単一ジンバルCMGの特異点について*

A Study on Singularity of Single Gimbal CMG Systems

黒河 治 久*²・矢 島 信 之*²
Haruhisa KUROKAWA and Nobuyuki YAJIMA

Key Words: CMG, Attitude Control, Actuator

Abstract

A single gimbal CMG system is a promising candidate for an actuator of attitude control systems for large space structures. One of its problems is the existence of singular states. Various steering laws assume redundancy in the system and avoid singular states by maximizing a certain criterion function value by a gradient method. But it is not theoretically clear whether these steering laws can avoid all singular states actually. In this paper, a quadratic form is defined for each singular state, which enables to classify singular states into three types. In the vicinity of the two types of singular states, escape from the vicinity is not guaranteed locally. Also it is difficult to guarantee that the system does not go into the vicinity of any two types of singular points by using the gradient method only. Examples of three type singular states are shown for three configurations.

1. 序

コントロール・モーメント・ジャイロ(CMG)は蓄積角運動量と出力トルクの大きな宇宙用アクチュエータである。とくに単一ジンバルCMG(SG-CMG)は二重ジンバルCMGに比べトルク増幅率が高く、宇宙ステーションなどの大型宇宙構造物の姿勢制御装置として有力視されている。SG-CMGで三軸制御を行うには、4個以上のSG-CMGを組み合わせて、それらを協調させて駆動する必要がある。そこで、各種の配列について、その駆動則(Steering Law)が従来より研究されている。

一般にCMGシステムは特異点をもち、特異点においては一軸のトルクが出力できないため、駆動則では冗長構成による自由度を利用して特異点を回避する方法が研究の中心課題となっている。特異点回避は、評

価関数を選択し傾斜法などで制御する方法が一般に提案されている^{1,3-5)}。これらの駆動則では、評価関数として特異点でのみ0となる正值関数で近似的に特異点からの距離を表すものを選択し、評価関数の値をできるだけ大きく保つように制御をすれば特異点が回避できると想定されていた。しかし、実際にすべての特異点を回避しうかどうかの厳密な保証はなかった。例外的に、ループ型配列について厳密な解析がなされているが²⁾、一般論として他の配列に応用できるものはなかった。

本論文では、まずSG-CMGシステムにおいて、特異点をその近傍の性質によって三つに分類する。そのうち2種類は、従来の傾斜法などによる駆動則によっては局所的に回避できないことを明らかにする。また、そのような特異点が存在する場合に、回避すべき領域の大域的な広がりを調べる。そして、駆動則によって、すべての特異点の回避を保証する方法について考える。回避できない特異点が存在するかどうかは、CMGの配列に依存するが、数種の配列について、具体的に分布を例示する。なお、SG-CMGシステムの一般論と式(7)までは、文献6に基づいている。

2. SG-CMGシステムの一般論

2.1 SG-CMGとは CMGは定速回転するフライホイールをジンバルで支え、フライホイールの回転軸の向きを変えることにより、ジャイロ効果のトルクを得る装置である(第1図)。一つのSG-CMGは、固定のジンバル軸(単位ベクトル g)とそれに直交して回転するフライホイール軸(h)、およびその回転角 θ で表される。以下、ゴシック体の変数はベクトルを表す。 h は回転角 θ の関数である。

n 個のSG-CMGを空間内に配列したシステムの全角運動量 H は、

$$H = H(\theta) = \sum h, \quad (1)$$

となる。ただし、各SG-CMGの角運動量の大きさを同一とし、1に正規化した。 H は三次元ベクトル、

*1 昭和61年3月17日原稿受理

*2 機械技術研究所

第1図 SG-CMGの構成

θ は θ_i を成分とする n 次元ベクトルである。

H の値域は境界をもつ閉じた領域であり、単連結な空間であると予想されている(各 CMG の角運動量の大きさが等しくない場合には、単連結でないことがありうる)。以下、この空間は単連結であると仮定する。

出力トルク T は式(1)を時間微分して、

$$\begin{aligned} T &= -dH/dt = -C\dot{\theta}; \\ C &= (\partial H_i / \partial \theta_j) = (c_i), \\ c_i &= g_i \times h_i, \end{aligned} \quad (2)$$

となる。 C は H のヤコビ行列であり、 c_i は i 番目の CMG の出力トルク方向ベクトルである。式(2)は $\dot{\theta}$ に関して線形であり、 (g_i) が三次元空間をはるときには、 C のランクは 2 または 3 である。ランクが 3 のときには $\dot{\theta}$ について解けて、

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= -C^* T + \omega^N; \\ C^* &= C^t (CC^t)^{-1}, \\ C\omega^N &= (0 \ 0 \ 0)^t, \end{aligned} \quad (3)$$

となる。第一項は C の擬似逆行列による解で、ユークリッド・ノルム最小のものを与える。第二項は斉次解で、 C の核 $N(n-3$ 次元線形空間)の任意の元である。

C のランクが 2 のとき、式(2)の T は二次元に縮退し、これに垂直な方向(単位ベクトル u)にトルクを出力できない。この状態を特異点という。特異点においては、

$$\det(CC^t) = 0,$$

となる。特異点ではすべての c_i は u に垂直となり、核 N は $n-2$ 次元に広がる。

特異点は任意の u に対し、

$$\begin{aligned} h_i &= \begin{cases} (g_i \times u) \times g_i / p_i; & g_i \cdot u \neq \pm 1, \\ \text{任意} & ; g_i \cdot u = \pm 1, \end{cases} \\ p_i &= \pm |g_i \times u|, \end{aligned} \quad (4)$$

で得られ、 p_i の符号の組合せにより 2^n 個存在する(そのうち、 p_i のすべての符号が反対のものは u を $-u$ にしたものに等しい)。そのうち p_i の符号がすべ

て同一の場合と一つだけ異符号の場合の一部によって角運動量の境界が形成される⁶⁾。 u の集合は球面で記述できるので、それに対応して、特異点の集合は連結した曲面として存在する。

2.2 駆動則 CMG はトルク・アクチュエータとして使われるので、出力 T を与えられて入力 $\dot{\theta}$ を算出する駆動則が必要である。駆動則は種々の実現法があるが、算出された $\dot{\theta}$ による出力が指令トルクと等しくなる場合は、式(3)で表現できる。

式(3)は T によって決まらない項 ω^N をもち、これは特異点回避に利用できる。つまり、特異点から遠ざかるように斉次解 ω^N を選ばばよい。たとえば、 ω^N の方向は評価関数 f についての最大傾斜法で、

$$\max_{\omega^N \in N} \sum (\partial f / \partial \theta_i) \omega_i^N / |\omega^N|,$$

によって決める。

評価関数 f は特異点でのみ 0 となる正值関数で、

- (a) $\det(CC^t)^{1/4,5)}$
- (b) CC^t の固有値の最小値^{4,5)}
- (c) C^* の列ベクトルのノルムの最小値³⁾,

などが提案されている。これらは、ベクトル T の方向の関数である入出力ゲイン $|T|/|\dot{\theta}|$ を一つのスカラー量で代表したものである(付録1)。

特異点での駆動則としては、右擬似逆行列による解⁶⁾や近傍での解を使う方法¹⁾などが提案されている。

3. 特異点の分類

駆動則によって特異点回避が可能かどうかは、関数(1)の特異点近傍での性質による。特異点 θ^s の近傍 $\theta^s + \delta\theta$ において角運動量の変化 δH を、

$$\delta H = H(\theta^s + \delta\theta) - H(\theta^s),$$

とし、これを $\delta\theta$ についてテーラー展開して三次以上の項を無視すると、

$$\delta H = \sum [c_i^s \delta\theta_i - (1/2) h_i^s (\delta\theta_i)^2], \quad (5)$$

となる。ここで、肩字 s は特異点での値をしめす。特異点でのトルク出力不可能な方向 u および、それに互いに直交する v_1, v_2 の座標系で上式を表すと、

$$\delta H_u = \delta H \cdot u = -(1/2) \sum (\delta\theta_i)^2 / p_i, \quad (6)$$

$$\delta H_j = \delta H \cdot v_j = \sum (c_i^s \cdot v_j) \delta\theta_i, \quad (7)$$

$$j=1, 2,$$

となる。ただし、 $h_i \cdot u = 1/p_i$ を使った。ここで、式(7)では二次の項を無視した。この二式は、 H をパラメータとする $\delta\theta$ の $(n-2)$ 次元超二次曲面を示している。

ここでベクトル $\delta\theta$ を核 N の成分と、それに直交する成分に分けて、

$$\delta\theta = \delta\theta^N + \delta\theta^T,$$

$$\delta\theta^N \in N,$$

$$\delta\theta^T \perp N,$$

とする。\$\delta\theta^T\$ については、式(5)の一次の項は \$\mathbf{H}\$ の特異点の曲面上の変化、二次の項は特異点の曲面の曲率を表している。\$\delta\theta^N\$ については、式(5)は二次の項のみとなる。つまり、\$\mathbf{H}\$ を \$\mathbf{u}\$ 方向にのみ変化させる場合には、\$\delta\theta^N\$ についてだけ考えればよい。

ここで、核 \$N\$ の基底を \$(\mathbf{e}^N_1 \ \mathbf{e}^N_2 \ \cdots \ \mathbf{e}^N_{n-2})\$ として、\$\delta\theta^N\$ を

$$\delta\theta^N = \sum \mathbf{e}^N_i \delta\eta_i,$$

として、式(6)に代入すると、

$$\delta H_u = \delta\eta^T F \delta\eta, \quad (8)$$

の二次形式となる(付録2)。 $\delta\eta$ は \$(n-2)\$ 次元ベクトル、\$F\$ は \$(n-2) \times (n-2)\$ の対称行列である。

二次形式は基底の取りかたによらず \$F\$ の固有値の符号によって、定値(すべての固有値が 0 でなく、同符号)、半定値(0 か同符号)、不定値(正負の固有値がある)に分類できる。この分類に従って、特異点を三つに分類する。たとえば、\$n=4\$ のとき核 \$N\$ は二次元であり、特異点近傍で角運動量 \$\mathbf{H}\$ を \$\mathbf{u}\$ 方向に変化させると、\$\mathbf{H}\$ の等しい \$\theta\$ は定値のときは楕円、半定値のときは直線、不定値のときは双曲線となる(第2図)。

すべての特異点では \$\mathbf{u}\$ 方向のトルクを出力できないが、それは \$\mathbf{H}\$ の変化の一次の微量量に対応している。二次の微量量を考慮すると、上記の分類によって違いが生ずる。つまり、不定値特異点近傍には、\$\delta H_u\$ の正負のものがあリ、特異点においても、\$\mathbf{H}\$ を任意の方向に変化できる。一方、定値および半定値特異点近傍では、\$\mathbf{H}\$ は \$\mathbf{u}\$ に垂直な面(特異点の曲面)の一方に拘束される。また、式(8)または第2図より明らかなように、不定値および半定値特異点では、特異点上においても \$\mathbf{H}\$ を一定に保つ斉次解が存在するが、定値特異点ではすべての斉次解が \$\mathbf{H}\$ を同符号に変化させる。しかも定値特異点近傍では斉次解によってその

近傍を抜け出すことができない。

定値特異点の自明な例は角運動量の境界である。

定値性の判別は、\$F\$ の小行列式 \$\det(F_i)\$ の正負で判別でき、

$$\det F_i = K \frac{(1/2 \sum_{j \neq i} \sum_{k \neq i} p_j p_k |\mathbf{c}^j \cdot \mathbf{c}^k \cdot \mathbf{u}|^2)}{\prod_{j \neq i} p_j} \quad (9)$$

\$K\$: 正定数, \$1 \leq i \leq n\$,

がすべて正または、\$i\$ によって正負が交互するときに定値となる(付録3)(\$|\mathbf{abc}|\$ はベクトル三重積 \$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}\$ である)。また、定値特異点は特異点の曲面の限られた領域に存在する(付録3)。

なお、式(9)は \$\mathbf{u}\$ の連続な関数であるから、定値特異点は連続な曲面を形成し、境界をもつ場合には、その境界は半定値特異点である。

4. 特異点と駆動則

以上のように、不定値特異点近傍では \$\mathbf{H}\$ を任意の方向に変化できるので、結果として任意の方向のトルクを出力でき、斉次解によって特異点回避が可能である。しかし、定値および半定値特異点近傍ではトルクを出力できない方向があり、かつ、定値特異点近傍では斉次解による特異点回避が不可能であることが明らかになった。

以上は特異点近傍の局所的性質であり、テラー展開の三次以上の項が無視できる範囲の議論である。\$\theta\$ 全領域での大域的性質については、CMG の空間の位相的性質を調べる必要がある。本章では、空間の次元を下げ、説明を簡単にすることによって、特異点回避ができない領域の拡がり、すべての特異点の回避を保証するための手段、について考察する。

角運動量の境界の内側に定値特異点 \$\theta^d\$ と不定値特異点 \$\theta^s\$ があるとする。また、\$\mathbf{H}\$ の空間は単連結であると仮定しているので、\$\mathbf{H}(\theta) = \mathbf{H}(\theta^d)\$ なる \$\theta\$ が \$\theta^d\$ 以外にも存在することになる。式(1)の関数を \$\theta^d\$、\$\theta^s\$ を含む領域で模式的に表すと第3図のようになる。

第2図 特異点の近傍

特異点 \$\theta^s\$ 近傍で \$\delta \mathbf{H} \parallel \mathbf{u}\$ の部分空間。\$n=4\$。実線は \$\delta H = \text{const.}\$

第3図 CMGの大域的性質
定値特異点 θ^d と不定値特異点 θ^s を含む部分空間。 H, θ を一次元と二次元に射影してある。
実線は $H = \text{const.}$

図では、 H, θ はそれぞれ、一次元と二次元の成分 H', θ_1, θ_2 で代表しているの、 θ^s の点は鞍部となる。

ここで、非線形関数 $H(\theta)$ の逆像を考える。これは、個別に連結した部分集合により類別できる。つまり、一つの元から、斉次解によって H を一定に保ったまま、連続的に変化させて得られる集合を同値類とする。一つの同値類を $\Theta(H)$ 、または簡単に Θ で表す。定値特異点 θ^d では、類 Θ は元を一つしかもたず、 H が u 方向に変化する ϵ -近傍の $\Theta(H(\theta^d) + \epsilon u)$ は $n-2$ 次元球面に同相である(前章より)。第3図では Θ は円に同相となっている。

駆動則は、時間の関数である指令トルク T から $\dot{\theta}$ を求めるものであるから、それらを積分して、時間の関数 H から θ を求めることで考えてもよい。時間 t の関数である指令トルク $T(t)$ に対し、 $H(t)$ を

$$H(t) = - \int T(t) dt,$$

とし、この $H(t)$ に対し、

$$H(t) = H(\theta(t)),$$

なる連続な関数 $\theta(t)$ が得られれば、 $T(t)$ と $\dot{\theta}(t)$ は式(3)の関係を満たす。ここで、各時間 t において $\theta(t)$ を代表値とする類 $\Theta(t)$ により、

$$\theta'(0) = \theta(0),$$

$$\theta'(t) \in \Theta(t); t > 0,$$

なる任意の連続関数 $\theta'(t)$ を作れば、これは式(3)で別の斉次解を使って、 T から得たものとなる。しかも、ある時間の区間で $\Theta(t)$ が不定値特異点を含まないときには、式(3)で得られるすべての $\theta(t)$ はその区間では同じ $\Theta(t)$ に含まれる。つまり、この区間で

は、一つの $\theta(t)$ によって式(3)の駆動則の動作が調べられる。また、その区間ではすべての $\theta(t)$ は同相である(式(3)より同相写像が導かれる)。

第3図で H が H_1 から H_2 に H' が単調減少するように変化したとき、それに対応して、点 P_1 および点 P_1' どちらからも点 P_2 に至る θ の連続な変化が得られる。一方、 H を H_1 から H_3 に H' が単調増加するように変化させたときには、点 P_1 からは θ の連続な軌跡を得られず、 θ^d で不連続となる。この点 P_1 のように、ある H の変化によって必ず θ が不連続に変化する点は、図の斜線部に示すように、一つの連続した集合 $\Phi(\theta^d)$ を作る。集合 $\Phi(\theta^d)$ は、定値特異点 θ^d の近傍から連続で同相な θ を連ねて得られ、不定値特異点を含まない。その境界は不定値特異点を含む Θ である。第3図では、 $\Phi(\theta^d)$ は Θ^s の一部で囲まれた領域(円の内部と同相)となっている。

Φ は、定値特異点より生成されるので、定値特異点の曲面の数だけ存在する。角運動量の空間では、 Φ は、特異点の曲面で囲まれた領域となる。また、 θ が連続でなくなる H の変化は、定値特異点の曲面を通過するものであり、ある広がりをもっている。

式(3)の駆動則で、任意の指令トルクに対して特異点を回避できることを保証するためには、角運動量の境界を除いたすべての定値特異点より作られる Φ に入らないようにする必要がある。たとえば、第3図で点 P_2 を起点に、 H を H_2 から H_1 に変化させたとき、 P_1 と P_1' への2通りの解がある。どちらの解になるかは、斉次解の選び方による。従来の駆動則は、特異点で0になる評価関数を極大にするように斉次解をあたえるだけであり、 P_1' への解を必ず与える保証はない。

以上のように従来提案されている駆動則は、結果として、不定値特異点に対する局所的な特異点回避のみを考慮したものとなっていて、定値特異点をもつシステムでは任意の指令に対しての大域的な動作について保証されていないことが明らかになった。

以上の問題点を考慮して駆動則を考えるためには、まず配列の選択において、(a)内部に定値特異点をもたない配列にすることが重要である。また定値特異点をもつ配列を使う場合には、(b)定値特異点を含む領域 Φ に入らないことを保証すること、または、(c)一時的に式(3)を使わないで、指令トルクと方向の異なるトルク出力を許して特異点回避を行うこと、などが考えられる。(a)については次章に6個のCMGによる構成の一例を示す。(b)については、式(3)の駆動則で、どのような評価関数を使い、どのように斉次解を選べばよいか、本論文の範囲では明らかでなく、

今後の課題である。(c)については、次章で述べるループ型配列についての一例が提案されている²⁾。

5. 定値特異点の分布の例

具体的な CMG の配列について定値特異点の分布の例を示す。

4 CMG による代表的な構成であるピラミッド形

第4図 ピラミッド型配列

第5図 ピラミッド型配列の定値特異点の分布 ($\beta=54.7^\circ$)
角運動量の境界および内部の定値特異点の一部を角運動量の空間に表示してある。すべての定値特異点は z 軸まわりに 90° ずつ回転させてゆくことによって得られる。内部の定値特異点は右の平行六面体の辺の周辺に帯状に存在する。等辺平行六面体(ABCDEFGH): EBCH は XY 面上の正方形, D, F は z 軸上, A: $(4c \ 0 \ 2s)$, B: $(2c \ 2c \ 0)$, D: $(0 \ 0 \ 2s)$, $s=\sin \beta$, $c=\cos \beta$

第6図 ループ型配列

(a) 4 CMG ($g_1 \sim g_4$), (b) 6 CMG ($g_1 \sim g_6$)

CMG(第4図)⁴⁻⁶⁾には、角運動量の境界以外にも定値特異点がある。 u をパラメータに式(9)を使い、計算機によって求めた定値特異点での H を第5図に示す。このうち、一部は解析的に求めることができる。図は、対称性を考慮して一部を描いてある(内部に定値特異点の閉曲面がないことから、 H の空間が単連結であることがわかる)。

4 CMG のループ型配列(第6図)²⁾には、角運動量の空間で二つの曲線(円)となる半定値特異点が存在する。それは、解析的に解けて、次式のようなになる。

$$\theta_1 = \theta_2, \theta_3 = -\theta_4,$$

および,

$$\theta_1 = -\theta_2, \theta_3 = \theta_4,$$

ただし、 θ は第6図を原点にとった。

この特異点は、前述のように連続な駆動則で大域的には回避できず、文献2で安定な特異点として議論されているものである。ループ型配列では、 $H(\theta)$ の逆像が解析的に求められるため、不連続関数による駆動則を使って特異点回避が保証されている²⁾。ただし、この場合には、一時的に指令トルクと異なる方向のトルクが出力されている。

角運動量の境界以外の特異点がすべて不定値である配列の例としては、6個の CMG によるループ型がある(第6図)。

6. ま と め

本論文では、特異点での角運動量変化の二次の微小量の符号を調べることによって、特異点を定値、半定値、不定値の三つに分類できることを示した。そのうち、前2種は、従来から提案されている駆動則では局所的に回避できないこと、およびそのような特異点があると、任意の指令トルクに対する大域的な動作が保証されないことがあることを示した。また、配列によって定値特異点の分布が異なることを、具体的に例示した。

駆動則の動作を保証するためには、駆動則によって CMG が動作する空間の位相的性質を解析することが必要である。また、本論文では、CMG の角運動量空間の単連結性を仮定したが、特異点のつながりと連結性は密接に関連した問題であり、単連結の条件を明確にすることも、解決されるべき課題である。

今後、これらの問題をより一般的に解明するとともに、個々の配列についての有効な駆動則について検討を進めたい。

参考文献

- 1) Yoshikawa, T.: A Steering Law for Three Double

Gymbal Control Moment Gyro System, NASA TM X-64926 (1975).

- 2) Yoshikawa, T.: Steering Law for Roof Type Configuration Control Moment Gyro System, Automatica, 13 (1977), pp. 359-368.
- 3) Hefner, R.D. and McKenzie, C.H.: A Technique for Maximizing the Torque Capability of Control Moment Gyro Systems, Astrodynamics, 54 (1983), pp. 905-920.
- 4) Kurokawa, H., Yajima, N. and Usui, S.: A CMG Attitude Control System for Balloon Use, Proc. 14th ISTS, 1984, pp. 1211-1216.
- 5) 黒河治久, 矢島信之, 臼井清一: 三軸コントロール・モーメント・ジャイロ (CMG) の駆動則, 第28回宇宙科学技術連合講演会講演集, 1984, pp. 78-79.
- 6) Margulies, G. and Aubrun, J.N.: Geometric Theory of Single-Gimbal Control Moment Gyro Systems, J. Astro. Sci. XXVI (1978), pp. 159-191.

付録1. 評価関数の意味

$|\dot{\theta}|$ を一定にしたとき出力トルクは,

$$T^t(CC)^{-1}T \leq |\dot{\theta}|^2$$

で表される楕円体の内部に限られる。 $|T|/|\dot{\theta}|$ は楕円体の径に対応していて, T 方向によって決まる. この楕円体のスカラー量として, (a) はその体積, (b) は最小の主軸長を示している. (c) は座標軸方向の径の長さの最小値であり, スカラーではない.

付録2. 特異点の曲面の曲率

$\delta\theta^T$ を核 N に直交する空間の基底で表し, 式(6)に代入すると, 特異点の曲面の曲率を表現する二次形式が得られる. この曲面のガウス曲率 x は,

$$1/x = (1/2) \sum_i \sum_j p_i p_j |c^s_i c^s_j u|^2, \quad (A.1)$$

となる.

付録3. 小行列式の導出と定値特異点の存在範囲

$\det F$ が式(9)となることを導く.

C はランクが2であるから, (c^s_i) の中に独立な二つのベクトルがあり, これを c^s_1, c^s_2 としてよい. ここで, d_{ij} を

$$d_{ij} = |c^s_i c^s_j u|,$$

とすると, 三次元空間の任意の4ベクトルの関係,

$$a_1|a_2a_3a_4| - a_2|a_3a_4a_1| + a_3|a_4a_1a_2| - a_4|a_1a_2a_3| = 0$$

から,

$$c^s_i d_{jk} + c^s_j d_{ki} + c^s_k d_{ij} = 0, \quad (A.2)$$

が成立するので, $e^N_{ij} = (e^N_{ij})$ を,

$$e^N_{ij} = \begin{cases} d_{2i+2}; j=1, \\ d_{i+21}; j=2, \\ d_{12}; j=i+2, \\ 0; \text{その他}, \end{cases} \quad (A.3)$$

第1表 固有値の符号(符号をすべて逆にしたものは, 同じとする)

p_i の符号	F^T の固有値の符号	F の固有値の符号	性質
++++	++	++++	定値(境界)
-++++	-+	++++	定値(一部境界)
	++	-++++	不定値
---++	--	++++	定値
	-+	-++++	不定値
	++	---++	
----+ + + + +	--	-++++	
.....	.....	.....	

とすると, e^N_i は0でない斉次解で互いに独立であり, N の基底となる. N に直交する線形空間 T の基底は,

$$e^T_{1j} = \begin{cases} -d_{12}; j=1 \\ 0; j=2 \\ d_{2j}; 3 \leq j \leq n, \end{cases} \quad (A.4)$$

$$e^T_{2j} = \begin{cases} 0; j=1 \\ -d_{12}; j=2 \\ d_{j1}; 3 \leq j \leq n, \end{cases}$$

なる e^T_1, e^T_2 で得られる. ここで $n \times n$ 行列 P, A を,

$$P_{ij} = \begin{cases} 1/p_i; i=j \\ 0; i \neq j, \end{cases}$$

$$A = (P^{-1}e^T_1 P^{-1}e^T_2 e^N_1 \cdots e^N_{n-2}),$$

とし, (6)の二次形式の行列を A で変換すると,

$$A^t P A = \begin{pmatrix} F^T & 0 \\ 0 & F \end{pmatrix} \quad (A.5)$$

となる. F^T は 2×2 , F は $(n-2) \times (n-2)$ 対称行列で, F は式(8)の二次形式に対応する行列である.

(A.2)より d_{ij} は,

$$d_{ij}d_{ki} + d_{ik}d_{ij} + d_{ii}d_{jk} = 0$$

となることを利用し, (A.3), (A.4)を使うと,

$$\det A = d_{12}^{n-2}/x,$$

$$\det F^T = d_{12}^2/x,$$

を得る. (A.5)を使い d_{12} の項をまとめて $\det F$ を得る. 同様にして F の小行列式(9)が求まる.

ここで, $1/x \neq 0$ のときは A は正則だからシルヴェスタの慣性定理により, P の固有値と F^T , F の固有値の正負の数は等しく, p_i の符号が決まれば F^T の固有値の符号から定値の判別ができる. u に対しての 2^n 個の特異点については, 第1表のように分類されるので, 定値特異点がある領域が限られていることがわかる. F^T の固有値の符号は, トレースとガウス曲率 x で判別できる.