ある種の非線形振動について^{*1} On Nonlinear Oscillation of a Certain Kind

井 上 建 二^{*2}
Kenji INOUE

Key Words: Nonlinear Oscillation, Flight Dynamics, Perturbation Methods

Abstract

Nonlinear oscillation described by an equation $\ddot{x} + \sin x + \dot{x}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 \cos x) = 0$ is considered. Hori's general perturbation theory for non-canonical systems is applied. The condition for the existence of limit cycles in terms of ε_1 and ε_2 and an analytical expression for the solution of the limit cycle are obtained up to the first order. The analytical solution is compared with numerical ones and satisfactory agreement between them is observed.

1. は じ め に

この論文では、微分方程式

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \sin x + \frac{dx}{dt}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 \cos x) = 0 \quad (1)$$

の解について論じる。ここで ε_1 と ε_2 は微小な定数である。

重心を通る軸のまわりに自由に回転できるように支持した模型を、軸に垂直な方向の一様な気流の中に入れると、模型はピッチング運動を行う(第1図)。模型の回転角を α 、時間を t' とすると、模型の運動は

$$\frac{d^2\alpha}{dt'^2} = \frac{M}{I} \quad (2)$$

で記述される。ここで M は模型に働く空気力のモーメント、 I は模型の慣性モーメントである。実験によれば、 M は α と da/dt' の一価関数であることが確かめられている¹⁻³⁾。したがって、 M は α に関しては 2π の周期をもち、 $|da/dt'|$ があまり大きくない範囲では

$$M = I \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{da}{dt'} \right)^n \left[\frac{a_{10}}{2} + \sum_{n=1}^N (a_{1n} \cos n\alpha + b_{1n} \sin n\alpha) \right] \quad (3)$$

と表される。模型が第1図に示したもののように、前後および上下の対称性をもつ場合には、 M は α に関

して π の周期をもち、 $(\alpha, da/dt')$ に関して奇の関数となる。式(3)で運動の特徴を保存するのに最小限必要な項のみを残すと、式(2)は

$$\frac{d^2\alpha}{dt'^2} = b_{02} \sin 2\alpha + \frac{da}{dt'} \left(\frac{a_{10}}{2} + a_{12} \cos 2\alpha \right)$$

となる。ここで $x = 2(\alpha - \pi/2)$ 、 $t = \sqrt{2b_{02}}t'$ とおくと(1)がえられる。ただし

$$\varepsilon_1 = -a_{10}\sqrt{2b_{02}}/4, \quad \varepsilon_2 = a_{12}\sqrt{2b_{02}}/2$$

である。方程式(1)は、変位に依存する抵抗を受ける単振子の運動を記述している。式(1)で $\varepsilon_1 = -\varepsilon_2/2 = \varepsilon$ とおき、 $|x|$ が小さいとすると

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x + \varepsilon \frac{dx}{dt}(x^2 - 1) = 0 \quad (4)$$

となる。これは van der Pol の方程式で、 $|\varepsilon|$ が小さいとき $(x, dx/dt)$ 面上で原点を中心とし半径が2の円に近い安定($\varepsilon > 0$ のとき)または不安定($\varepsilon < 0$ のとき)な周期解(リミットサイクル)をもつことが知られている。以下独立変数 t についての微分を変数の文字の上に点をつけて表す。

上記のような対称性をもつ物体に対して、いままでに三つの型の運動が観察されている。運動を $(x, \dot{x})$ 面(相平面)上の軌跡で説明する。以下相平面は $-\pi \leq x \leq \pi$ の範囲のみを図示することにし、この外の x をもつ点は 2π の整数倍を増減してこの範囲に入る値に直して示す。まず平らな両端面をもつ円柱(第2図)の場合は第3図のようになる¹⁾。どのような初期条件で出発しても、最終的には $x=0$ のまわりの振動に落ち着く。すなわち原点をかこむ閉曲線で表される安定なリミットサイクルをもつ。つぎは両端に円錐あるいは半球をもつ円柱(第4図)で、この場合は第5図に示すように、どのような初期条件から出発しても、最終的には一方向きの回転運動をする¹⁾。すなわち x に関して周期 2π をもつ安定な二つのリミットサイクルをもつ。この運動はオートローテーションと呼ばれる。もう一つは一様な断面形をもつ板(第6図)の場合で、 x に関して周期 2π の不安定な二つのリミット

^{*1} 昭和61年10月3日原稿受理

^{*2} 航空宇宙技術研究所

第1図 流れの中で重心 (C.G.) のまわりに自由に回転できるように支持された模型

第2図 安定な往復運動をリミットサイクルとしてもつ模型

第3図 第2図の模型が相平面上に示すいくつかの軌道

第4図 安定な一方向き運動をリミットサイクルとしてもつ模型

第5図 第4図の模型が相平面上に示すいくつかの軌道

第6図 不安定な一方向き運動をリミットサイクルとしてもつ模型

サイクルをもつ (第7図)^{2,3)} 二つのリミットサイクルではさまれる状態から出発すると、物体は最終的には静止してしまう。また適当な大きさの初速度を与えて二つのリミットサイクルの外の状態から出発すると、回転速度はどんどん増加する(発散)。図には画いていないが、この回転は限りなく加速されるわけではなく、最終的には板の端の移動速度が気流の速度程度になるところに落ち着く。この状態は安定なリミットサイクルで、これもオートローテーションと呼ばれ

第7図 第6図の模型が相平面上に示すいくつかの軌道

る。オートローテーションに関しては Lugt および吉永と楯による解説がある^{4,5)}

この論文では、方程式(1)の ε_1 および ε_2 のいろいろな値に対する解の様子を、摂動法を用いて解析的に調べる。

2. 予備的な考察

方程式(1)の両辺に $\dot{x}$ を掛けて t について積分すると

$$\frac{1}{2}\dot{x}^2 = \cos x - \int_0^t \dot{x}^2(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 \cos x) dt + E_0$$

E_0 は初期条件で定まる定数である。

$$E_k = \dot{x}^2/2, E_p = -\cos x, \quad (5)$$

$$E_t = E_k + E_p$$

で運動エネルギー、ポテンシャルエネルギー、全エネルギーを定義すると

$$E_t = - \int_0^t \dot{x}^2(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 \cos x) dt + E_0 \quad (6)$$

第8図は相平面上に $E_t = \text{一定}$ の曲線群を画いたものである。式(6)を微分すると

$$\dot{E}_t = -\dot{x}^2(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 \cos x)$$

この式からつぎのことがわかる。(i) $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$ のとき、つねに $\dot{E}_t = 0$ で E_t は保存する。そして相平面上で $E_t = \text{一定}$ の曲線が運動の軌道となる。(ii) $\varepsilon_2 = 0$ のとき、 $\varepsilon_1 \geq 0$ に応じてつねに $\dot{E}_t \leq 0$ 。(iii) $\varepsilon_1/\varepsilon_2 < -1$ のとき、 $\varepsilon_2 \geq 0$ に応じてつねに $\dot{E}_t \geq 0$ 。(iv) $\varepsilon_1/\varepsilon_2 > 1$ のとき、 $\varepsilon_2 \geq 0$ に応じてつねに $\dot{E}_t \leq 0$ 。(v)

$$-1 \leq \varepsilon_1/\varepsilon_2 \leq 1 \quad (7)$$

第8図 相平面上の等全エネルギー線

のとき、二直線 $x = \pm x_1$,

$$x_1 = \cos^{-1}(-\varepsilon_1/\varepsilon_2) \quad (8)$$

の上で $\dot{E}_t = 0$ となり、 $\varepsilon_2 \geq 0$ に応じて

$$-x_1 < x < x_1 \text{ で } \dot{E}_t \leq 0 \quad (9)$$

$$\text{その外で } \dot{E}_t \geq 0$$

となる。これから $x=0$ 以外の周期解が存在するには、(7)が成り立つことが必要になる。相平面上の $\dot{E}_t > 0$ ($\dot{E}_t < 0$) の領域では、系の状態を表す代表点は、時間 t の経過とともに $E_t = \text{一定}$ の曲線を E_t が増加(減少)する方向に横切って移動する。

方程式(1)の厳密な解を解析的に求めることは困難なので、以下では堀による摂動法を用いて議論を進める。

3. 堀の摂動法

堀は彼が考案した正準系に対する一般摂動論を、非正準系にも適用できるように一般化した⁶⁾。それをわれわれの問題に適用するに当たり、ここには必要な結果のみを記す。詳細については原論文を参照されたい。

いま添字 (n) によって $O(\varepsilon^n)$ (ε は一次の微小量)の量を表す。与えられた運動方程式

$$\ddot{z}_j = Z_j^{(0)}(z) + Z_j^{(1)}(z) + Z_j^{(2)}(z) + \dots \quad (j=1, \dots, m)$$

が、変換

$$z_j = \xi_j + T_j^{(1)}(\xi) + T_j^{(2)}(\xi) + \dots + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m T_k^{(1)}(\xi) \frac{\partial T_j^{(1)}(\xi)}{\partial \xi_k} + \dots$$

によって

$$\dot{z}_j = Z_j^{*(0)}(\zeta) + Z_j^{*(1)}(\zeta) + Z_j^{*(2)}(\zeta) + \dots \quad (10)$$

になったとする. 変換の母関数 $T_j^{(1)}, T_j^{(2)}, \dots$ を適当に選ぶことによって (10) を解ける形にもってゆく.

零次の近似 $Z_j^{*(0)}$ は

$$Z_j^{*(0)} = Z_j^{(0)}(\zeta) \quad (11)$$

で決める. つぎに補助方程式

$$\frac{d\zeta_j}{d\tau} = Z_j^{*(0)}(\zeta) \quad (12)$$

によってパラメータ τ を導入する. 方程式 (12) は, 記号の違いを除けば摂動のない系と同等である. ここで摂動のない問題は積分可能であると仮定する. このとき一次の諸量 $T_j^{(1)}, Z_j^{*(1)}$ はつぎの二式をみたすように決められる.

$$-\frac{dT_j^{(1)}}{d\tau} + \sum_{k=1}^m \frac{\partial Z_j^{(0)}}{\partial \zeta_k} T_k^{(1)} + Z_j^{(1)}(\zeta) = Z_j^{*(1)} \quad (13)$$

$$\frac{dZ_j^{*(1)}}{d\tau} = \sum_{k=1}^m \frac{\partial Z_j^{(0)}}{\partial \zeta_k} Z_k^{*(1)} \quad (14)$$

式 (14) は可解条件 (tractability condition) と呼ばれる.

以上が一次までの一般論である. 堀の原論文では, 例として van der Pol の方程式 (4) その他の問題が扱われている. また別の論文⁷⁾では, これをやや変形した理論によって, 共振を含む Duffing の方程式の問題が論じられている.

4. 摂動法の適用

計算の見通しをよくするために, 二階の方程式 (1) を一階の方程式に直す.

$$\dot{x} = p \quad (15)$$

とおき (5) と

$$\begin{aligned} \ddot{x} = \dot{p} &= \dot{x} \frac{dp}{dx} \\ &= p \frac{dp}{dx} = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{2} p^2 \right) = \frac{dE_k}{dx} \end{aligned}$$

を用いると式 (1) は

$$p = \pm \sqrt{2E_k} \quad (16)$$

に依じて

$$\frac{dE_k}{dx} = -\sin x \mp \sqrt{2E_k} (\epsilon_1 + \epsilon_2 \cos x) \quad (17)$$

となる. 原方程式 (1) が t を独立変数とする二階の自律系であるのに対して, 式 (17) は x を独立変数とする一階の非自律系である.

方程式 (17) は, E_k, x をそれぞれ z_1, z_2 で表すと

$$\frac{dz_1}{dx} = Z^{(0)}(z) + Z^{(1)}(z), \quad \frac{dz_2}{dx} = 1 \quad (18)$$

ただし

$$Z^{(0)}(z) = -\sin z_2$$

$$Z^{(1)}(z) = \mp \sqrt{2z_1} (\epsilon_1 + \epsilon_2 \cos z_2) \quad (19)$$

と書かれる. 変換 $z_1, z_2 \rightarrow \zeta_1, \zeta_2$ を

$$z_1 = \zeta_1 + T^{(1)}(\zeta) + \dots \quad (20)$$

$$z_2 = \zeta_2$$

とし, 新変数 ζ によって (18) が

$$\frac{d\zeta_1}{dx} = Z^{*(0)}(\zeta) + Z^{*(1)}(\zeta) + \dots \quad (21)$$

$$\frac{d\zeta_2}{dx} = 1$$

と書き替えられるとする. 以下前節の処方に従って計算を進める.

零次の近似は (11) により

$$Z^{*(0)} = Z^{(0)}(\zeta) = -\sin \zeta_2 \quad (22)$$

補助方程式 (12) によってパラメータ ξ を導入する (いまは独立変数が変位 x であるので, 時間 t との混同を避けて, τ の代りに ξ を用いる).

$$\frac{d\zeta_1}{d\xi} = Z^{*(0)} = -\sin \zeta_2, \quad \frac{d\zeta_2}{d\xi} = 1$$

その一般解は, C, C' を ξ に関しての定数として

$$\zeta_1 = \cos \zeta_2 + C \quad (23)$$

$$\zeta_2 = \xi + C' \quad (24)$$

で与えられる.

つぎに一次の $T^{(1)}, Z^{*(1)}$ は (13), (14) により

$$-\frac{dT^{(1)}}{d\xi} + Z^{(1)}(\zeta) = Z^{*(1)} \quad (25)$$

$$\frac{dZ^{*(1)}}{d\xi} = 0 \quad (26)$$

から決められる. 式 (26) から

$$Z^{*(1)} = C_1$$

ここで C_1 は ξ に関して定数である. これと (25), (24) から

$$T^{(1)} = \int [Z^{(1)}(\zeta) - C_1] d\zeta_2 \quad (27)$$

式 (19) に (23) と (24) を用いると

$$\begin{aligned} Z^{(1)}(\zeta) &= \mp \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{C + \cos \zeta_2}} [\epsilon_1 C + (\epsilon_1 + \epsilon_2 C) \cos \zeta_2 \\ &\quad + \epsilon_2 \cos^2 \zeta_2] \end{aligned} \quad (28)$$

以下に現れるいろいろな楕円関数の計算には, 文献 8 が大変役に立つ.

5. 往復運動 ($-1 < C < 1$ の場合)

まず $-1 < C < 1$ の場合を扱う

$$\operatorname{sn}(u, k) = \frac{1}{k} \sin \frac{\zeta_2}{2} \quad (29)$$

$$k = \sqrt{\frac{C+1}{2}} < 1 \quad (30)$$

によって時間 t に類似の変数 u を導入する. sn は k を母数とするヤコビの楕円関数の一つである. そして

$$du/dt > 0 \quad (31)$$

したがって

$$\frac{dx}{dt} \frac{dx}{du} = p \frac{dx}{du} = p \frac{d\zeta_2}{du} \geq 0 \quad (32)$$

と仮定する. この仮定は以下の計算において矛盾を生じない. cn をヤコビの楕円関数の一つとすると, 式(29), (32)から $p \geq 0$ に応じて

$$d\zeta_2/du \geq 0, \text{ cn } u \geq 0 \quad (33)$$

となる.

$$a = \text{Cos}^{-1}(-C) = 2 \text{Sin}^{-1} k$$

とすると, u が一方向きに变化するとき, ζ_2 は $\pm a$ の間を往復する:

$$-a \leq \zeta_2 \leq a \quad (34)$$

ζ_2 が $\pm a$ の間を1往復するとき u は $4K$ だけ变化する. $K = K(k)$ は k を母数とする第一種完全楕円積分である. 式(23), (29), (30)から

$$\zeta_1 = C + \cos \zeta_2 = 2k^2 \text{cn}^2 u \quad (35)$$

$$d\zeta_2 = 2k \text{cn } u \cdot du \quad (36)$$

これから $p \geq 0$ に応じて

$$\frac{d\zeta_2}{\sqrt{C + \cos \zeta_2}} = \pm \sqrt{2} du \quad (37)$$

式(28)に(35), (37)を用いると

$$\begin{aligned} \int Z^{(1)} d\zeta_2 &= -4k^2 \int \{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \text{sn}^2 u \\ &\quad - [\varepsilon_1 + \varepsilon_2(1 + 2k^2)] \text{sn}^2 u \\ &\quad + 2\varepsilon_2 k^2 \text{sn}^4 u\} du \\ &= \frac{4}{3} \{ (3\varepsilon_1 - \varepsilon_2)(1 - k^2)u \\ &\quad - [3\varepsilon_1 - \varepsilon_2(1 - 2k^2)]E(u) \\ &\quad - 2\varepsilon_2 k^2 \text{sn } u \cdot \text{cn } u \cdot \text{dn } u \} \end{aligned} \quad (38)$$

ここで $E(u)$ は第二種不完全楕円積分, dn はヤコビの楕円関数の一つである. 積分(38)の被積分関数は u の周期関数であるが, その積分(39)は一般には周期関数とならず永年項を含む. それゆえに(27)の $C_1 = Z^{*(1)}$ として $Z^{(1)}$ の区間(34)での平均値 $\langle Z^{(1)} \rangle$ を選んでやる.

すなわち(39)から $p \geq 0$ に応じて

$$\begin{aligned} Z^{*(1)} &= C_1 = \langle Z^{(1)} \rangle = \frac{1}{2a} \int_{-a}^a Z^{(1)} d\zeta_2 \\ &= \pm \frac{4}{3a} \{ (3\varepsilon_1 - \varepsilon_2)(1 - k^2)K(k) \\ &\quad - [3\varepsilon_1 - \varepsilon_2(1 - 2k^2)]E(k) \} \end{aligned} \quad (40)$$

ここで $E(k)$ は第二種完全楕円積分である. そうすると(36), (33)から

$$\begin{aligned} \int C_1 d\zeta_2 &= \langle Z^{(1)} \rangle \int d\zeta_2 \\ &= 2k \langle Z^{(1)} \rangle \int \text{cn } u \cdot du \\ &= \pm 2 \langle Z^{(1)} \rangle \left\{ \text{Sin}^{-1}(k \text{sn } u) \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\quad \left. + a \left[\frac{u+K}{2K} \right]_g \right\} \\ &= \frac{8}{3a} \{ (3\varepsilon_1 - \varepsilon_2)(1 - k^2)K \\ &\quad - [3\varepsilon_1 - \varepsilon_2(1 - 2k^2)]E \} \\ &\quad \cdot \left\{ \text{Sin}^{-1}(k \text{sn } u) + a \left[\frac{u+K}{2K} \right]_g \right\} \end{aligned} \quad (41)$$

ここで $[A]_g$ はガウスの記号で, A を越えない最大の整数を表す.

式(27), (39), (41)から

$$\begin{aligned} T^{(1)} &= \frac{4}{3} \{ (3\varepsilon_1 - \varepsilon_2)(1 - k^2)u \\ &\quad - [3\varepsilon_1 - \varepsilon_2(1 - 2k^2)]E(u) \\ &\quad - 2\varepsilon_2 k^2 \text{sn } u \cdot \text{cn } u \cdot \text{dn } u \} \\ &\quad - \frac{8}{3a} \{ (3\varepsilon_1 - \varepsilon_2)(1 - k^2)K \\ &\quad - [3\varepsilon_1 - \varepsilon_2(1 - 2k^2)]E \} \\ &\quad \cdot \left\{ \text{Sin}^{-1}(k \text{sn } u) + a \left[\frac{u+K}{2K} \right]_g \right\} \end{aligned} \quad (42)$$

となる. ただし積分定数は $T^{(1)}(0) = 0$ となるように選んだ. $T^{(1)}(u)$ は周期 $2K$ をもつ. すなわち(40)の選択により $T^{(1)}$ には永年項が生じない.

近似を一次で打切ることになると, 新運動方程式(21)は(22), (40)から

$$\frac{d\zeta_1}{dx} = -\sin \zeta_2 + \langle Z^{(1)} \rangle \quad (43)$$

$$\frac{d\zeta_2}{dx} = 1 \quad (44)$$

となる. 一方(23)と(44)から

$$\frac{d\zeta_1}{dx} = -\sin \zeta_2 + \frac{dC}{dx}$$

これと(43), (30)から

$$\frac{dC}{dx} = 4k \frac{dk}{dx} = \langle Z^{(1)} \rangle (k) \quad (45)$$

これを積分すれば

$$x = 4 \int \frac{k dk}{\langle Z^{(1)} \rangle (k)}$$

と k と x の関係がえられるが, 右辺を解析的に求めるのは容易ではない. 式(45)は(36), (44)を用いると

$$\frac{dk}{du} = \frac{1}{2} \langle Z^{(1)} \rangle (k) \text{cn}(u, k) \quad (46)$$

と書ける.

いま与えられた ε_1 と ε_2 に対して

$$\langle Z^{(1)} \rangle (k) = 0 \quad (47)$$

となる k を k^* とする. 方程式(47)は(40)から

$$\begin{aligned} &(3\varepsilon_1 - \varepsilon_2)(1 - k^{*2})K^* \\ &\quad - [3\varepsilon_1 - \varepsilon_2(1 - 2k^{*2})]E^* = 0 \end{aligned} \quad (48)$$

と書ける. ただし $K^* = K(k^*)$, $E^* = E(k^*)$ である. $k = k^*$ のときの諸量を $*$ をつけて表すと, (20), (35)から

$$\begin{aligned} E_k^* &= C^* + \cos x + T^{(1)}(u, k^*) \\ &= 2k^{*2} \operatorname{cn}^2 u + T^{(1)}(u, k^*) \end{aligned} \quad (49)$$

ただし (42) と (48) から

$$\begin{aligned} T^{(1)}(u, k^*) &= \frac{4}{3} \{ (3\varepsilon_1 - \varepsilon_2)(1 - k^{*2})u \\ &\quad - [3\varepsilon_1 - \varepsilon_2(1 - 2k^{*2})]E(u) \\ &\quad - 2\varepsilon_2 k^{*2} \operatorname{sn} u \cdot \operatorname{cn} u \cdot \operatorname{dn} u \} \\ &= -\frac{4}{3} \{ [3\varepsilon_1 - \varepsilon_2(1 - 2k^{*2})]Z(u) \\ &\quad + 2\varepsilon_2 k^{*2} \operatorname{sn} u \cdot \operatorname{cn} u \cdot \operatorname{dn} u \} \end{aligned} \quad (50)$$

ここで

$$Z(u) = E(u) - Eu/K$$

はヤコビのジータ (zeta) 関数で周期 $2K$ をもつ. このように $k=k^*$ のとき E_k は (49) で与えられる周期解 E_k^* となる.

式 (48) から

$$\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = \frac{(1 - k^{*2})K^* - (1 - 2k^{*2})E^*}{3(1 - k^{*2})K^* - 3E^*}$$

これを用いると k^* と $\varepsilon_1/\varepsilon_2$ の関係が計算できる. 結果を第 9 図に示す.

$$\begin{aligned} K(0) &= E(0) = \frac{\pi}{2}, \quad E(1) = 1, \\ \lim_{k \rightarrow 0} \frac{K - E}{k^2} &= \frac{\pi}{4} \end{aligned} \quad (51)$$

$$\lim_{k \rightarrow 1} \left(K - \ln \frac{4}{k'} \right) = 0, \quad k' = \sqrt{1 - k^2}$$

なので⁸⁾,

$$\lim_{k^* \rightarrow 0} \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = -1, \quad \lim_{k^* \rightarrow 1} \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = -\frac{1}{3}$$

である.

第 9 図において曲線 $k=k^*$ のそれぞれの側で (46) の右辺は, (33) と (40) により定符号である. すなわち $\varepsilon_2 \geq 0$ に応じて, 曲線の左側では $dk/du \geq 0$, 右側では $dk/du \leq 0$ となる. これから (i) $\varepsilon_1/\varepsilon_2 < -1$ または $\varepsilon_1/\varepsilon_2 > -1/3$ のとき, $dk/du > 0$ ならば k は u の増加とともに 1 になるまで増えつづけ, $dk/du < 0$ ならば 0 になるまで減りつづける. そして (ii) $-1 < \varepsilon_1/\varepsilon_2 < -1/3$ のとき, $\varepsilon_2 > 0$ ならば k は曲線 $k=k^*$ から遠ざかるように変化し, $\varepsilon_2 < 0$ ならば $k=k^*$ に近づくように変化する. すなわち $k=k^*$ に対する解 E_k^* は $\varepsilon_2 >$

第 9 図 k^* , dk/du と ε_1 , ε_2 の関係 ($-1 < C < 1$ の場合)

$0(\varepsilon_2 < 0)$ のとき不安定な (安定な) 周期解 (リミットサイクル) を与えている.

おわりに周期解に対して t と u の関係を求めておく. 関係 (15), (16), (49) から

$$\frac{dx}{dt} = p = \pm \sqrt{2} \sqrt{\cos x + C^* + T^{(1)}(u, k^*)}$$

$T^{(1)}$ が小さいとして二次以下の項を省略して (35), (37) を用いると

$$\begin{aligned} dt &= \pm \frac{1}{\sqrt{2} \sqrt{\cos x + C^*}} \left[1 - \frac{T^{(1)}(u, k^*)}{2(\cos x + C^*)} \right] dx \\ &= \left[1 - \frac{1}{4k^{*2}nc^2} u \cdot T^{(1)}(u, k^*) \right] du \end{aligned} \quad (52)$$

となる. ただし $ncu = 1/\operatorname{cn} u$. 解 (50) を代入して積分すると, ながしきの計算の後に

$$\begin{aligned} t - t_0 &= u - \frac{1}{4k^{*2}} \int_0^u nc^2 u \cdot T^{(1)}(u, k^*) du \\ &= u - \frac{(3\varepsilon_1 - \varepsilon_2)K^*}{6k^{*2}E^*} \left[Z(u) \{ Z(u) \right. \\ &\quad \left. - 2\operatorname{dn} u \cdot \operatorname{tn} u \} \right. \\ &\quad \left. + k^{*2} \operatorname{sn}^2 u \right] + \frac{2\varepsilon_2 \ln \Theta(u)}{3 \Theta(0)} \end{aligned} \quad (53)$$

をえる. ここで $\operatorname{tn} u = \operatorname{sn} u / \operatorname{cn} u$, $\Theta(u) = \vartheta_0(u/2K)$ はヤコビのテータ (theta) 関数の一つで周期 $2K$ をもつ. 積分定数は $t=t_0$ のとき $u=0$ となるように選んだ. 関係 (52), (53) は, はじめにした仮定 (31) と矛盾しない. ただし k が小さいときの関係⁸⁾

$$\begin{aligned} Z(u) &= \left(1 - \frac{E}{K} \right) u + O(k^2) \quad (|u| < K' = K(k')) \\ K'(0) &= \infty \end{aligned}$$

と (51) に注意する.

周期解 (49) および (53) の右辺第二, 三項が u に関して $2K^*$ の周期をもつことと, x が u に関して周期 $4K^*$ をもつことから, 運動は t に関して

$$T = 4K^* \quad (54)$$

の周期をもつことがわかる.

式 (53) の右辺に現れる積 $Z(u) \cdot \operatorname{tn} u$ は $u=K$ で不定となるように見えるが

$$\begin{aligned} Z(u+K) &= Z(u) - k^2 \operatorname{sn} u \cdot \operatorname{cd} u, \\ \operatorname{cd} u &= \operatorname{cn} u / \operatorname{dn} u; \\ \operatorname{tn}(u+K) &= -\frac{1}{k' \operatorname{tn} u}; \end{aligned}$$

$|u| \ll 1$ のとき $Z(u) \sim (1 - E/K)u$, $\operatorname{sn} u \sim u$ であることから

$$\lim_{u \rightarrow 0} Z(K+u) \operatorname{tn}(K+u) = -k' + \frac{E}{k'K}$$

と有限であることが示される.

6. 一方向きの運動 ($C > 1$ の場合)

つぎに $C > 1$ の場合を扱う. $p \geq 0$ に応じて

$$\operatorname{sn}(u, k) = \pm \sin \frac{\zeta_2}{2} \quad (55)$$

$$k = \sqrt{\frac{2}{C+1}} < 1 \quad (56)$$

によって変数 u を導入する. 変数 ζ_2 が 4π だけ変化するとき, u は $4K$ だけ変化する. 式(55)から

$$\zeta_1 = C + \cos \zeta_2 = \frac{2}{k^2} \operatorname{dn}^2 u \quad (57)$$

$$d\zeta_2 = \pm 2 \operatorname{dn} u \cdot du \quad (58)$$

$$\frac{d\zeta_2}{\sqrt{C + \cos \zeta_2}} = \pm \sqrt{2} k du \quad (59)$$

式(28)に(57), (59)を用いると

$$\begin{aligned} \int Z^{(1)} d\zeta_2 &= -\frac{4}{k} \int \{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \\ &\quad - [\varepsilon_1 k^2 + \varepsilon_2(2 + k^2)] \operatorname{sn}^2 u \\ &\quad + 2\varepsilon_2 k^2 \operatorname{sn}^4 u\} du \\ &= \frac{4}{3k^3} \{2\varepsilon_2(1 - k^2)u \\ &\quad - [3\varepsilon_1 k^2 + \varepsilon_2(2 - k^2)]E(u) \\ &\quad - 2\varepsilon_2 k^2 \operatorname{sn} u \cdot \operatorname{cn} u \cdot \operatorname{dn} u\} \quad (60) \end{aligned}$$

積分(60)は一般には周期関数ではない. そこで(27)の $C_1 = Z^{(1)}$ として $Z^{(1)}$ の一周期にわたる平均値 $\langle Z^{(1)} \rangle$ を選んでやる. すなわち(60)から $p \geq 0$ に応じて

$$\begin{aligned} Z^{(1)} &= C_1 = \langle Z^{(1)} \rangle = \frac{1}{4\pi} \int_{-2\pi}^{2\pi} Z^{(1)} d\zeta_2 \\ &= \pm \frac{4}{3k^3\pi} \{2\varepsilon_2(1 - k^2)K \\ &\quad - [3\varepsilon_1 k^2 + \varepsilon_2(2 - k^2)]E\} \quad (61) \end{aligned}$$

そうすると(58)から

$$\begin{aligned} \int C_1 d\zeta_2 &= \langle Z^{(1)} \rangle \int d\zeta_2 \\ &= \pm 2 \langle Z^{(1)} \rangle \int \operatorname{dn} u \cdot du \\ &= \pm 2 \langle Z^{(1)} \rangle \operatorname{am} u \\ &= \frac{8}{3k^3\pi} \{2\varepsilon_2(1 - k^2)K \\ &\quad - [3\varepsilon_1 k^2 + \varepsilon_2(2 - k^2)]E\} \cdot \operatorname{am} u \quad (62) \end{aligned}$$

ここで $\operatorname{am} u = \sin^{-1}(\operatorname{sn} u)$ は振幅関数である. 式(27), (60), (62)から

$$\begin{aligned} T^{(1)} &= \frac{4}{3k^3} \{2\varepsilon_2(1 - k^2)u \\ &\quad - [3\varepsilon_1 k^2 + \varepsilon_2(2 - k^2)]E(u) \\ &\quad - 2\varepsilon_2 k^2 \operatorname{sn} u \cdot \operatorname{cn} u \cdot \operatorname{dn} u\} \\ &\quad - \frac{8}{3k^3\pi} \{2\varepsilon_2(1 - k^2)K \\ &\quad - [3\varepsilon_1 k^2 + \varepsilon_2(2 - k^2)]E\} \operatorname{am} u \quad (63) \end{aligned}$$

積分定数は $T^{(1)}(0) = 0$ となるように選んだ. 関数 $\operatorname{am} u$ は u が $2K$ 増えるときに π 増え, $T^{(1)}(u)$ は周期 $2K$ をもつ. すなわち選択(61)により永年項をもたな

い.

近似を一次で打ち切ると, 新運動方程式(21)は(22), (61)から

$$\frac{d\zeta_1}{dx} = -\sin \zeta_2 + \langle Z^{(1)} \rangle \quad (64)$$

$$\frac{d\zeta_2}{dx} = 1 \quad (65)$$

となる. 関係(23)と(65)から

$$\frac{d\zeta_1}{dx} = -\sin \zeta_2 + \frac{dC}{dx}$$

これと(64), (56)から

$$\frac{dC}{dx} = -\frac{4}{k^3} \frac{dk}{dx} = \langle Z^{(1)} \rangle(k) \quad (66)$$

これを積分すれば

$$x = -4 \int \frac{dk}{k^3 \langle Z^{(1)} \rangle(k)}$$

と k と x の関係が求まる. (66)は(58)と(65)を用いると

$$\frac{dk}{du} = \mp \frac{k^3}{2} \langle Z^{(1)} \rangle(k) \operatorname{dn}(u, k) \quad (67)$$

と書ける.

ここで与えられた ε_1 と ε_2 に対して

$$\langle Z^{(1)} \rangle(k) = 0 \quad (68)$$

となる k を k^* とする. 方程式(68)は(61)から

$$\begin{aligned} 2\varepsilon_2(1 - k^{*2})K^* \\ - [3\varepsilon_1 k^{*2} + \varepsilon_2(2 - k^{*2})]E^* = 0 \quad (69) \end{aligned}$$

と書ける. ここで $K^* = K(k^*)$, $E^* = E(k^*)$. $k = k^*$ のときの諸量を $*$ をつけて表すと, (20), (57)から

$$\begin{aligned} E_k^* &= C^* + \cos x + T^{(1)}(u, k^*) \\ &= \frac{2}{k^{*2}} \operatorname{dn}^2 u + T^{(1)}(u, k^*) \quad (70) \end{aligned}$$

ここで(63)と(69)から

$$\begin{aligned} T^{(1)}(u, k^*) &= -\frac{4}{3k^{*3}} \{[3\varepsilon_1 k^{*2} + \varepsilon_2(2 - k^{*2})]Z(u) \\ &\quad + 2\varepsilon_2 k^{*2} \operatorname{sn} u \cdot \operatorname{cn} u \cdot \operatorname{dn} u\} \quad (71) \end{aligned}$$

このように $k = k^*$ のとき E_k^* は(70)で与えられる周期解 E_k^* になる.

式(69)からえられる

$$\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = \frac{2(1 - k^{*2})K^* - (2 - k^{*2})E^*}{3k^{*2}E^*}$$

を用いると k^* と $\varepsilon_1/\varepsilon_2$ の関係が計算できる. 結果を第10図に示す. 関係(51)を用いると

$$\lim_{k^* \rightarrow 0} \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = 0, \quad \lim_{k^* \rightarrow 1} \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = -\frac{1}{3}$$

である. 第10図について, 前節におけるのと同様な議論ができる. すなわち, (61)と(67)から $\varepsilon_2 \geq 0$ に応じて, 曲線 $k = k^*$ の左側では $dk/du \leq 0$, 曲線の右側では $dk/du \geq 0$. そして $-1/3 < \varepsilon_1/\varepsilon_2 < 0$ のとき, $\varepsilon_2 > 0$ ならば u の増加とともに k は曲線から遠ざかるよ

第10図 k^* , dk/du と ε_1 , ε_2 の関係 ($C > 1$ の場合)

うに変化し, $\varepsilon_2 < 0$ ならば曲線に近づくように変化する. すなわち $k=k^*$ に対する解 E_k^* は $\varepsilon_2 > 0$ ($\varepsilon_2 < 0$) のとき不安定な (安定な) 周期解を与える.

ここで周期解に対して t と u の関係を求めておく関係 (15), (21), (70) から

$$\frac{dx}{dt} = p = \pm \sqrt{2} \sqrt{\cos x + C^* + T^{(1)}(u, k^*)}$$

二次以下の項を省略し, (57), (59) を用いると

$$\begin{aligned} dt &= \pm \frac{1}{\sqrt{2} \sqrt{\cos x + C^*}} \left[1 - \frac{T^{(1)}(u, k^*)}{2(\cos x + C^*)} \right] dx \\ &= k^* \left[1 - \frac{k^{*2}}{4} n d^2 u \cdot T^{(1)}(u, k^*) \right] du \end{aligned}$$

ここで $nd u = 1/du$. 解 (61) を代入して積分すると

$$\begin{aligned} t - t_0 &= k^* u - \frac{k^{*3}}{4} \int_0^u n d^2 u \cdot T^{(1)}(u, k^*) du \\ &= k^* u + \frac{\varepsilon_2 K^*}{3 E^*} [Z(u) \{Z(u) \\ &\quad - 2 k^{*2} \operatorname{sn} u \cdot \operatorname{cd} u\} + k^{*2} \operatorname{sn}^2 u] \\ &\quad + \frac{2 \varepsilon_2}{3} \ln \frac{\Theta(u)}{\Theta(0)} \end{aligned} \quad (72)$$

となる. ここで $\operatorname{cd} u = \operatorname{cn} u / \operatorname{dn} u$ で積分定数は $t = t_0$ のとき $u = 0$ となるように選んだ. 周期解 (71) および (72) の右辺第二, 三項が u について周期 $2K^*$ をもつことから, 運動の t に関する周期が

$$T = 2k^* K^* \quad (73)$$

であることがわかる.

7. ま と め

ここで前二節でえられた結果をまとめておく. 第9, 10図で k を C , u を t に直し, 一つの図に画くと第11図のようになる. 領域 $\varepsilon_1/\varepsilon_2 < -1$ では $\varepsilon_2 \geq 0$ に応じて $\dot{C} \geq 0$, 領域 $\varepsilon_1/\varepsilon_2 > 0$ では $\varepsilon_2 \geq 0$ に応じて $\dot{C} \leq 0$ である. さらに

$$-1 < \varepsilon_1/\varepsilon_2 < -1/3 \quad (74)$$

のとき, $\varepsilon_2 \geq 0$ に応じて不安定または安定な往復運動のリミットサイクルが存在する. また

$$-1/3 < \varepsilon_1/\varepsilon_2 < 0 \quad (75)$$

のとき, $\varepsilon_2 \geq 0$ に応じて不安定または安定な一方向き運動のリミットサイクルが存在する. はじめに予備的な議論によってえられたリミットサイクルが存在する

第11図 C^* , $\dot{C}$ と ε_1 , ε_2 の関係

ための必要条件 (7) は, 摂動法の適用により一次の精度で (74), (75) のように精密化された.

運動は摂動がない ($\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$) のときには任意の C に対して周期的であるが, $\varepsilon_2 \neq 0$ のときは $\varepsilon_1/\varepsilon_2$ からきまる $C = C^*$ に対してのみ周期的になる. 周期に対しては, (54) と (73) からわかるように, 一次までの結果には摂動の効果は現れない

おわりに以上で求めた解析的な近似解を, 数値計算による厳密解と比較する. 数値計算による解は, 与えられた初期条件に対して方程式 (1) をルンゲ・クッタ法を用いて積分して求めた. 解析解は, リミットサイクルに対して (49) または (70) の E_k^* から (5) により $x^* = \pm \sqrt{2 E_k^*}$ と $E_t^* = E_k^* + E_p = E_k^* - \cos x$ を計算した. 結果を第12~15図に示す. これらは $(x, \dot{x})$ 面 (相平面) 上に運動の軌跡を画いたものと (x, E_t) 面上に E_t が変化していく有様を画いたものから成っている. E_t の図には (8) からきまる直線 $x = \pm x_1$ と, それらで分けられる領域での $\dot{E}_t$ の正負 [(9) 式] も記入されている.

第12図と第13図の例は第3図の場合に対応するもので, 運動は初期条件のいかんによらず安定な往復運動に向かう. 第14図の例は, 第5図の場合に対応するもので, すべての運動は二つの一方向きの運動のどちらかに向かう. 第15図の例は, 第7図の場合に対応するもので, 運動は二つの不安定な一方向きの運動を境として, それらの間から出発するか, 外から出発するかに応じて, 静止に向かったり発散したりする.

第12図 解析解と数値解の比較. 安定な往復運動をリミットサイクルとしてもつ場合 ($\varepsilon_1=0.07$, $\varepsilon_2=-0.14$, $k^{*2}=0.84$) (1)
 — : 数値解 [初期条件: (0.0, -0.5)];
 +, × : リミットサイクルの解析解

第13図 解析解と数値解の比較. 安定な往復運動をリミットサイクルとしてもつ場合 ($\varepsilon_1=0.07$, $\varepsilon_2=-0.14$, $k^{*2}=0.84$) (2)
 — : 数値解 [初期条件: (0.0, 3.5)];
 +, × : リミットサイクルの解析解

第14図 解析解と数値解の比較. 安定な一方向き運動をリミットサイクルとしてもつ場合 ($\varepsilon_1=0.03$, $\varepsilon_2=-0.15$, $k^{*2}=0.84$)
 — : 数値解 [初期条件: (0.0, 0.5), (0.0, -3.5)]; +, × : リミットサイクルの解析解

第15図 解析解と数値解の比較. 不安定な一方向き運動をリミットサイクルとしてもつ場合 ($\varepsilon_1=-0.03$, $\varepsilon_2=0.15$, $k^{*2}=0.84$)
 — : 数値解 [初期条件: (0.0, 2.232), (0.0, 2.132)]; +, × : リミットサイクルの解析解

これらの結果からわかるように、解析解は近似を一次に止めたにもかかわらず、数値解とかなりよく合っている。また摂動のないときの軌道（第8図）との比較からわかるように、摂動の存在は運動の位相にずれをもたらしている。原方程式の解を数値的に求めることは容易であるが、リミットサイクルの存在条件や運動の周期が数式の形で求まったのは、問題を解析的に扱った結果である。

おわりに摂動法の適用に関して種々ご教示いただいた堀源一郎教授（東大理天文）にお礼申し上げる。

参考文献

1) Yoshinaga, T., Inoue, K. and Tate, A.: Determination

of the Pitching Characteristics of Tumbling Bodies by the Free-Rotation Method, *J. Spacecr. Rockets*, 2 (1984), pp. 21-28.
 2) 吉永 崇, 楯 篤志, 井上建二: オートローテーションの実験, 第15回流体力学講演会, 1983.
 3) 楯 篤志, 吉永 崇, 井上建二: いくつかの二次元板の自励回転の実験, 日本航空宇宙学会第15期年会, 1984.
 4) Lugt, H. J.: Autorotation, *Ann. Rev. Fluid Mech.*, 15 (1983), pp. 123-147.
 5) 吉永 崇, 楯 篤志: 細長物体の自励回転, 日本航空宇宙学会誌, 33 (1985), pp. 367-374.
 6) Hori, G.: Theory of General Perturbations for Non-Canonical Systems, *Publ. Astr. Soc. Jpn.*, 23 (1971), pp. 567-587.
 7) 堀源一郎: 非線形振動の摂動論, 京大数理解析研究録, 315 (1977), pp. 27-39.
 8) Byrd, P. F. and Friedman, M. D.: *Handbook of Elliptic Integrals for Engineers and Physicists*, Springer, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1954.