ストラップダウン型慣性航法装置のソフトウェア^{*1}片岡健一郎^{*2}・江口弘文^{*2}

Key Words: Inertial Navigation System, Strapdown, Quaternion

1. ま え が き

近年、航空機搭載用の慣性航法装置¹⁾としてストラップダウン (strapdown) 型²⁾のものが目覚ましい進歩を遂げている。このストラップダウン型という言葉は、飛行運動物体中にステイブルプラットフォーム (stable platform) を形成し局所水平座標系などのもとで加速度を計測していた従来のプラットフォーム型に対応する言葉であり、この方式が現実になんてきた理由としては、まず第一に最近の急速な航空機搭載用マイクロプロセッサの発展が考えられる。このことは、プラットフォーム型慣性航法装置の性能が基本的には、ステイブルプラットフォームというサーボメカニズム (servomechanism) の精度に拘束されるのに対し、ストラップダウン型の場合には姿勢演算アルゴリズムに代表される一連のソフトウェアによって性能が左右されることを考えればよく理解できる。また第二

の要因としては、リングレーザジャイロに代表されるような高入力回転角速度が計測可能で、デジタル信号処理に好都合な出力信号形態を有する高精度のレート積分ジャイロが実用化の段階に入ったことがあげられる。これらのデジタル信号処理にかかわるハードウェアの実用化に伴い、超高精度が要求される特殊な場合を除けば、慣性航法装置としてストラップダウン型のものが主流になりつつある。

ストラップダウン型慣性航法装置のハードウェア構成は、制御装置、表示装置などの付属的な装置を除けば、慣性検出部と慣性計算機とに大別される。慣性検出部は基本的には3個のジャイロと3個の加速度計により構成されるものであるが、最近ではシステムとしての信頼度向上という立場からスキュー (skew) 軸構成と呼ばれる冗長性をもたせたシステムが考案されており、さらにこの冗長性は慣性計算機についても考慮されている。

次にソフトウェア構成は、(1) 入出力管理ソフトウェア、(2) アラインメントアルゴリズム、(3) センサデータ補正アルゴリズム、(4) 姿勢計算アルゴリズム、(5) 航法計算アルゴリズム、(6) 冗長管理アルゴリズム等に大別することができる。これらのうち(1)、(3)および(6)は現実にはハードウェアを構成する場合に発生する問題である。したがってこのようなソフトウェアの中こそ、慣性航法装置を製作する各社独自の技術が集約されていると考えられる分野であり、一般的な取扱いはむずかしい。また、(2)については、近年とくに初期アラインメント時間の短縮という現実面からの要求が強く、カルマンフィルターを応用したアラインメント技法が盛んに試みられているが、その内容については本文ではとくに触れていない。ここではストラップダウン型慣性航法装置のソフトウェアで中核をなす姿勢計算アルゴリズムおよび航法計算アルゴリズムに焦点を絞って解説する。

姿勢計算アルゴリズムについては、クォータニオン (quaternion) を用いた場合の方式について述べ、とくにサンプリングを行ったために発生する誤差を補正するコーニング (coning) 補正と呼ばれる計算手法の

著 者 紹 介

片岡健一郎 (正会員)

昭和31年生。昭和55年東京大学理学部数学科卒業。昭和57年東京工業大学大学院システム科学科修士課程修了。同年防衛庁技術研究本部第3研究所入所。現在に至る。飛しよう体のシミュレーション、航空機の慣性航法装置等の研究に従事。計測自動制御学会会員。

江口 弘文 (正会員)

昭和19年生。昭和42年九州工業大学工学部制御工学科卒業。同年防衛庁技術研究本部第3研究所入所。現在に至る。飛しよう体の誘導、制御、実時間ハイブリッドシミュレーション等の研究に従事。計測自動制御学会、AIAA 会員。

^{*1} 昭和60年10月21日、第23回飛行機シンポジウムにて講演。昭和62年2月28日原稿受理 Software for Strapdown Inertial Navigation System

^{*2} 防衛庁技術研究本部第3研究所 Kenichiro KATAOKA and Hirofumi EGUCHI

第1図 ソフトウェア構成

一方法について詳説する。

航法計算アルゴリズムについては、ノーススレーブ (north slaved) 方式の場合につき、航法方程式の積分方法について述べる。とくにサンプリングのために発生する誤差を補正するスカラー補正 (sculling) 補正と呼ばれる加速度計出力の処理手法の一方法について詳説する。

2. 姿勢計算

プラットフォーム型慣性航法装置では、局所水平座標系に対する機体座標系の姿勢をステイブルプラットフォームを使って機械的に表現しているのに対して、ストラップダウン型慣性航法装置では、オイラー角、直交行列またはクォータニオンの形で姿勢が記憶され、ジャイロから得られる回転角速度のデータなどに基づいて通常数百ヘルツのサンプルレートで更新される。

オイラー角による方法は直観的にその物理的意味を把握するのは容易であるが、姿勢計算に用いられるオイラー角と入力角速度の関係を表す微分方程式の係数行列が、あるオイラー角で正則行列でなくなることがあり、その際に以後の計算が不能となる。したがって種々の姿勢をとりうる航空機用慣性航法装置の姿勢計算に使うには不適當である。

直交行列およびクォータニオンによる方法は直観的にその物理的意味を理解するのはむずかしいものの理論的および計算上の取扱いが容易であるために慣性装置で運動体の姿勢を表現するのにしばしば用いられる。計算速度、精度の点で両者の間にはそう大きな違いはなく、どちらを用いて計算するかはソフトウェア

の設計を担当する技術者の判断にまかされている。

本文ではクォータニオンによる姿勢計算法について述べる。クォータニオンによる方法は実際には、クォータニオンによる直交行列の表現方法であり、直交行列を媒介として運動体の姿勢が間接的に表現される。2.1節においてクォータニオンと密接な関係にある直交行列による姿勢表現方法について述べる。2.2節ではクォータニオンを定義し、直交行列との間を示す。2.3節において運動体に付加される回転角速度 p, q, r を入力とする直交行列およびクォータニオンの満足する微分方程式を示す。実際のストラップダウン型慣性航法装置のソフトウェアアルゴリズムにおいては、この微分方程式を単に数値積分するのではなく、デジタル計算により適合した関係式を用いて姿勢が計算される。その一方法を2.4節に示す。

2.1 直交行列による姿勢の表現 (I_i, J_i, K_i) を地球の中心を原点とする慣性座標系、 (I_G, J_G, K_G) を地理座標系つまり運動体の現在位置を原点とし I_G を北方向、 J_G を東方向、 K_G を鉛直下方向を指す単位ベクトルとする。また (I_B, J_B, K_B) を機体に固定した機体座標系とする。通常 I_B は機体の前方向、 J_B は右方向、 K_B は下方向を指す単位ベクトルである。機体の姿勢を求めるとことは (I_i, J_i, K_i) もしくは (I_G, J_G, K_G) と (I_B, J_B, K_B) の関係を求めることにほかならない。 I_B, J_B, K_B のおのおのは、 I_G, J_G, K_G の線形結合により次のように表される。

$$\begin{aligned} I_B &= a_{11}I_G + a_{12}J_G + a_{13}K_G \\ J_B &= a_{21}I_G + a_{22}J_G + a_{23}K_G \\ K_B &= a_{31}I_G + a_{32}J_G + a_{33}K_G \end{aligned} \quad (1)$$

これを行列の記号を用いて表すと

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}_B \\ \mathbf{J}_B \\ \mathbf{K}_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_G \\ \mathbf{J}_G \\ \mathbf{K}_G \end{bmatrix} \quad (2)$$

この行列 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ は、 $\mathbf{I}_B, \mathbf{J}_B, \mathbf{K}_B$ のノルム

が1で、互いの内積が0であることより、

$$\sum_{j=1}^3 a_{ij}^2 = 1 \quad i=1, 2, 3 \quad (3)$$

$$\sum_{j=1}^3 a_{ij} a_{kj} = 0 \quad i, k=1, 2, 3, i \neq k$$

また $(\mathbf{I}_B, \mathbf{J}_B, \mathbf{K}_B), (\mathbf{I}_G, \mathbf{J}_G, \mathbf{K}_G)$ がともに右手系であることにより

$$\det \mathbf{A} = 1 \quad (4)$$

条件(3), (4)を満たす3行3列の行列 $\mathbf{A} = (a_{ij})$ を3次の直交行列という(正確には行列式が1の直交行列)。3次の直交行列の全体を $SO(3)$ で表す。

以上のことから運動体の姿勢を表現する行列 $\mathbf{A}$ は直交行列であることが示された。この直交行列 $\mathbf{A}$ はたとえば(2)式で示したように9個のパラメータを用いて表現することもできるが(方向余弦法)、クォータニオンと呼ばれる4個の数を用いて表現することもできることが知られている。

2.2 クォータニオンによる直交行列の表現 クォータニオンは19世紀半ばに複素数の拡張として導入された。複素数が $a+bi$ (a, b は実数) の形で表現され、 $i^2 = -1$ ととり決めることにより四則演算が定義されるのに対して、クォータニオンは $C_0 + C_1 i + C_2 j$

$+ C_3 k$ (C_0, C_1, C_2, C_3 は実数でクォータニオンパラメータと呼ばれる) の形で表現され、 i, j, k の間の乗法を次のようにとり決めることにより、四則演算が自然に定義される。

$$\begin{aligned} i \circ i &= j \circ j = k \circ k = -1 \\ i \circ j &= -j \circ i = k, \quad j \circ k = -k \circ j = i \\ k \circ i &= -i \circ k = j \end{aligned} \quad (5)$$

(ただし、 $\circ$ は二つのクォータニオンの間の乗法を表す) クォータニオンにおいては乗法の結合法則は成立するものの乗法の交換法則はもはや成り立たない。

クォータニオン $\alpha = C_0 + C_1 i + C_2 j + C_3 k$ に対してその絶対値 $\|\alpha\|$ を次のように定義する。

$$\|\alpha\| = \sqrt{C_0^2 + C_1^2 + C_2^2 + C_3^2} \quad (6)$$

運動体の姿勢を計算する際にとくに有用なのは絶対値が1のクォータニオンである。絶対値が1のクォータニオンの全体を $Sp(1)$ で表す。

運動体の姿勢を表現する直交行列の全体 $SO(3)$ と $Sp(1)$ の間には1対2の対応関係がある。つまり一つの直交行列に対して、それに対応するクォータニオンが二つある。しかしアラインメント時における直交行列に対応する二つのクォータニオンのうち一つを指定すれば、実質的には $SO(3)$ と $Sp(2)$ の対応は1対1になる。この $SO(3)$ と $Sp(1)$ の関係は数学的には次の写像により厳密に定義される。

$$X: Sp(1) \rightarrow SO(3) \quad (7)$$

$$\alpha = C_0 + C_1 i + C_2 j + C_3 k \in Sp(1)$$

とすると

$$X(\alpha) = \begin{bmatrix} C_0^2 + C_1^2 - C_2^2 - C_3^2 & 2(C_1 C_2 + C_0 C_3) & 2(C_1 C_3 - C_0 C_2) \\ 2(C_1 C_2 - C_3 C_0) & C_0^2 - C_1^2 + C_2^2 - C_3^2 & 2(C_2 C_3 + C_0 C_1) \\ 2(C_1 C_3 + C_0 C_2) & 2(C_2 C_3 - C_0 C_1) & C_0^2 - C_1^2 - C_2^2 + C_3^2 \end{bmatrix}$$

この写像は以下のような性質をもつ。

1) $\alpha, \beta \in Sp(1)$ とするとき $X(\alpha \circ \beta) = X(\beta)X(\alpha)$

つまり直交行列とクォータニオンで積の順序が逆になる。

2) 任意の直交行列 $\mathbf{Q} \in SO(3)$ に対して、ある二つの異なるクォータニオン $\alpha, \beta \in Sp(1)$, $\alpha \neq \beta$ があつ

て $X(\alpha) = X(\beta) = \mathbf{Q}$ 。しかしながら α, β 以外のクォータニオンで $\mathbf{Q}$ に写像されるものはない。

2.3 直交行列およびクォータニオンの満たすダイナミックスについて 運動体の姿勢を表現する直交行列 $\mathbf{A}$ は時間とともに変化するが、その様子は運動体の回転角速度 p, q, r を入力する次の微分方程式により記述される。

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & r & -q \\ -r & 0 & p \\ q & -p & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad (8)$$

直交行列 $\mathbf{A}$ に対応するクォータニオンを $\alpha = C_0 + C_1 i + C_2 j + C_3 k$ とすると α は次の微分方程式を満たす。

$$\frac{d}{dt} \alpha = \frac{1}{2} \alpha \circ \omega \quad (9)$$

ここで

$$\frac{d}{dt} \alpha = \dot{C}_0 + \dot{C}_1 i + \dot{C}_2 j + \dot{C}_3 k$$

$$\omega = p i + q j + r k$$

である。

実際のストラップダウン型慣性航法システムのソフトウェアアルゴリズムでは、直接に微分方程式(8)または(9)を数値的に積分するのではなく、しばしばレート積分ジャイロであるリングレーザジャイロのパルス出力およびデジタルコンピュータの数値処理により適合したアルゴリズムを用いて運動体の姿勢が計算されることが多い。次節ではクォータニオンを用いた場合についてデジタル計算に適した姿勢計算のアルゴリズムについて述べる。

2.4 クォータニオン計算のアルゴリズム 本節では一定の時間 Δt ごとに運動体の姿勢、つまり機体座標系 (I_B, J_B, K_B) の局所水平座標系 (I_G, J_G, K_G) に対する相対的な姿勢を算出する方法について述べる。ここで座標系 (I_2, J_2, K_2) の (I_1, J_1, K_1) に対する相対的な姿勢を表すクォータニオンが ρ であるとき、これを図式的に次のように表す。

$$(I_1, J_1, K_1) \xrightarrow{\rho} (I_2, J_2, K_2) \quad (10)$$

この図式を用いてクォータニオン $\rho(0), \rho(t_0), \rho(t_0 + \Delta t), \rho_G(t_0), \rho_G(t_0 + \Delta t), \rho_B(t_0), \rho_B(t_0 + \Delta t)$ を第2図により定義する。第2図において $(I_G(0), J_G(0), K_G(0)), (I_G(t_0), J_G(t_0), K_G(t_0)), (I_G(t_0 + \Delta t), J_G(t_0 + \Delta t), K_G(t_0 + \Delta t))$ はそれぞれ時刻 $t=0, t_0, t_0 + \Delta t$ における局所水平座標を表す。また $(I_B(0), J_B(0), K_B(0)), (I_B(t_0), J_B(t_0), K_B(t_0)), (I_B(t_0 + \Delta t), J_B(t_0 + \Delta t), K_B(t_0 + \Delta t))$ はそれぞれ時刻 $t=0, t_0, t_0 + \Delta t$ における機体座標系を表す。 $\rho(0)$ はアラインメントにより計算され、アラインメントが完了した時点での運動体の姿勢を表す。 $\rho(t_0)$ は時刻 t_0 における運動体の姿勢を表す。 t_0 は Δt の整数倍になる。 $\rho(t_0)$ がわかっていれば Δt 後のクォータニオンは次の関係式により求められる。

$$\begin{aligned} \rho(t_0 + \Delta t) &= q_G^*(t_0; \Delta t) \circ \rho_G^*(t_0) \circ \rho(0) \\ &\quad \circ \rho_B(t_0) \circ q_B(t_0; \Delta t) \\ &= q_G^*(t_0; \Delta t) \circ \rho(t_0) \circ q_B(t_0; \Delta t) \quad (11) \end{aligned}$$

ここでクォータニオン ρ に対して ρ^* は ρ の逆数を表す。つまり $\rho^* = 1/\rho$

第2図 座標系とクォータニオンの関係図

$q_G(t_0; \Delta t)$ は運動体のトランスポートレート (transport rate) および地球の自転レートにより、また $q_B(t_0; \Delta t)$ はジャイロの出力により計算される。これらの計算は次のオイラーの定理に基づく。

(定理) 二つの(右手系の)正規直交座標系 (I_1, J_1, K_1) と (I_2, J_2, K_2) があるとき (I_1, J_1, K_1) をある軸 E のまわりに θ だけ回転すると (I_2, J_2, K_2) に重ね合わせることができる。

この定理によれば、 $(I_B(t_0), J_B(t_0), K_B(t_0))$ はある軸 E のまわりに一定角度 $\Delta\theta$ だけ回転すると $(I_B(t_0 + \Delta t), J_B(t_0 + \Delta t), K_B(t_0 + \Delta t))$ に重ね合わせることができる。方向が E 方向で長さが $\Delta\theta$ のベクトルをこの回転に対応する回転ベクトルといい $\Delta\theta(t_0; \Delta t)$ で表す。 $\Delta\theta(t_0; \Delta t) = (\Delta\theta_1, \Delta\theta_2, \Delta\theta_3)$, $\Delta\theta = \sqrt{\Delta\theta_1^2 + \Delta\theta_2^2 + \Delta\theta_3^2}$ とするとき $q_B(t_0; \Delta t)$ は回転ベクトルを用いて次のように表される。

$$\begin{aligned} q_B(t_0; \Delta t) &= \cos \frac{\Delta\theta}{2} + \frac{1}{\Delta\theta} \sin \frac{\Delta\theta}{2} \{ \Delta\theta_1 i \\ &\quad + \Delta\theta_2 j + \Delta\theta_3 k \} \quad (12) \end{aligned}$$

$\Delta\theta$ は十分小さいので $q_B(t_0; \Delta t)$ は次のように書ける。

$$\begin{aligned} q_B(t_0; \Delta t) &= \left\{ 1 - \theta_0^2 + \frac{1}{6} \theta_0^4 \right\} \\ &\quad + \frac{1}{2} \left\{ 1 - \frac{1}{3} \theta_0^2 \right\} \{ \Delta\theta_1 i + \Delta\theta_2 j + \Delta\theta_3 k \} \quad (13) \end{aligned}$$

ただし

$$\theta_0 = \frac{\Delta\theta}{2\sqrt{2}}$$

同様に $q_G(t_0; \Delta t)$ に対応する回転ベクトルを

$$\Delta\theta(t_0; \Delta t) = (\Delta\epsilon_1, \Delta\epsilon_2, \Delta\epsilon_3)$$

とすると

$$\begin{aligned} q_G(t_0; \Delta t) &= \left\{ 1 - \frac{(\Delta\epsilon)^2}{8} \right\} \\ &\quad + \frac{1}{2} \{ \Delta\epsilon_1 i + \Delta\epsilon_2 j + \Delta\epsilon_3 k \} \quad (14) \end{aligned}$$

ただし

$$\Delta\epsilon = \sqrt{\Delta\epsilon_1^2 + \Delta\epsilon_2^2 + \Delta\epsilon_3^2}$$

次に $q_B(t_0; \Delta t), q_G(t_0; \Delta t)$ の計算に用いた回転ベクトル $\Delta\theta(t_0; \Delta t), \Delta\theta(t_0; \Delta t)$ の算出法について述べる。機体角速度ベクトルを $\omega_B = p I_B + q J_B + r K_B$ と

するとき、回転ベクトル $\Delta\theta(t_0; \Delta t) = \Delta\theta$

と ω_B との間には次の関係式が成立する。

$$\begin{aligned} \frac{d}{dh} (\Delta\theta) &= \omega_B + \frac{1}{2} (\Delta\theta \times \omega_B) \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n \theta^{2n-2}}{(2n)!} \{ \Delta\theta \times (\Delta\theta \times \omega_B) \} \quad (15) \end{aligned}$$

ただし, $\theta = \|\Delta\theta\| < 2\pi$, B_n は n 次のベルヌーイ数, $\times$ はベクトル積である.

Δt が十分小さいときには第3項以下は無視して次の近似式が成立する.

$$\frac{d}{dh}\{\Delta\theta(t_0; h)\} = \omega_B + \frac{1}{2}\{\Delta\theta \times \omega_B\} \quad (16)$$

一方, 時刻 t_0 から $t_0 + \Delta t$ の間のレート積分ジャイロの出力がたとえば次のように δ_1, δ_2 の形で得られたとしよう.

$$\delta(t_0; h) = \left(\int_{t_0}^{t_0+h} p(\tau) d\tau, \int_{t_0}^{t_0+h} q(\tau) d\tau, \int_{t_0}^{t_0+h} r(\tau) d\tau \right) \quad (17)$$

$$\delta_1 = \delta(t_0; \Delta t/2), \delta_1 + \delta_2 = \delta(t_0; \Delta t)$$

ここで $\delta(t_0; h)$ が $\delta(t_0; 0) = 0$ をみたとす2次多項式で近似できると仮定すれば次の式により $\Delta\theta(t_0; \Delta t)$ が計算される.

$$\Delta\theta(t_0; \Delta t) = \delta_1 + \delta_2 + \frac{2}{3}(\delta_1 \times \delta_2) \quad (18)$$

ここで $\times$ はベクトル積を表す.

$\Delta\theta(t_0; \Delta t) = (\Delta\epsilon_1, \Delta\epsilon_2, \Delta\epsilon_3)$ も次の近似式により同様に求められる.

$$\frac{d}{dh}\{\Delta\theta\} = \omega_G \quad (19)$$

ただし ω_G は (I_G, J_G, K_G) の変動を示す角速度ベクトルで $\dot{I}_G = \omega_G \times I_G, \dot{J}_G = \omega_G \times J_G, \dot{K}_G = \omega_G \times K_G$ をみとす. ω_S を地球の自転角速度, R を地球中心から運動体までの距離, V_N, V_E, V_D をそれぞれ北, 東, 鉛直下方向の対地速度, λ, ϕ をそれぞれ運動体の緯度, 経度とすると,

$$\begin{aligned} \Delta\epsilon_1 &= (\omega_S \cos \lambda + V_E/R) \Delta t \\ \Delta\epsilon_2 &= (-V_N/R) \Delta t \\ \Delta\epsilon_3 &= -\{\omega_S \sin \lambda + (V_E/R) \tan \lambda\} \Delta t \end{aligned} \quad (20)$$

により $\Delta\theta(t_0; \Delta t)$ が求められる.

3. 航 法 計 算

航法計算では, 航法座標系をどう選択するかにより解くべき微分方程式の形が違ってくる. 本解説ではおのおのの航法座標系の利害得失については参考文献2)に譲り, ノーススレープ方式を用いた場合の航法方程式について簡単に概説した後, ストラップダウン型慣性航法装置の場合に特有な, 機体に固定された加速度計より出力される速度増分およびレート積分ジャイロの出力から, 局所水平座標系より見た運動体の速度増分を計算する方法について述べる. プラットフォーム型慣性航法装置においては, 加速度計の入力軸が選択された航法座標系の座標軸と常に一致するようにプラットフォームが制御されるため, 加速度計の出力を

たんに積分するだけで, 航法座標系より見た運動体の速度増分が求められる.

航法座標系としてノーススレープ方式を用いた場合航法計算は次の微分方程式に基づいて計算される.

$$\begin{aligned} \dot{V}_N I_G + \dot{V}_E J_G + \dot{V}_D K_G \\ = F + g - (2\omega_e + \omega_v) \times V_E \end{aligned} \quad (21)$$

ただし F は加速度計が検出する機体加速度, g は重力加速度, ω_e は地球自転角速度, ω_v は運動体のトランスポートレート, また $V_E = V_N I_G + V_E J_G + V_D K_G$ である. 航法計算の目的は航法方程式を積分して V_N, V_E, V_D を求め関係式 $\lambda = V_N/R, \phi = V_E/(R \cos \lambda), \dot{R} = -V_D$ および高度計の出力を処理して運動体の緯度 (λ), 経度 (ϕ), 地球中心からの距離 (R) を時々刻々求めることにある. そのためには, $F = f_N I_G + f_E J_G + f_D K_G = \eta_x I_B + \eta_y J_B + \eta_z K_B$ とおくと次の値を求める必要がある.

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} f d\tau &= \left(\int_{t_0}^{t_0+\Delta t} f_N d\tau, \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} f_E d\tau, \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} f_D d\tau \right) \end{aligned} \quad (22)$$

しかし実際の加速度計の出力は次の形で得られる.

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} \eta d\tau &= \left(\int_{t_0}^{t_0+\Delta t} \eta_x d\tau, \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} \eta_y d\tau, \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} \eta_z d\tau \right) \end{aligned} \quad (23)$$

時刻 t における機体座標系と局所水平座標系の変換行列を $C(t)$ とする. つまり

$$\begin{bmatrix} I_G(t) \\ J_G(t) \\ K_G(t) \end{bmatrix} = C(t) \begin{bmatrix} I_B(t) \\ J_B(t) \\ K_B(t) \end{bmatrix} \quad (24)$$

この $C(t)$ を使うと $f(t) = C(t)\eta(t)$ であるが(22)式は(23)式にある変換行列をかけるという形で表すことはできない.

(22)式を求めるかわりに, これを $\xi(t_0; \Delta t)$ とおき Δt の2次多項式で近似する. つまり

$$\begin{aligned} \xi(t_0; \Delta t) &= \xi(t_0; 0) + (\Delta t) \dot{\xi}(t_0; 0) \\ &\quad + \frac{1}{2}(\Delta t)^2 \ddot{\xi}(t_0; 0) \end{aligned} \quad (25)$$

$\xi(t_0; 0) = 0$ は明らかである. また $\dot{\xi}(t_0; 0) = f(t_0) = C(t_0)\eta(t_0)$. $\ddot{\xi}(t_0; 0)$ については

$$\ddot{\xi}(t_0; 0) = \dot{f}(t_0) = \dot{C}(t_0)\eta(t_0) + C(t_0)\dot{\eta}(t_0) \quad (26)$$

ここで $C(t)$ は次の微分方程式を満たす.

$$\dot{C}(t) = Q_G(t)C(t) + C(t)Q_B^T(t) \quad (27)$$

ただし T は行列の転置を表す. また

$$Q_B(t) = \begin{bmatrix} 0 & r & -q \\ -r & 0 & p \\ g & -p & 0 \end{bmatrix},$$

$$Q_G(t) = \begin{bmatrix} 0 & r_G & -q_G \\ -r_G & 0 & p_G \\ q_G & -p_G & 0 \end{bmatrix}$$

$$p_G = (\omega_s + \phi) \cos \lambda, q_G = -\lambda$$

$$r_G = -(\omega_s + \phi) \sin \lambda$$

したがって

$$\begin{aligned} \dot{\xi}(t_0; 0) = & \{Q_G(t_0)C(t_0) + C(t_0)Q_B^T(t_0)\}\eta(t_0) \\ & + C(t_0)\dot{\eta}(t_0) \end{aligned} \quad (28)$$

以上の結果をまとめると

$$\begin{aligned} \xi(t_0; 0) = & (\Delta t)C(t_0)\eta(t_0) \\ & + \frac{1}{2}(\Delta t)^2\{Q_G(t_0)C(t_0)\eta(t_0) \\ & + C(t_0)Q_B^T(t_0)\eta(t_0) + C(t_0)\dot{\eta}(t_0)\} \end{aligned} \quad (29)$$

(29)式において第2項以下は、いわば補正項であり、精密な値が必要な場合に有効と思われる。

さて(29)式の値を求めるには $C(t_0)$, $Q_B(t_0)$, $Q_G(t_0)$, $\eta(t_0)$, $\dot{\eta}(t_0)$ の値が必要である。 $C(t_0)$ については姿勢計算の結果から計算される。 $Q_B(t_0)$ は(17)式で述べたレート積分ジャイロの出力 δ_1, δ_2 より計算され、 $Q_G(t_0)$ は p_G, q_G, r_G より求められる。 $\eta(t_0)$, $\dot{\eta}(t_0)$ については次に述べる方法により計算する。

時刻 t_0 から $t_0 + \Delta t$ の間の加速度計の出力がたとえば次のように A_1, A_2 の形で得られたとしよう。

$$A(t_0; h) = \int_{t_0}^{t_0+h} \eta \tau d\tau \quad (30)$$

$$A_1 = A(t_0; \Delta t/2), A_1 + A_2 = A(t_0; \Delta t)$$

ここで $A(t_0; h)$ が $A(t_0; 0) = 0$ を満たす h の2次多項式で近似できると仮定すれば、 $\eta(t_0)$, $\dot{\eta}(t_0)$ は次のように書ける。

$$\eta(t_0) = \frac{3A_1 - A_2}{\Delta t}, \dot{\eta}(t_0) = \frac{4(A_2 - A_1)}{(\Delta t)^2} \quad (31)$$

4. あとがき

本報告では、ストラップダウン型慣性航法装置のソフトウェアのうち姿勢計算と航法計算(ノーススレーブ方式)のアルゴリズムをデジタルプロセッシングに適合した形で述べた。2.4節で述べたコーニング補正の方法は文献3)を参考にした。3節で述べたスカリング補正の方法はわれわれが考案したアルゴリズムであるが、その実用的な効果については今後シミュレーション等により検討していかなければならない。

本研究を行うにあたり、終始ご指導をいただいた防衛庁技術研究本部穂坂三四郎氏に深謝します。

参考文献

- 1) 特集 航空機の慣性航法装置, 日本航空宇宙学会誌, 31 (1983), pp. 275-315.
- 2) 中神浩一ほか: ストラップダウン型慣性装置について, 第1回宇宙航空の誘導制御シンポジウム資料, 1984.11, pp. 137-143.
- 3) Miller, R. B.: Strapdown Inertial Navigation Systems, AD-A112256 (1980.10).

一特 集一

音叉形振動ジャイロについて^{*1}

佐 藤 一 輝^{*2}

Key Words: Avionics, Guidance and Control, Gyro, Vibratory Gyro

1. はじめに

航空機, 船舶および各種自動機器の姿勢角の検出用または姿勢制御用のセンサとして各種のジャイロが使用されている。これらに使用されるジャイロは, 高速

で回転するロータの角運動量を利用して, 角速度または角度を計測するものである。

近年, リングレーザジャイロに代表される回転体をもたないジャイロが開発, 実用化されているが, 振動ジャイロもまた振動体の角運動量を利用するため, 回転体をもたないという特徴を有している。このため振動ジャイロは

- 1) 軸受などの摩耗部分がないため長寿命である。
- 2) 起動時間が短い。

^{*1} 昭和60年10月21日, 第23回飛行機シンポジウムにて講演。昭和62年2月21日原稿受理 Tuning Fork Vibratory Gyro

^{*2} (株)東京計器研究開発センター Kazuteru SATO