P}$ と $\bar{M}$ の関係 ($k=2$)

第6図 引張と圧縮の場合の $\bar{P}$ と $\bar{V}_m$ の関係 ($k=0.2$) 第9図 $\bar{M}_{max}$ と $1/n$ の関係 (引張の場合のみ) 第7図 引張と圧縮の場合の $\bar{P}$ と $\bar{V}_m$ の関係 ($k=1$) 第8図 引張と圧縮の場合の $\bar{P}$ と $\bar{V}_m$ の関係 ($k=2$)

$\bar{P}=0.5$ で弾性挫屈を起こしているから、第6図、第7図との違いが大きい。また終局状態では、引張荷重の場合に $\bar{P}=1$ 、 $\bar{V}_m=0$ であるが、圧縮荷重の場合であると $\bar{P} \rightarrow 0$ 、 $\bar{V}_m \rightarrow \infty$ となることはもちろんであ

第10図 $\bar{P}_{max}$ と k の関係 (圧縮の場合のみ)

る。

次に、引張荷重の場合に $\bar{M}$ の極大値が k 、 n の値に対してどのように変化するかを調べるために、 k をパラメータとして与え、 $1/n$ に対して図示すると第9図が得られる。この図から k の増大と n の減少に伴って $\bar{M}$ の極大値は低下することが明瞭に示される。

また圧縮荷重の場合については、挫屈が起きるときの $\bar{P}$ の極大値は k 、 n の値に依存するから、この様相をパラメータが n として k に対して図示すると第10図を得る。ここで、 $k = \sigma_y / \sigma_k = \sigma_y \lambda^2 / \pi^2 E$ (λ : 細長比) であるから、第10図は柱の塑性挫屈問題でよく知られている挫屈応力と細長比の関係に対応するものである。因みに第10図を従来の研究結果³⁾と比較すると非常に近い結果を得るので、このことは本方式の仮定が許されるものであることの一つの例証であるといえよう。

4. 結 言

以上、初期撓み一様断面棒の両端に中心圧縮荷重が加えられる場合の結果を導き、これと同じ棒が引張荷重を受ける前報に示した場合とを比較したが、その結果次のことが明らかにされた。

圧縮荷重の場合には挫屈が起きるから、無次元化曲げモーメント $\bar{M}$ の増加に伴って無次元化圧縮軸力 $\bar{P}$ は極大値を採り、それは棒の細長比を表す無次元量 k の値が1より小であるかまたは大であるかによって、初期撓みを表す無次元量 n の減少とともにそれぞれ $n=0$ で挫屈するときの値1と $1/k$ に近づく。これに対して引張荷重の場合には無次元化引張軸力 $\bar{P}$ の増加に伴って $\bar{M}$ が極大値を採り、当然挫屈を生ずることはないので、 k の値にかかわらずその極大値は n が増大するほど1.5に近づく。

両者の終局状態においては、引張荷重の場合に $\bar{P}$ は1、 $\bar{M}$ はゼロとなり、一方、圧縮荷重の場合には $\bar{P}$ がゼロに $\bar{M}$ は1.5に収束する。

このように同じ初期撓み棒であっても、引張荷重を

受ける場合と圧縮荷重を受ける場合とでは、その挙動が全然異なっていることを具体的に示すことができた。

参考文献

- 1) 吉澤愛彦, 倉西正嗣: 初期撓みをもつ一様断面棒の引張荷重を受けるときの弾塑性解析 (第1報), 棒の圧縮側が塑性域に入らぬ場合, 日本航空宇宙学会誌, 30 (1982), pp. 635-646.
- 2) 吉澤愛彦, 倉西正嗣: 初期撓みをもつ一様断面棒の引張荷重を受けるときの弾塑性解析 (第2報), 棒の圧縮側が部分的にある期間塑性域に入る場合, 日本航空宇宙学会誌, 32 (1984), pp. 642-650.
- 3) 小西一郎, 横尾義實, 成岡昌夫, 丹羽義次: 構造力学第I巻, 丸善, 東京 (1966), pp. 261-262; Ježek, K.: Die Festigkeit von Druckstäben aus Stahl, Verlag von Julius Springer, Wien, 1937.