回転翼の空気力学の研究動向*1

齊 藤 茂*2

Key Words: Aerodynamics, Rotary Wings, Wake, Circulation, CFD

1. はじめに

回転翼の歴史は古く、中世からある風車のように自然のエネルギーを利用するものから始まった。近世になって蒸気機関の発明後、船の推進用スクリュー、航空機のプロペラ、ヘリコプタのメインおよびテイル・ロータまた最近ではジェット推進におけるファンのごとくその使用方法の違いこそあれ、回転翼は現代の生活のなかに形を変えて幅広く普及している。そのすべてが人間生活へ少なからず寄与し浸透しているといっても過言ではないであろう。このような古い歴史をもつ回転翼を空気力学的に眺めて見ると、自然の風や水を利用する亜音速領域から、ジェットエンジンのファンや Advanced Turbo Prop (ATP) プロペラのように高亜音速、遷音速領域での使用と、その適用される領域は広い。したがって作動領域の違いによって、回転翼の性能を調べる手段も異なってくる。

ここでは、その手段を歴史を追って解説し、とくに日本で開発された局所運動量理論、局所循環法について詳しく説明する。最後に、最近盛んに行われるようになった数値解法について言及する。

2. 回転翼の空気力学

回転翼と一口にいても、その応用範囲は大変広い。1800 年の中頃、蒸気機関でスクリューを回して

船を進ませようとする試みが行われた。それまで使われていたパドル形式のものに比べて、推進効率の面で威力は素晴らしいものがあった。スクリューは、特殊な目的の物以外、いまでも水上、水中を問わずかなりの船舶に使われている。ついでピストンエンジンを用いた飛行機のプロペラやヘリコプタのロータとして、空中でも使われるようになった。現在ではガスタービン駆動によるターボプロップ機のプロペラとして、おもに短距離輸送の分野で活躍している。ジェットエンジンの出現でプロペラ機の寿命は終わったかに見えたが、近年二度にわたる石油ショックを経験して以来、省エネルギー化が模索され約 30% 高い総合効率をもついわゆる Advanced Turbo Prop (ATP) プロペラの出現をみた(第 1 図)。これは、遷音速領域で飛行するプロペラ付き航空機であり、近い将来世界中の空を飛び回るであろうと予想される¹⁾。

上で述べたプロペラをもつ航空機はほとんど固定翼をもっていて、自重はこの翼で支える。これに対してヘリコプタは、回転翼(以下ロータと呼ぶ)の作る力が自重に見合う分と推力の両方を受け持つ。したがって、前者の回転翼がおもに軸流を問題としているのに対して後者の回転翼は軸流と前進速度(軸流に垂直な方向)の二つの速度成分を問題とする。回転翼に流れ込む速度成分がどの方向であれ、ロータに作用する空気力を推定する場合いちばん問題となるのは、各ブレードが作るウェーク(伴流)の形状とそれによって作り出されるブレード上の誘導速度の大きさと方向である。回転翼の空力計算では、ウェークの作る誘導速度をいかに正確に推定するかということに全力が注がれてきたといっても過言ではない²⁻⁴⁾。

3. 運動量理論^{5,6)}

19 世紀には、船のスクリューを作る際有用となる理論は存在しなかった。このため船大工達は、もっぱら経験と直感で船の形やスクリューの形を決めていた。そしてより良い形を見つけるために、実験という手段を用いるようになった。1865 年、スコットランドの工学者 William J. M. Rankine がプロペラの“ア

著者紹介

齊藤 茂 (正会員)

昭和 27 年生、埼玉県出身、昭和 50 年東京大学工学部航空学科卒業。昭和 55 年同大学院博士課程修了。日本学術振興会奨励研究員、NASA AMES 研究所 NRC 研究員、東京大学工学部航空学科助手を経て昭和 60 年 3 月航空宇宙技術研究所に入所、現在に至る。主に回転翼の空気力学、振動制御等の研究に従事。工学博士。AIAA, AHS 各会員。

*1 昭和 62 年 6 月 25 日原稿受理 Recent Trend of Rotary Wing Aerodynamics

*2 航空宇宙技術研究所 Shigeru SAITO

第1図 ATP(Advanced Turboprop)の概略図⁷³⁾

クチュエータ・ディスク理論”を作り、その後、William Froudeがこの理論を発展させた。この理論がおこる発端は、スクリューの実行ピッチが幾何学ピッチより小さくなる原因を見つけたことにあった（この差は、スリップと呼ばれた）。このスリップは、スクリューの作る推力が水の運動量変化に等しいことに起因する。この理論によれば、ロータを通過する際のスリップは無限遠方でのスリップの増加の半分である⁵⁻⁸⁾。

ところで、この理論では全体の推力は説明できるが、ブレードの上に作用する力やトルクに関しては何も説明できない。また、スクリューではキャピテーション、プロペラではストール等の局所的に起こる複雑な現象もやはり説明できない。

4. 翼素理論^{2,7,8)}

アクチュエータ・ディスク理論では、ブレード個々の力やトルクを導出することができないが、ブレードの翼素に着目して二次元翼の重ねあわせとして考えるのが翼素理論である。この理論では、各翼素での力やトルクを考えるので、アクチュエータ・ディスク理論での欠点を補うことができる。後に述べるように、アスペクト比が大きい回転翼に対しては、揚力線理論等と組み合わせることによりこの理論は十分実用に耐えるものである。

5. 渦理論

ブレードに作用する力やトルクの推定には、1902年から1911年の間にドイツ人の W. Kutta⁹⁾ やロシア人の Nikolai Joukowski¹⁰⁾ が個々に発表した渦理論（または循環理論）の登場を待たねばならなかった。Joukowski の理論では、鋭い後縁をもつ翼型の回りの非粘性理想流体が円柱回りの流れに等角射像される。そして、シリンダーの回りに循環を置き、この循

環の強さは翼の後縁で流体がスムーズに流れ去るという仮定で決定される (Joukowski の仮定または Kutta-Joukowski の仮定)。また摩擦抵抗は、Prandtl によって導かれた翼表面の境界層方程式を解くことによって求められる。第一次世界大戦中に、ドイツのゲッティンゲンにおいて風洞実験が行われ、渦理論による翼の空力特性の推定値とが比較された結果よい一致が見られた。

この理論では二次元翼（無限のスパンをもつ翼）の揚力の説明はできるが、有限のスパンをもつ三次元翼のように翼端での揚力が滑らかにゼロになるような現象は説明できない。この三次元翼の問題を解いたのは、第一次世界大戦の直前から大戦中にかけてドイツのゲッティンゲンにいた Ludwig Prandtl, Albert Betz, C. Wieselsberger¹¹⁾ や Max Munk¹²⁾ である。彼らは、後流渦シート概念を導入した。この後流渦は、飛行方向に流れ去る非常に細い渦糸の集合として定義、構成され、個々の後流渦糸の強さは、束縛渦の各スパン位置での傾きに比例する。Munk は、後流渦の中に散逸する運動エネルギーが最小になるのは、全体の揚力や飛行速度そしてスパン等の与えられた条件に対して、揚力がスパン方向に楕円分布をしているときであることを発見している¹³⁾。

5.1 固定形螺旋渦系^{2,3)} 渦理論の回転翼への応用は、後流渦を直線状シートから螺旋状シートにすることから始まる（第2図）。実際の後流渦は固定翼の場合と同様に、翼端に近いところから出た後流渦がブレードから離れるにつれて巻上がり（ロールアップ）また縮流によってロータの半径より少し内側に入り込む。回転の中心付近では、ハブから軸流の方向にも渦ができ、この回転の方向は、翼端渦の方向と逆である。そして全体として螺旋状にロータ後方に流れていき、しまいには後流渦同士の干渉によってシートの形はくずれ、非常に複雑な流れになる（ヘリコプタ・ロータの場合ではロータ半径の数倍のところからこのような現象がおこる）。固定形螺旋渦モデルというのは、三次元的に非常に複雑な後流渦を単純化し、上記のようなロールアップや縮流等は省略して螺旋状後流渦を実効ピッチの方向にロータから無限後方まで連続的につなげたモデルである。翼に働く揚力は Kutta-Joukowski の定理から求め、誘導速度は、Biot-Savart の法則によって求める。最近では、渦糸を離散化して解析的に導出した式を使うことによって、計算の高速化を図っている。

Munk が固定翼に対して散逸運動エネルギー最小の揚力（循環）分布を求めたのに対して、回転翼に対して同様の事柄を発見したのは Betz¹⁴⁾ であり、近似的

第2図 ホバリング飛行における後流渦¹⁸⁾

な揚力分布を求めたのは Prandtl¹⁵⁾で1919年のことであつた。1920年代に入つて、英国の Sydney Goldstein がゲッティンゲンの研究スタッフに加わり、Prandtl が先に発表した回転翼に対する最適な揚力分布の間違いを修正して彼の博士論文としてまとめたのが1929年である¹⁶⁾

5.2 自由渦系^{2,3)} 固定形螺旋渦系のモデルが後流渦同士の干渉を考えないのに対して、自由渦系は後流渦の干渉を考慮して空間での後流渦の位置を正確に求めようとするものである。渦糸同士は、Biot-Savart の法則から求まる誘起速度の方向に空間上の位置を修正することによって新しい渦系を構成する。新しい渦系において上記の方法を計算が収束するまで繰り返し行って空間上の後流渦の位置を決定する。このようにして決まった渦系からブレード上の誘導速度を計算し翼に働く揚力を決定するのは上記の固定形螺旋渦系の場合と同じである。

しかしながら、この方法は渦系を決めるのに繰り返し計算を行うため絶えず発散の危険性が存在する。また繰り返し計算のために、計算時間が膨大にかかる。実際上の計算では、発散の危険性を防ぐために後流渦の存在範囲をロータ後方、半径の数倍のところまで打ち切っており、遠方渦の影響は他の方法で見積もる(たとえば、リング状の渦輪の集合で代表する)。これは、実際の後流渦ではロータ後方で不安定領域が存在し、計算上でも同様な不安定現象が起きるために、このような処置が取られている。

5.3 揚力線理論^{2,3)} アスペクト比の大きい回転翼では、翼の付け根や翼端の三次元性の非常に強い部分を除いて大成的には二次元性を保つと考えるとよい。すると固定翼の場合と同様に、ブレードの各断面位置(セクション)で二次元翼として扱うことができる。回

転翼の場合、固定翼が剪断流(シェア・フロー)のなかを飛行することと同じとみなし、遠心力やコリオリ力の影響は無視していることになる。各セクションでの空力特性はすでに述べた翼素理論から求められる。

5.4 揚力面理論^{2,3)} 揚力線理論が、アスペクト比の大きいブレードに有効であるのに対して、アスペクト比が小さいブレードではもはや二次元性は成立しない。このことは、翼弦方向の荷重分布を考慮しなければならないことを意味している。

翼弦方向の荷重分布を見積もる方法は、現在までいろいろ提案されている。その一つは、ポテンシャル方程式を翼面上で解くことである。市川は、ヘリコプタ・ブレード上の誘導速度を微小攪乱ポテンシャルを用いて導いている^{17~19)}。ここで、各ブレードが作る後流渦は固定系螺旋渦を仮定している。Dat²⁰⁾や Runyan ら²¹⁾は、加速度ポテンシャルを用いて、やはりヘリコプタ・ブレード上の誘導速度を導き、前進飛行時のブレードに作用する空力荷重を計算している。Johnson は、こういったヘリコプタ・ロータの空気力学を総括的にまとめている²²⁾。

プロペラでは、Kondo が加速度ポテンシャルをフーリエ級数展開を使って定式化し、亜音速領域における空力荷重の定常解をもとめた²³⁾。Hanson は同じく加速度ポテンシャルを用いてプロペラ・ブレードの空力荷重を求め、プロペラ騒音の解析を行った^{24~26)}。Namba は、加速度ポテンシャルを Kondo と同様な方法を使って記述し、ダクト付きロータの空力荷重や空力騒音の計算をしている^{27,28)}。

その他の方法としては、渦理論の発展形として翼面をパネルに切り、個々のパネルを馬蹄形渦モデルで代表して解くものがある^{2,3)}。この種の解析方法は、非常に手ごろでありコード化も大変容易であるため、現在まで多くの文献が見受けられる。たとえば、文献29, 30 など。

いままで述べてきた方法では、翼に作用する揚力は求められるが、粘性摩擦による抵抗は求められないという欠点がある。したがって、摩擦抵抗に関しては、実験値などから推測する方法が通常よくとられる。

回転翼における揚力線理論や揚力面理論は、先に説明した渦理論による後流渦と結合した使い方がされる。このことは、翼素理論についても同様であることを付け加えておく。

6. 局所運動量理論 (LMT)³¹⁾

東、河内は1975年ヘリコプタ・ロータのようにアスペクト比の大きい回転翼の空気力学的諸量を求める一手法として局所運動量理論 (LMT) を発表した。運動

量理論が、ロータ全体の推力推定に非常に良い理論であることは多くの実験結果との比較において実証されている。この理論によって決定されるロータ面で一般的な誘導速度を用いてブレードの各半径位置の翼素での揚力と抗力を求めるのが翼素理論の改良版であるが、ブレード上の誘導速度を各半径位置での瞬時のモーメント・バランスから求めようとするのが局所運動量理論 (Local Momentum Theory, LMT) である³¹⁾。渦理論ではブレード自身の吐き出す渦を全空間で積分することによってブレード上の誘導速度を決定するので、計算時間が膨大にかかるのが欠点である。この欠点と運動量理論の利点とをうまくバランスさせて発散の危険性もなく回転翼の空気力学的諸量を求めようとしたのが LMT といえる。固定形螺旋渦系による渦理論の場合に比べて LMT は、1 ケースの定常解を得る

のに 10 から 100 分の 1 という短い時間で、渦理論の計算結果と同程度の精度の結果を得ることができる。この理論によれば、アスペクト比の大きい翼の各翼素の空力性能は、翼素理論から求まる揚力と運動量理論から求まる力の局所的な釣合から求められる。

まず固定翼での説明から始めよう。翼素理論において、速度 V で飛行する楕円翼は第3図のように翼面上の誘導速度 v_0 は無限後流での誘導速度 v の半分である。そして翼面上ではスパン方向に一定である。翼の外側では吹上が存在するが、その範囲は翼端付近に限られており流れ場が影響する範囲もまた翼端付近以外は小さい。この楕円翼の性質を基礎にして、任意の形状をもつ翼または揚力分布を“ N 個の楕円翼の集合”と考える。いま、第4図のように i 番目の楕円翼のもつ揚力を L_i 、一定の誘導速度を Δv_i としよう。

第3図 楕円翼の揚力と誘導速度の分布³¹⁾

第4図 N 個の楕円翼による重ね合わせ³¹⁾

このとき、翼全体の揚力 L は

$$L = \sum_{i=1}^N L_i = \sum_{i=1}^N 2\rho\pi(b_i/2)^2 V \Delta v_i$$

で与えられる。第4図にも示したように、楕円翼は(a)のごとく対称配置に置かれる場合と(b)のように片寄せ配置に置かれる場合とが考えられる。対称配置の場合、各楕円翼の外側の吹上が無視できれば、すなわち

$$\Delta v_i = 0 \quad |\xi| \geq 1$$

のとき、任意のところでの揚力および誘導速度は次式で求められる。

$$l = \sum_{i=1}^j l_i(\xi) \\ = \sum_{i=1}^j (4L_i/\pi b_i) \sqrt{1-\xi^2}$$

$$v_j = \sum_{i=1}^j \Delta v_i$$

ここで、 $\xi = y/(b_i/2) = \eta(b/b_i)$ 、 b はスパンである。 j 番目の楕円翼の誘導速度 Δv_j を決定するために、局所要素 $(-\eta_j, -\eta_{j+1})$ において翼素理論から求まる揚力は局所的な運動量と釣り合わねばならない。

$$l_i = \int_{-\eta_j}^{-\eta_{j+1}} \frac{1}{2} \rho V^2 c_j a (\theta_j - \sum_{i=1}^j (\Delta v_i/V)) \frac{d\eta}{\Delta \eta_j} \\ = \sum_{i=1}^j 2\bar{m}_i \Delta v_i$$

ここで、

$$\Delta \eta_j = \eta_j - \eta_{j+1}$$

$$\bar{m}_i = \int_{-\eta_j}^{-\eta_{j+1}} \rho b_i V \sqrt{1-(b/b_i)^2 \eta^2} \frac{d\eta}{\Delta \eta_j}$$

$$c_j = c[\eta = -(\eta_j + \eta_{j+1})/2]$$

$$\theta_j = \theta[\eta = -(\eta_j + \eta_{j+1})/2]$$

c_j , θ_j , $\bar{m}_i$ は、 j 番目の楕円翼のコード、ピッチ角および i 番目の翼のスパンを直径とする円を通過する流体の質量である。また ρ , a はそれぞれ空気密度および二次元揚力傾斜である。局所的な運動量バランスから j 番目の誘導速度は次のように求まる。

$$v_j = \sum_{i=1}^j \Delta v_i$$

このようにして j 番目の揚力は $j=1$ から $j=N$ まで連続的に求められる。 N 個の楕円翼が片寄せ配置の

場合でも同様な方法で簡単に揚力および誘導速度が求められる。

この方法を回転翼へ応用すると次のようになる。第5図に示すようにロータ・ブレードを楕円分布の循環をもつ N 個の楕円翼に分解し (ロータ・ブレードは回転面上のシェアフローの中で作動しているので、楕円分布の循環をもつ翼は厳密には楕円の平面形をしていない。ここでは、楕円分布の循環をもつ翼を楕円翼と仮に呼ぶ)、各楕円翼を片寄せ配置にする。これは、回転翼のブレードに作用する空気力はおもにブレードの翼端側に集中しているためである。このとき、局所的要素 $(x_i R, R)$ の間にある i 番目の楕円翼による運動量変化に関する流体の質量 m_i は、

$$m_i = \rho S_i V_{i,c} \\ = \rho \pi \{R(1-x_i)/2\}^2 \{V \sin \phi + R\Omega(1+x_i)/2\}$$

ここで、ブレードに沿って測った変数 x と各楕円翼の上での座標 ξ の関係は、次のようになる。

$$x = \{(1+x_i) + \xi(1-x_i)\}/2$$

または

$$\xi = \{2x - (1+x_i)\}/(1-x_i)$$

スパン位置 x においてブレードに作用する力と誘導速度は、固定翼の場合と同様にして次のごとく求められる。

$$l_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{1}{2} \rho V_i^2 c_i a (\theta_i - \phi_i) \frac{dx}{\Delta x_i} \\ = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \sum_{i=1}^i \left\{ \frac{4L_{i'}}{\pi R(1-x_{i'})} \right\} \\ \times \left\{ \frac{[R\Omega x + V \sin(\phi_{h,0} + \sum_{\lambda=0}^{i-1} \Delta \phi_\lambda)]}{V_{i',c}} \right\} \\ \times \sqrt{1 - \left\{ \frac{(2x-1-x_{i'})}{(1-x_{i'})} \right\}^2} \frac{dx}{\Delta x_i}$$

$$\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$$

ここで、

$$V_i = V \sin(\phi_{h,0} + \sum_{\lambda=0}^{i-1} \Delta \phi_\lambda) + R\Omega \left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2} \right)$$

$$c_i = c[x = (x_i + x_{i+1})/2]$$

$$\theta_i = \theta[x = (x_i + x_{i+1})/2]$$

$$\phi_i = (V_N + v_{im} + v_{ijk})/V_i$$

第5図 回転翼に対する N 個の楕円翼の重ね合わせ²¹⁾

$$V_N = V \sin(i)$$

$$L_i = 2\rho S_i V_{i,c}(v_{ijk} - v_{i-1,j,k})$$

ここで、 $\phi_{k,0}$ と $\Delta\phi$ はそれぞれ k 番目のブレードの方位角の初期値、方位角方向のステップ幅である。水平速度 V_i 、ブレードのピッチ角 θ_i そして誘導迎角 ϕ_i はブレードの方位角の関数である。したがって、上記の添え字 j および k に依存するが簡単のためここでは省略した。添え字 i, j, k について説明すると、 i は半径方向の位置、 j は時間または方位角方向の位置、 k は i 枚あるブレードの k 番目のブレードを示す。

さてこのようにして求められた揚力と誘導速度は、時間を追うごとにどのように変化するのであろうか。固定翼では、翼の作り出す後流渦のシートは翼の後方に流れ去るだけで機体が運動をしていなければ翼は二度と自分自身の吐き出した渦と出くわすことはない。しかし、回転翼の場合、各ブレードが作り出す後流渦は螺旋状に後方に流され、時として先行するブレードの後流渦と次のブレードが交差することさえある。このことは固定翼と大きな違いであり、絶えずロータは後流渦の影響のもとに作動していると考えねばならない。

この影響を考慮するためにLMTでは次の工夫をしている。まず単一回転のロータが水平面を動くものと考える(第6図参照)。ロータ面が移動する面の上に細かい矩形のメッシュを作り、その座標を (l, m) とする。図からもわかるようにこの矩形の部分 (l, m) は二つのブレードの通過によって直接的に影響を受ける。すなわち、時刻 j のとき、 k 番目のブレードの i 番目の翼素が座標 (l, m) を通過する場合と、時刻 j' のとき k' 番目のブレードの i' 番目の翼素が同じ座標 (l, m) を通過する。ロータが複数個の場合でも事情は同じであるが、むしろ他のロータのブレードがメッシュ上の座標 (l, m) を通過する可能性もある。このように単一ロータのブレードであろうと複数個のロータのブレードであろうと、ブレードがメッシュ上の座標 (l, m) を通過するときのプロセスは次のように説明される。ただし、ブレードの各翼素で起こる現象は短い時間内で完結されると仮定している。第7図を参照しながら、時刻 $t=j-1$ のときある翼素が座標 (l', m') にいて前進速度 $V_{i,j-1,k}$ で飛行しているとする。進行方向に垂直な方向の速度成分は、次の三つの成分が考えられる。すなわち、ロータ平面の傾きによる成分 V_N 、その時刻にブレード翼素で誘起された誘導速度 $v_{i,j-1,k}$ 、そして自分自身のブレードも含めた幾つかのブレードがその時刻までに座標 (l', m') に誘起していった速度の合計値 $v_{l',m'}^{j-1}$ である。ブレードが時刻 $t=j, t=j+1$ のときに通過する位置 $(l, m), (l'', m'')$ で

第6図 前進飛行時における回転面上の各メッシュとブレードとの関係³¹⁾

第7図 ホバリング中における誘導速度の継続的変化の概況³¹⁾

は、やはり先行するブレードが残していった誘導速度が存在する。しかしこの誘導速度は、ブレードが通過する直後の値を保ちえない。すなわち、ブレードが通過した後時間の経過とともにその値は減衰する。そこで“減衰係数” C を導入する。この係数はブレードが座標 (l, m) を通過した後、次のブレードが同じ場所を通過するまでにこの場所に存在していた誘導速度が C 倍の大きさに変化することを示している。このことは物理的には次のように説明できる。つまりブレードによって乱された回転面は時間の経過によって後方に落ちていく(このとき、回転面上の平均誘導速度を v_0 としよう)。そしてある時間が経つと回転面には新しい流体(この場合空気)が流れ込んでくるに従って、もとあった誘導速度はその値を保てずに減衰する(このときには誘導速度が v になっているとしよう)。 C の値は、 $C=v/v_0$ で定義され、この値は通常1より小

さいが、突風のような局部的に速度場が変化するときには1を越えることもありうる。一般的に係数 C は、スパン方向、方位角方向の関数であり、また時間の関数でもある。 $t=j$ で座標 (l, m) の位置における誘導速度は、過去における既知のブレードの情報を使って、時間の経過とともに連続的に次式で求められる。

$$v_{im} = C_{im}^{-1} \left(v_{im}^{j-1} + \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^B v_{i,j-1,k} \cdot \delta_{im} \right)$$

ここで C_{im}^{-1} は、時刻 $t=j-1$ で座標 (l, m) を通過する速度の垂直成分の関数である。そして δ_{im} はブレードが座標 (l, m) を打つときは1であるが、そのほかは0である。もし C_{im}^{-1} がわかれば、上記の式を組み合わせることで各翼素での誘導速度を求めることができる。減衰係数 C の求め方は、ここでは省略するがより詳しい説明は参考文献 31, 32) を参照されたい。

実際のヘリコプタ・ロータの空力計算では、ホバリング時には半径位置 75% の値、前進飛行時には方位角 90 度または 180 度で 75% 半径位置での C の値で代表しても、結果には大きな変化はないことが確かめられている。またブレードのフラッピング運動やリード・ラグ運動を簡単に組み込むことができ、斜め風の中の飛行や突風のような乱れた大気の中をロータが進むような非定常な現象の計算やブレードの弾性変形も容易に組み込むことができる。これは、LMT による計算出力は場所および時間の関数として求められるという利点による³³⁻³⁵⁾

この理論は、従来の渦理論に比べて計算時間が短いこと、固定形螺旋渦系による渦理論と同程度の計算精度が得られること等利点が多い。いままでに、LMT はさまざまな非定常問題に適応されてきており、とくに複数のロータの干渉問題^{36, 37)} やロータの振動軽減に対する能動制御問題の検証用数値実験³⁸⁾ や巨人機の作る翼端渦中を通過するヘリコプタの動的応答のような非常に複雑な応答問題にも適用され³⁹⁾、その信頼性と有用性が実証されている。

7. 局所循環法 (LCM)⁴⁰⁾

東・那須は、従来の局所運動量理論を風車や船のスクリュー、プロペラのように軸流成分の大きい回転翼へ適用するために、LMT を基礎にして新たに局所循環法 (Local Circulation Method, LCM) を提案した⁴⁰⁾。局所運動量理論が、ヘリコプタ・ロータのように軸流の速度成分があまり大きくない場合のブレードに作用する力やトルクを推定するのに最適であるのに対して、LCM は風車、船のスクリュー、プロペラのようにアスペクト比が比較的小さくまた幾何学的には

大きい後退角や捩れ角があるような回転翼で、おもに軸流の速度成分が大きい場合の空気力推定に適している。

ヘリコプタ・ブレードのように、回転面に平行な速度成分が卓越したロータにとっては、翼根の近傍を除いてスパン方向の各翼素での合速度成分はほぼ一樣な方向から流れ込む (この合速度が流れ込む角度をインフロー・アングルと呼ぶ)。このため、後流渦も比較的小さいピッチでロータ後方に螺旋状に流されて行き、渦の強さも比較的弱い。したがって、第6節で説明したように、ブレードの翼素での取扱いは、おもにロータ回転面上で固定翼がシェア・フローの中で作動している状態に近かった。それに対して、スクリューやプロペラの場合には、スパン方向のインフロー・アングルが小さいという仮定がもはや成立しないことが多く、各翼素での運動量変化との釣合だけで翼素における力を決定するのは、プロペラのような“ハイ・ディスク・ローディング”で作動する回転翼に対しては不十分といえる。

以下にその概要を説明する。

まず任意のブレードを N 個の仮想の翼に分けそれぞれを片寄せ配置に置くことは上記の LMT と同じである。しかし次の点で従来の LMT と異なっている。仮想の各翼は 25% コード位置での束縛渦と翼後方にできる後流渦の組合せで構成される。実際はブレードが回転しているため翼端側と翼根側では翼端渦の流れ去る方向は異なるが (つまりインフロー・アングルが異なる)、ここでは各翼の中間点での方向に流れさると仮定する。これは、仮想の各翼がそれぞれ異なった方向の渦場を構成することを意味している。また後流渦のシートは三次元的にはロール・アップしながら螺旋状に後方に流れ去るのであるが、LCM では先の中間点の方向に後流渦を直線的に流し去ることで螺旋状の渦の構造を模擬する。そして各仮想翼は、ピッチ軸の方向に楕円分布の循環をもつと仮定する。実際の仮想翼の束縛渦の形は後退角などをもつため楕円分布をしていないが、ピッチ軸の方向に束縛渦を楕円分布にとることで計算上は大変効果的になるためである。もちろん、各翼素に働く揚力は Kutta-Joukowski の定理から求める。

この方法だと、渦理論の所でも説明したように摩擦抵抗などは求めることはできない。そこで LMT の場合と同様に各翼素での抵抗は二次元翼の実験データを用いる。すなわち、25% コード位置での誘導速度は後流渦の無限遠方での誘導速度の半分という仮定から求め、この結果を用いて各翼素での有効迎角を算定し実験データから摩擦抵抗を求めるわけである。回転面で

他のブレードが吹き下ろしていった誘導速度の扱いは、LMTのときとまったく同様である。

以上説明した LCM は、いわゆる揚力線理論の範囲を出ていない。そこで、スクリューなどの低アスペクト比翼の場合、固定翼において Weissinger が採用した⁴¹⁾のと同様に 75% のところにコントロール点を置いて、その点で流れが剥がれない条件を付加し“準三次元的”な扱いにしたのが“拡張された”局所循環法である。実際には、三次元効果を加味して次式でコントロール点を決める。

$$X_c = ca/4\pi$$

ここで、 c はコード長、 a は二次元揚力傾斜である。この拡張された LCM の計算手順は、先に説明したのと大筋では同様である。この拡張によって本方法は、ATP のような低アスペクト比をもち遷音速領域で回転するプロペラの空力性能を計算できる可能性を秘めたことになった。

この方法は、風車やスクリューの計算にまず応用され実験値との良い一致を見た^{42,43)}。また、遷音速領域で単一回転する ATP プロペラの空力性能を見積もる計算コードにも応用され、風洞実験⁴⁴⁾や揚力面理論⁴⁵⁾との比較においてもよい一致をみている⁴⁶⁾。さらに、同軸回転する ATP プロペラにも拡張された。その結果、精度の面において他の理論と比べて遜色なく、しかも非常に短い計算時間でプロペラの空力性能を見積もれることがわかった。かような利点を有していることから、遷音速領域で作動する新しいプロペラの空力設計には大変有効であるといえる^{47,48)}。

しかしながら、遷音速領域で問題となる衝撃波やチャークのように局所的に起き、かつ非常に複雑な流れに関しては厳密には解明できない。そのためには、次に述べる数値解法の手段によらねばならない。

8. 数値計算による直接解法

回転翼の分野では流れ場が非常に複雑であることや三次元性が強いこともあって、いままでに述べてきたようなさまざまな方法では流れを亜音速と仮定し適当にモデル化することにより性能計算や空力弾性の問題を扱ってきた。最近の技術の進歩は、回転翼機の飛行速度を遷音速領域まで向上させてきている。このことは、亜音速領域ではさほど問題にならなかった圧縮性や衝撃波等の遷音速領域で特有の現象を含むことを意味しており、翼面上や胴回りの局所的な流れの特質、および特徴を正確に掴むことが回転翼の場合にも要求されるようになってきた。

近年の計算機の発達は、上で述べた事情すなわち渦理論などで膨大な計算時間を要するという欠点を取り

除くまでになった。すでに固定翼機分野では、スーパー・コンピュータを駆使し、以下に述べる各方程式を解くことにより三次元翼回りや機体全体の回りの流れ場を直接解析する試みが盛んに行われている。これは、計算機だけではなく解法の進歩があって初めて可能になったことである。

しかし、ここでは紙面の関係からこれらの解法については詳しく述べる余裕はないので、三次元回転翼に限定した数値解析の概況だけにとどめる。また三次元回転翼の数値解法が、先に述べた固定翼における解法に大いに依存していることはいうまでもないが、ブレードが回転することによって生ずる遠心力とコリオリ力がその解析に含まなければならないことが固定翼と比べて大きな相違点である。

8.1 ポテンシャル方程式 亜音速領域でのいままでの解説は、すべてポテンシャル理論に基づいているといっても過言ではない。ここでは、ポテンシャル理論から発生した解析手法ではなく、方程式そのものを直接解く手法について述べる。

ポテンシャル方程式を直接解いている例は、固定翼の回りや翼胴回りの流れ場の解析に多い^{49,50)}。しかしながら、回転翼の分野ではロータ全体よりもブレード回りの流れについてのみ解くといった部分的な試みがなされている。Caradonna らはヘリコプタ・ブレードの回りの流れを微小擾乱ポテンシャルや完全ポテンシャルを解いて求めている⁵¹⁻⁵⁷⁾。これらの報告では、与えられた方位角の位置におけるブレード回りにグリッドをきり、計算はこの範囲でのみ行う。グリッドは、O 型が一般的である。ロータの後流渦の影響は、Landgrebe⁵⁸⁾や Kocurek⁵⁹⁾が実験的に求めた後流モデルを用いて境界条件に入れており、計算結果は実験データと比較されよい一致をみた。またロータの前進側では翼端マッハ数がロータの空力性能に及ぼす影響が非常に大きいことが指摘された。Arieli⁶⁰⁾らや Egolf⁶¹⁾等も同様な試みを行っている。プロペラ回りの解析では、Jou⁶²⁾や小早川⁶³⁾が微小擾乱ポテンシャル方程式を用いて遷音速プロペラの空力性能を計算している。前者が有限体積法、後者は差分法を使って解を求めている。

ポテンシャル理論が、渦や剥離の存在を無視しているためこれらの影響を考慮できないのに対して、次に説明するオイラー方程式ではより進んだ解析が可能となる。

8.2 オイラー方程式 オイラー方程式では粘性の効果が考慮できないため、対象となる物体の回りでの粘性摩擦力を計算できない。この摩擦抵抗を見積もろうとすれば、次のナビエ・ストークス方程式を解かね

ばならない。しかし、高速で計算可能なスーパー・コンピュータの能力をもってしても、設計に十分供するほどの短い計算時間でかつ計算精度の良い結果が得られるまでには、現在までのところ至っていない。したがって、粘性を考慮できないという欠点をもっているにしても、比較的短時間に精度よく計算可能なオイラー方程式による数値計算は、工学上大変魅力的である。Robertsらは、ホバリングをするヘリコプタ・ブレード回りの流れ場を有限体積法を用いて解いている⁶⁴⁾。計算では翼端渦とブレードとの干渉に重点が置かれた。また Caradonna ら⁶⁵⁾や Tung ら⁶⁶⁾は、差分法を用いて陰的解法により、同様な計算を行っている。

Bober らは、遷音速で飛行し単一回転する ATP プロペラ回りの流れ場を三次元オイラー方程式を用いて初めて解いた⁶⁷⁾。支配方程式は、円筒座標を用いてブレードに固定された座標系で記述され、Beam-Warming による陰的解法により定常解を得た。流れ場は軸対称と仮定し、計算空間は二枚のブレード間の流れに限定された。用いられた計算格子は、H 型を使用し側面の境界には周期境界条件を課している。計算結果は、実験結果に比べてパワー係数が大きめであった。これは、オイラー方程式を用いたために粘性の影響が無視されたのと、境界条件の扱いに原因があった。そのため回転面後方のスワールが大きく出てパワーを多く使う結果となった。その後、Barton と Yamamoto らは境界条件に修正を加えて実験結果と大変良い相関が得られるようになった^{68,69)}。フランスでは、ONERA が中心となって革新型プロペラの設計および製作が進められている。Bousquet は、Bober と同様にオイラー方程式を用いた計算コードで遷音速プロペラの性能計算を行った^{70,71)}。日本では、小早川らが Bober と同様の方法によりプロペラ回りの流れの場を解いている⁷²⁾。齊藤らは、直交座標系における流れの速度、密度、エネルギーをブレード上に固定された座標系において記述した三次元オイラー方程式を用いて、革新型プロペラ回りの流れの場を解いている⁷³⁾。解法は LU-ADI 法を用い、計算の高速化を図っている (第 8 図)。

いずれの結果も、実験値と比べて高めのパワー係数が得られた (第 9 図)。これは、粘性を無視している結果ブレード上の境界層の効果を正確に見積もっていないことに起因すると思われる。したがって、より正確さを増すためには、以下に述べるナビエ・ストークス方程式を用いた解法を用いる必要がある。

8.3 ナビエ・ストークス方程式 上記 8.2 で説明したとおり、オイラー方程式を用いて遷音速プロペラ

a) Spinner 1

b) Spinner 2

第 8 図 ATP プロペラのブレード面上の相対マッハ数の計算例⁷³⁾
(飛行マッハ数 0.8, ピッチ角 60.5 度, 前進率 3.06)

第 9 図 ATP プロペラのパワー係数の実験値と計算例の比較⁷³⁾

回りの流れ場を解いた例は多い。しかし、ナビエ・ストークス方程式を用いて三次元回転翼回り流れ場を厳

密に解いた例となるとほとんどないといってよい。

Yoonらは、プロペラをアクチュエータ・ディスクとしたモデルでプロペラ回りの流れにナビエ・ストークス方程式を用いて流れ場を計算しているが、個々のブレードの回りの流れについては何もわからない⁷⁴⁾。

ヘリコプタ・ロータに対しても事情はほとんど同じで、最近になって MacCroskey⁷⁵⁾や Holst⁷⁶⁾がヘリコプタ・ロータへの適応を始めたところである。

プロペラやヘリコプタ・ロータに対して、ジェット・エンジン内部の動翼回りの流れ場解析に三次元計算にナビエ・ストークス方程式を適用した計算例が見受けられるが、やはりここ数年間で発表されたケースが多い。これらは、解の収束性の問題から有限体積法を用いている場合⁷⁷⁾や近似的因数分解法を用いる場合⁷⁸⁾等がある。開放型のロータに比べて大きな相違点はロータの回りがダクトで囲まれていることであり、そのため翼端とダクトのクリアランスの取扱いが大変むずかしく、ナビエ・ストークス方程式を用いた解法ではこのクリアランスの所で発散する場合がしばしば起こる。オイラー方程式では、粘性を無視するためこのような問題は生じない。また粘性の影響を見積もる際に、いわゆる固定翼で用いられている Boldwin-Lomax の渦モデルや $k-\varepsilon$ モデルといった乱流モデルが適切かどうか、今後の数値計算の発展を待たねばならない。

いずれにしても、ナビエ・ストークス方程式を用いた三次元回転翼回りの直接解法は近年になって初めて行われるようになったため、実際の応用例と実験との比較検討や解法および渦モデル等の検証が今後の課題として残されている。

9. おわりに

回転翼の空気力学を歴史を追って解説したが、つねに固定翼で行われた理論を回転翼に応用するという手順を繰り返していることがわかる。これは航空機の歴史が固定翼機から始まったことからいっても当然であるが、主要な原因は回転翼の作る後流渦が三次元的に非常に複雑で、ブレードに作用する力は非定常性を有していることにある。いままでの回転翼の空気力学は、非定常空気力学との闘いであつたといったら言い過ぎであろうか。

上述のように、低速で飛行するプロペラ機の時代から近年の革新型ターボ・プロップ機のように遷音速領域で飛行するプロペラも今日出現しようとしている。それに応じて回転翼の空気力学は亜音速空気力学から遷音速空気力学まで要求されるようになってきた。亜音速領域での回転翼の空気力学では、すでに述べたよ

うに運動量理論から始まってポテンシャル理論に基づく翼素理論、渦理論と発達し局所運動量理論、局所循環法の出現をみた。遷音速領域での空気力学は、翼面上の衝撃波の問題や抵抗発散等の問題のためその数値的解法はすこぶる遅れていたが、最近になって数値計算の技術が発達し、また高速で計算できる計算機の出現によって初めて数値的に解かれるようになってきた。しかし、数値計算では細かいメッシュによって空間をきって流体の状態量を記述するため、現時点では計算機の容量の制限もあって、ロータを取り巻くすべての空間を対象とした数値計算は行われていない。計算機の容量はもはや時間の問題となってきた今日、計算上の問題点は後流渦の影響をいかに正確に記述し計算できるかにつきと思われる。今後の数値計算の発展を期待したいところである。

また上記以外の問題、すなわちストール、フラッター、振動、騒音、制御等の問題に対する空気力の役割は、すべて回転翼に作用する非定常空気力に起因するわけであるが、本稿ではおもに定常解を対象として、これらに関する解説は紙面の関係上割愛した。

最後に日本の回転翼関係の現状について思うことは、回転翼に従事する技術者の層が大変薄いことである。欧米では、ヘリコプタやターボ・プロップ機を製造していることもあって、この分野の技術者は日本に比べて圧倒的に多い。そして構造の分野のみならず空力の分野においても固定翼を専門とする技術者との相互交流が盛んである。ヘリコプタの数が固定翼機の総数を上回るわが国の現状において、回転翼に対する研究がよりいっそう行われることを望むのは、筆者一人だけであらうか。

本稿においては、筆者の専門とする分野に偏った記述が多いと思う。他の分野まで手が回らなかったのは筆者の勉強不足であり、また思い違いも多々あるかもしれない。ご批判、ご叱責下されば幸いに思う。最後に、本解説記事を書く機会を与えて下さった、航空宇宙技術研究所空気力学第一部遠藤浩部長に感謝の意を表します。

参考文献

- 1) Gatzen, B. S.: Turboprop Design Now and Future, ICAS Paper 82-452 (1982).
- 2) Johnson, W. R.: Helicopter Theory, Princeton University Press, Princeton, 1980.
- 3) Johnson, W. R.: Development of a Comprehensive Analysis for Rotorcraft-1, Rotor Model and Wake Analysis, Vertica, 5 (1981), pp. 99-129.
- 4) Johnson, W. R.: Development of a Comprehensive Analysis for Rotorcraft-11, Aircraft Model, Solution Proce-

- 5) Durand, W. F. ed.: *Aerodynamic Theory*, Dover Publications, New York, 1963.
- 6) Glauert, H.: *The Elements of Aerofoil and Airscrew Theory*, Cambridge University Press, London, 1946.
- 7) Gessow, A. and Myers, G. C., Jr.: *Aerodynamics of the Helicopter*, 6th ed. Frederick Ungar Publishing Co., New York, 1981.
- 8) Bramwell, A. R. S.: *Helicopter Dynamics*, Edward Arnold, London, 1976.
- 9) Kutta, W.: Auftriebskräfte in Strömenden Flüssigkeiten, *Illustr. Aeron. Mitt.*, 27 (1902), pp. 131-135.
- 10) Joukowski, N.: Über die Konturen der Tragflächen der Drachenflieger, *Z. Flug. Mot.*, 1 (1910), pp. 281-284.
- 11) Prandtl, L., Wieselsberger, C. and Betz, A. (eds.): *Ergebnisse der Aerodynamischen Versuchsanstalt zu Göttingen*, Vol. III, Vol. IV, Oldenbourg, Munich, 1935.
- 12) Munk, M. M.: Isoperimetrische Aufgaben aus der Theorie des Fluges, Dissertation, Göttingen, 1919, also NACA Rept. 191 (1924).
- 13) Munk, M. M.: The Minimum Induced Drag of Aerofoils, NACA Rept. 121 (1921).
- 14) Betz, A.: Schraubenpropeller mit geringstem Energieverlust, *Göttingen Nachrichten*, 1919, pp. 193.
- 15) Prandtl, L.: Tragflügeltheorie I u. II Mitt., *Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Kl.* (1919), pp. 107-137.
- 16) Goldstein, S.: On the Vortex Theory of Screw Propellers, *Proc. R. Soc. London*, 123 (1929), pp. 440-465.
- 17) 市川輝雄: 回転翼の線形理論 (I), 航技研報告 TR-68 (1964).
- 18) 市川輝雄: 回転翼の線形理論 (II), 航技研報告 TR-85 (1965).
- 19) 市川輝雄: 回転翼の線形理論 (III), 航技研報告 TR-100 (1966).
- 20) Dat, R.: The Lifting Surface Theory Applied to Fixed Wings and Propellers, ONERA TP No. 1298 (1973).
- 21) Runyan, H. L. and Tai, H.: Application of a Lifting Surface Theory for a Helicopter in Forward Flight, *Vertica*, 10 (1986), pp. 269-280.
- 22) Johnson, W. R.: Recent Developments in Rotary-Wing Aerodynamic Theory, *AIAA J.*, 24 (1986), pp. 1219-1244.
- 23) Kondo, K.: On the Potential-Theoretical Fundamentals of the Aerodynamics of Screw Propellers at High Speed, *J. of the Faculty of Engineering, University of Tokyo*, 25 (1957), pp. 1-39.
- 24) Hanson, D. B.: Compressible Helicoidal Surface Theory for Propeller Aerodynamics and Noise, *AIAA J.*, 21 (1983), pp. 881-889.
- 25) Hanson, D. B.: Noise of Counter-rotation Propellers, *AIAA-84-2305, J. Aircraft*, 22 (1985), pp. 609-617.
- 26) Hanson, D. B. and McColgan, C. J.: Noise of Counter-rotation Propellers with Nonsynchronous Rotors, *J. Aircraft*, 22 (1985), pp. 1097-1099.
- 27) Namba, M.: Lifting Surface Theory For a Rotating Subsonic or Transonic Blade Row, *Aeronautical Research Council Reports and Memoranda, R&M 3740*, Her Majesty's Stationery Office, London, 1974.
- 28) Namba, M.: Three-Dimensional Analysis of Blades Forces and Sound Generation for an Annular Cascade in Distorted Flows, *J. Sound and Vibration*, 50 (1977), pp. 479-508.
- 29) Sullivan, J. P.: The Effect of Blade Sweep on Propeller Performance, *AIAA-77-716* (1977).
- 30) Yuasa, H.: Application of the Vortex Lattice Method to the Three-Dimensional Theory of a Cavitating Propeller, *J. Soc. Naval Architects of Japan*, 156 (1984), pp. 69-81.
- 31) 河内啓二: 局所運動量理論とその回転翼への応用, 東京大学工学部博士論文, 1975.
- 32) Azuma, A. and Kawachi, K.: Local Momentum Theory and its Application to Rotary Wing, *AIAA* 75-865 (1975).
- 33) Azuma, A. and Kawachi, K.: Local Momentum Theory and its Application to Rotary Wing, *J. Aircraft*, 16 (1979), pp. 6-14.
- 34) 齊藤 茂: ヘリコプタの突風応答, 東京大学工学部博士論文, 1980.
- 35) Azuma, A. and Saito, S.: Study of Rotor Gust Response by Means of the Local Momentum Theory, *J. of American Helicopter Society*, Jan., 1982.
- 36) Azuma, A., Saito, S., Kawachi, K. and Karasudani, T.: Application of the Local Momentum Theory to the Aerodynamic Characteristics of Multi-Rotor Systems, *Vertica*, 3 (1979), pp. 131-144.
- 37) Saito, S. and Azuma, A.: A Numerical Approach to Co-Axial Rotor Aerodynamics, *Vertica*, 6 (1982), pp. 253-266.
- 38) Saito, S.: A Study of Helicopter Gust Response Alleviation by Automatic Control, *NASA TM85870*, Nov. (1983).
- 39) Azuma, A., Saito, S. and Kawachi, K.: Response of a Helicopter Penetrating the Tip Vortices of a Large Airplane, *Vertica*, 11 (1987), pp. 65-76.
- 40) 那須謙一: A Method of Computation for the Blade Loading of Rotary Wing, Doctoral Dissertation of the University of Tokyo, 1983.
- 41) Weissinger, J.: The Lift Distribution of Swept-Back Wings, *NASA TM1120* (1947).
- 42) Azuma, A., Nasu, K. and Hayashi, T.: An Extension of the Local Momentum Theory to Rotors Operating in a Twisted Flow Field, *Vertica*, 7 (1983), pp. 45-59.
- 43) Nasu, K. and Azuma, A.: An Experimental Verification of the Local Circulation Method For a Horizontal Axis Wind Turbine, The 18th Inter Society Energy Conversion Engineering Conference, Orlando, Florida, Aug. (1983), pp. 21-26.
- 44) Rohrbach, C. et al.: Evaluation of Wind Tunnel Performance Testings of an Advanced 45° Swept Eight-Bladed Propeller at Mach Numbers from 0.45 to 0.85, *NASA CR 3505* (1982).
- 45) Kobayakawa, M. and Onuma, H.: Propeller Aerodynamic Performance by Vortex-Lattice Method, *J. Aircraft*, 22 (1985), pp. 649-654.
- 46) 日本航空宇宙工業会: 高速ターボプロップ (ATP) 機技術調査報告書, 1984.
- 47) Nasu, K., Saito, S., Kobayashi, H. and Nakamura, Y.: Extension of Local Circulation Method To Counter Rotation Propeller, *SAE* 87-1891.
- 48) Saito, S., Kobayashi, H., Nasu, K. and Nakamura, Y.: Performance Calculation of Counter Rotation Propeller, *SAE* 87-1889.
- 49) Isogai, K. and Suetsugu, K.: Numerical Calculation of Unsteady Transonic Potential Flow over Three-dimensional Wings with Oscillating Control Surfaces, *AIAA J.*, 22 (1984), pp. 478-485.
- 50) 石黒登美子: 遷音速翼まわり完全ポテンシャル流の数値解析, *NAL TR-731* (1982).

- 51) Caradonna, F. X. and Isom, M.: Subsonic and Transonic Potential Flow over Helicopter Rotor Blade, AIAA J., 10 (1972), pp. 1606-1612.
- 52) Caradonna, F. X. and Isom, M.: Numerical Calculation of Unsteady Transonic Potential Flow over Helicopter Rotor Blades, AIAA J., 14 (1976), pp. 482-488.
- 53) Caradonna, F. X. and Philippe, J. J.: The Flow over a Helicopter Blade Tip in the Transonic Regime, Vertica, 2 (1978), pp. 43-60.
- 54) Caradonna, F. X. and Tung, C.: Experimental and Analytical Studies of a Model Helicopter Rotor in Hover, Vertica, 5 (1981), pp. 149-161.
- 55) Caradonna, F. X., Tung, C. and Desopper, A.: Finite Difference Modeling of Rotor Flows Including Wake Effects, J. of American Helicopter Soc., 29 (1984), pp. 26-33.
- 56) Strawn, R. and Caradonna, F. X.: Conservative Full-Potential Model for Unsteady Transonic Rotor Flows, AIAA J., 25 (1987), pp. 193-198.
- 57) Tung, C., Caradonna, F. X. and Johnson, W. R.: The Prediction of Transonic Flows on an Advancing Rotor, J. of American Helicopter Soc., 31 (1986), pp. 4-9.
- 58) Landgrebe, A. J.: The Wake Geometry of a Hovering Helicopter Rotor and its Influence on Rotor Performance, J. American Helicopter Soc., 17 (1972), pp. 3-15.
- 59) Kocurek, J. D. and Tangler, J. L.: A Prescribed Wake Lifting Surface Hover Performance Analysis, J. of American Helicopter Soc., 22 (1977), pp. 24-35.
- 60) Arieli, R., Tauber, M. E., Saunders, D. A. and Caughey, D. A.: Computation of Transonic Flow about Helicopter Rotor Blades, AIAA J., 24 (1986), pp. 722-727.
- 61) Egolf, T. A. and Sparks, S. P.: A Full Potential Rotor Analysis with Wake Influence Using an Inner-Outer Domain Technique, Proceedings of the 42nd Annual Forum of the American Helicopter Society, June, 1986.
- 62) Jou, W. H.: Finite Volume Calculation of the Three-Dimensional Potential Flow Around a Propeller, AIAA J., 21 (1983), pp. 1360-1364.
- 63) Kobayakawa, M., Onuma, H. and Shiota, Y.: Calculations of High Speed Propeller Performance Using Finite Difference Methods, ICAS-86-3.10.3.
- 64) Roberts, T. W. and Murman, E. M.: Euler Solution for the Flow Around a Hovering Helicopter Rotor, AIAA-86-1784 (1986).
- 65) Caradonna, F. X. and Tung, C.: A Review of Current Finite Difference Rotor Flow Methods, Proceedings of the 42nd Annual Forum of the American Helicopter Society, 1986.
- 66) Chang, I. C. and Tung, C.: Euler Solution of the Transonic Flow for a Helicopter Rotor, AIAA 87-0523 (1987).
- 67) Bober, L. J., Chaussee, D. S. and Katler, P.: Prediction of High Speed Propeller Flow Field Using a Three-Dimensional Euler Analysis, NASA TM 83065; AIAA-83-0188.
- 68) Barton, J. M., Yamamoto, O. and Bober, L. J.: Inviscid Analysis of Advanced Turboprop Propeller Flow Field, AIAA-85-1263.
- 69) Yamamoto, O., Barton, J. M. and Bober, L. J.: Improved Euler Analysis of Advanced Turboprop Propeller Flows, AIAA-86-1521.
- 70) Bousquet, J. M.: Aerodynamic Method Used in France for Designing Advanced High-Speed Propellers, ONERA No. 1985-1.
- 71) Bousquet, J. M.: Theoretical and Experimental Analysis of Highspeed Propeller Aerodynamics, ONERA T. P. No. 1986-64; AIAA-86-1549.
- 72) Kobayakawa, M., Onuma, H. and Shiota, Y.: Calculations of High Speed Propeller Performances Using Finite Difference Methods, ICAS-86-3.10.3, 1986.
- 73) Saito, S., Kobayashi, H., Wada, Y. and Matsuo, Y.: Numerical Approach of Advanced Turboprop with Three-Dimensional Euler Equations, Presentation only.
- 74) Yoon, S. J. and Schetz, J. A.: Numerical Navier-Stokes Solutions of High Speed Propeller Flows, AIAA-86-1538.
- 75) MacCroskey, W. J. and Baeder, J. D.: Some Recent Advances in Computational Aerodynamics for Helicopter Applications, International Symposium on Computational Fluid Dynamics, Tokyo, Sept. 9-12, 1985.
- 76) Hoslt, T. L.: Numerical Solution of the Navier-Stokes Equations with Emphasis on Rotorcraft Applications, Proceedings of National Specialists' Meeting on Aerodynamics and Aeroacoustics, Texas, Feb. 25-27, 1987.
- 77) Hah, C.: A Numerical Modeling of Endwall and Tip-Clearance Flow of an Isolated Compressor Rotor, J. of Engineering for Gas Turbines and Power, 108 (1986), pp. 15-21.
- 78) Dawes, W. N.: A Numerical Method for the Analysis of 3D Viscous Compressible Flow in Turbine Cascades; Application to Secondary Flow Development in a Cascade With and Without Dihedral, ASME 86-GT-145 (1986).