初期たわみを有する補強長方形板の非線形自由振動

(第1報) 周辺単純支持板の理論解析^{*1}

Free Nonlinear Vibrations of Stiffened Rectangular Plates with an Initial Curvature

(Part 1) Theoretical Analyses of Simply Supported Plate

角 誠之助^{*2}・有 富 正 男^{*3}

Seinosuke SUMI, Masao ARITOMI

桐 岡 健^{*3}

and Ken KIRIOKA

Key Words: Structural Analysis, Free Nonlinear Vibration, Stiffened Rectangular Plate, Initial Curvature, Simply Supported Edge

Abstract

The Marguerre equations which govern the moderately large deflection of isotropic plates with small initial curvature are extended to the dynamic case of orthotropic stiffened rectangular plates by employing a smeared out procedure. Simply supported boundary conditions with movable or immovable in-plane edge conditions and the initial deflection with double curvature are assumed. The modal equation for the nonlinear, large amplitude free vibration is established on the basis of a single-mode expression by using the Galerkin's method. Numerical results concerning the square plates with various combinations of stiffening parameters, initial deflections and in-plane edge conditions are obtained. The present results, when particularized for certain cases, agree well with those available in the literature.

1. 緒 言

航空機や船舶などでは、板厚を増すことなく必要な高い剛性が得られるので、一般に浅い曲面をもつ補強薄板が広く用いられている。ところが、このように軽量化を図った構造物は周期的横荷重を受けると、共振などによって大振幅の曲げ振動を発生し、強度上の大きな問題となる場合がある。たとえば、ジェット・エンジンによる航空機外板の音響疲労にみられるように構造破壊にもつながることがある。したがって、補強

板の大振幅曲げ振動を解明することは工学上重要であるが、これは非線形問題であり、その理論解析は一般に容易ではない。

薄板そのものの非線形曲げ振動に関する研究は従来から数多くなされており¹⁻⁶⁾、さらに初期たわみを考慮した研究もいくつか見受けられる⁷⁻⁹⁾。しかしながら、補強板の非線形曲げ振動に関する研究は少なく、Prathapら¹⁰⁾の研究が見受けられるにすぎない。とくに、初期たわみの影響を考慮に入れた補強板の曲げ振動の研究はほとんど見当たらない。

本報は、初期たわみを有する周辺単純支持の補強長方形板の非線形曲げ振動問題を取り上げ、その基本振動に対する近似解を求めたものである。解法としては、まず smeared out 法により直交補強板を等価な直交異方性板に置き換え、初期たわみを有する等方性板の曲げの基礎式、いわゆる Marguerre の式を異方性板の場合に拡張した式へ面外方向の慣性力を考慮することにより基礎式を求めた。次に、Galerkin 法によって1自由度系の非線形振動問題に変換し、逐次近似法によって解き、初期たわみや振幅さらには補強材と板の剛性比などが補強板の振動特性に及ぼす影響を明らかにした。

2. 基 礎 式

両辺の長さがそれぞれ a, b 、板厚が一定値 h の直交異方性長方形薄板 (以後これを非補強板と呼ぶ) を考え、この直交異方性の主軸方向は両辺に沿った方向にあるものとする。この薄板が板の両面上で中央面に關しては対称に、しかも主軸方向にそれぞれ d_x, d_y の一定間隔に配置された補強材で板の全表面にわたって十

^{*1} 昭和60年7月19日、第27回構造強度に関する講演会にて講演。昭和63年3月11日原稿受理

^{*2} 九州大学工学部航空工学科

^{*3} 鹿児島大学工学部機械工学科

第1図 補強材配置と座標系

分密に補強されているとすれば、この補強板はやはり直交異方性板として取り扱うことができる。

さて第1図のように、初期たわみがない状態の板中央面で、板の各辺に沿って x 軸、 y 軸をとり、それに垂直な z 軸方向の初期たわみを ξ 、付加たわみを w とする。また応力関数を F 、非補強板の密度を ρ 、時間を t とする

$$\left. \begin{aligned} \bar{\xi} &= \frac{\xi}{h}, \bar{w} = \frac{w}{h}, \bar{F} = \frac{12F}{E_{11}h^3} \\ \bar{\xi} &= \frac{x}{b}, \bar{y} = \frac{y}{b}, \bar{t} = \frac{t}{b^2} \sqrt{\frac{E_{11}h^2}{12\rho}} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

のように無次元化すれば、初期たわみを有する補強板の非線形曲げ自由振動の基礎式は、面外方向の慣性力を考慮した Marguerre の式を、直交異方性板に拡張して

$$\begin{aligned} & (1+\beta_s)\bar{w}_{,xxxx} + 2\left\{\frac{E_{12}}{E_{11}} + 2\frac{G}{E_{11}}(1+\beta_{sr})\right\}\bar{w}_{,xxyy} \\ & + \left(\frac{E_{22}}{E_{11}} + \beta_r\right)\bar{w}_{,yyyy} + (1+\bar{\rho})\bar{w}_{,tt} \\ & = \bar{F}_{,yy}(\bar{w} + \bar{\xi})_{,xx} + \bar{F}_{,xx}(\bar{w} + \bar{\xi})_{,yy} \\ & - 2\bar{F}_{,xy}(\bar{w} + \bar{\xi})_{,xy} \\ & K_{11}\bar{F}_{,xxxx} + (2K_{12} + K_{33})\bar{F}_{,xxyy} + K_{22}\bar{F}_{,yyyy} \\ & = \bar{w}_{,xy}^2 - \bar{w}_{,xx}\bar{w}_{,yy} + 2\bar{\xi}_{,xy}\bar{w}_{,xy} \\ & - \bar{\xi}_{,xx}\bar{w}_{,yy} - \bar{\xi}_{,yy}\bar{w}_{,xx} \end{aligned} \quad (2)$$

で与えられる。これらの式で、コンマの後の添字はそれに関する偏微分を表し、(3)式左辺の K_{11} などは

$$\left. \begin{aligned} K_{11} &= \frac{1+\alpha_s}{K_0}, K_{22} = \frac{(E_{22}/E_{11}) + \alpha_r}{K_0} \\ K_{12} &= -\frac{E_{12}/E_{11}}{K_0}, K_{33} = \frac{E_{11}/G}{12(1+\alpha_{sr})} \\ K_0 &= 12\left[(1+\alpha_s)\left(\frac{E_{22}}{E_{11}} + \alpha_r\right) - \left(\frac{E_{12}}{E_{11}}\right)^2\right] \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

といたものである。ここで、 G は非補強板の横弾性係数で、また E_{11}, E_{22}, E_{12} は非補強板の縦弾性係数 E_x, E_y およびポアソン比 ν_{xy}, ν_{yx} を用いて

$$\left. \begin{aligned} E_{11} &= \frac{E_x}{1-\nu_{xy}\nu_{yx}}, E_{22} = \frac{E_y}{1-\nu_{xy}\nu_{yx}} \\ E_{12} &= \frac{\nu_{xy}E_x}{1-\nu_{xy}\nu_{yx}} = \frac{\nu_{yx}E_y}{1-\nu_{xy}\nu_{yx}} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

で表される。さらに、(2)式中の $\bar{\rho}$ は補強材と非補強板の質量比で

$$\bar{\rho} = \left(\frac{\rho_s A_s}{d_s} + \frac{\rho_r A_r}{d_r} - \frac{m_{sr}}{ab} \right) / (\rho h) \quad (6)$$

と表される。

上記の式の中で、(4)式の $\alpha_s, \alpha_r, \alpha_{sr}$ は補強材の伸び剛性を非補強板のそれで割った伸び剛性比を表し、また基礎式(2)の β_s と β_r は同様な曲げ剛性比、 β_{sr} はねじり剛性比を表す。そしてこれらの剛性比は smeared out 法により

$$\left. \begin{aligned} \alpha_s &= \frac{E_s A_s}{E_{11} h d_s}, \alpha_r = \frac{E_r A_r}{E_{11} h d_r} \\ \alpha_{sr} &= \frac{1}{2} \left(\frac{G_s A_s}{G h d_s} + \frac{G_r A_r}{G h d_r} \right), \beta_s = \frac{12 E_s I_s}{E_{11} h^3 d_s} \\ \beta_r &= \frac{12 E_r I_r}{E_{11} h^3 d_r}, \beta_{sr} = 3 \left(\frac{G_s J_s}{G h^3 d_s} + \frac{G_r J_r}{G h^3 d_r} \right) \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

として与えられる^{10,11)}。ただし、(6)式と(7)式において、 ρ_s と ρ_r は補強材の密度、 m_{sr} は x 軸に平行な補強材と y 軸に平行な補強材とが交差する部分の補強材質量、 E_s と E_r は補強材の縦弾性係数、 G_s と G_r は補強材の横弾性係数である。また、 A_s と A_r は第1図に斜線部で示す板両面の補強材各1組の断面積を表し、以下同様に $E_s I_s$ と $E_r I_r$ は補強材各1組の板中央面に関する曲げ剛性、 $G_s J_s$ と $G_r J_r$ は補強材各1組のねじり剛性を表す。なお、板中央面の x, y 方向の変位成分 u^0, v^0 を

$$\bar{u}^0 = \frac{u^0 b}{h^2}, \bar{v}^0 = \frac{v^0 b}{h^2} \quad (8)$$

と無次元表示すれば、変位成分と応力関数の間には

$$\left. \begin{aligned} \bar{u}^0_{,x} + \frac{\bar{w}^2_{,x}}{2} + \bar{\xi}_{,x}\bar{w}_{,x} &= K_{12}\bar{F}_{,xx} + K_{22}\bar{F}_{,yy} \\ \bar{v}^0_{,y} + \frac{\bar{w}^2_{,y}}{2} + \bar{\xi}_{,y}\bar{w}_{,y} &= K_{11}\bar{F}_{,yy} + K_{12}\bar{F}_{,xx} \\ \bar{u}^0_{,y} + \bar{v}^0_{,x} + \bar{w}_{,x}\bar{w}_{,y} + \bar{\xi}_{,x}\bar{w}_{,y} + \bar{\xi}_{,y}\bar{w}_{,x} &= -K_{33}\bar{F}_{,xy} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

の関係が成立する。

3. 境界条件

両外変位に対しては周辺単純支持とする。したがって、アスペクト比 λ を

$$\lambda = a/b \quad (10)$$

とおけば

$$\left. \begin{aligned} \zeta = x/b = 0 \text{ および } \lambda \text{ において} \\ \bar{w} = 0, (1 + \beta_s) \bar{w}_{,\zeta\zeta} + \frac{E_{12}}{E_{11}} \bar{w}_{,\eta\eta} = 0 \\ \eta = y/b = 0 \text{ および } 1 \text{ において} \\ \bar{w} = 0, \frac{E_{12}}{E_{11}} \bar{w}_{,\zeta\zeta} + \left(\frac{E_{22}}{E_{11}} + \beta_r \right) \bar{w}_{,\eta\eta} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

の境界条件が成立する。以後は本式を面外境界条件と呼ぶことにする。

次に板の面内変位に対する条件としては、(A)面内変位が板周辺で拘束を受けない可動周辺の場合と、(B)面内変位が板周辺で拘束を受ける不動周辺の場合の二通りを考えると、これらの境界条件は次のように表される^{3,10)}。

(A)面内可動周辺 (Movable Edge)

$$\left. \begin{aligned} \zeta = x/b = 0 \text{ および } \lambda \text{ において} \\ \int_0^1 \bar{F}_{,\eta\eta} d\eta = \bar{F}_{,\eta} = 0 \\ \eta = y/b = 0 \text{ および } 1 \text{ において} \\ \int_0^1 \bar{F}_{,\zeta\zeta} d\zeta = \bar{F}_{,\zeta} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

(B)面内不動周辺 (Immovable Edge)

$$\left. \begin{aligned} \int_0^1 \bar{u}^{0,\zeta} d\zeta = \int_0^1 \bar{v}^{0,\zeta} d\zeta = 0 \\ \int_0^1 \bar{u}^{0,\eta} d\eta = \int_0^1 \bar{v}^{0,\eta} d\eta = 0 \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

面内変位で表されている(13)式の境界条件は、(9)式を使用すれば

$$\left. \begin{aligned} \int_0^1 \left[K_{12} \bar{F}_{,\zeta\zeta} + K_{22} \bar{F}_{,\eta\eta} - \frac{\bar{w}^{2,\zeta}}{2} - \bar{\xi}_{,\zeta} \bar{w}_{,\zeta} \right] d\zeta = 0 \\ \int_0^1 \left[K_{11} \bar{F}_{,\zeta\zeta} + K_{12} \bar{F}_{,\eta\eta} - \frac{\bar{w}^{2,\eta}}{2} - \bar{\xi}_{,\eta} \bar{w}_{,\eta} \right] d\eta = 0 \\ \int_0^1 \bar{u}^{0,\eta} d\eta = 0, \int_0^1 \bar{v}^{0,\zeta} d\zeta = 0 \end{aligned} \right\} \quad (13')$$

と書き換えられる。以後は、(12)式と(13')式を面内境界条件と略称する。

4. 解 法

初期たわみとして本報では、面外境界条件を満足する

$$\bar{\xi}(\zeta, \eta) = \bar{B} \sin \frac{\pi \zeta}{\lambda} \cdot \sin \pi \eta \quad (14)$$

の形の初期たわみを考える。ただし、 $\bar{B}$ は板中央点における初期たわみ B を非補強板の厚さ h で割った無次元最大初期たわみであり、この $\bar{B}$ の値は微小初期たわみをもつ薄板としての理論解析にきしかえのない程度の大きさであるとする。本報では、このような初期たわみを有する補強板の基本振動について近似解を求める。この場合、生じる振動モードは通常の単

純な平板で現れる微小振幅振動と根本的に異なった様相を示すとは考えられない。したがって、面外境界条件を満足し、かつ微小振動の場合と同一の

$$\bar{w}(\zeta, \eta, \tau) = \bar{A}(\tau) \sin \frac{\pi \zeta}{\lambda} \cdot \sin \pi \eta \quad (15)$$

の形に振動たわみを仮定する。ここで、 $\bar{A}(\tau)$ は板中央点における振動変位 $A(\tau)$ を非補強板の厚さ h で割った無次元変位である。

4.1 応力関数 応力関数 $\bar{F}$ は適合条件式(3)から得られる。すなわち、(3)式の一般解 $\bar{F}$ は補助解 $\bar{F}_c$ と特解 $\bar{F}_p$ の和として

$$\begin{aligned} \bar{F} &= \bar{F}_c + \bar{F}_p \\ &= \frac{p_1}{2} \eta^2 + \frac{p_2}{2} \zeta^2 + \frac{\bar{A}(\bar{A} + 2\bar{B})}{32} \left(\frac{\lambda^2}{K_{11}} \cos \frac{2\pi \zeta}{\lambda} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\lambda^2 K_{22}} \cos 2\pi \eta \right) \end{aligned} \quad (16)$$

のように得られる。本式および以後の式での $\bar{A}$ は時間関数 $\bar{A}(\tau)$ を略記したものである。またこの(16)式に含まれる時間関数 p_1, p_2 を決定するために、(12)式と(13')式の面内境界条件を使用すれば、 p_1, p_2 は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} p_1 &= \delta \frac{\pi^2 (K_{11} - \lambda^2 K_{12})}{8 \lambda^2 (K_{11} K_{22} - K_{12}^2)} \bar{A}(\bar{A} + 2\bar{B}) \\ p_2 &= \delta \frac{\pi^2 (\lambda^2 K_{22} - K_{12})}{8 \lambda^2 (K_{11} K_{22} - K_{12}^2)} \bar{A}(\bar{A} + 2\bar{B}) \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

ただし、(17)式に含まれる δ は

$$\left. \begin{aligned} \text{(A)面内可動周辺の場合: } \delta &= 0 \\ \text{(B)面内不動周辺の場合: } \delta &= 1 \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

である。

4.2 振動方程式 (15)式の振動たわみ $\bar{w}$ および(16)式の応力関数 $\bar{F}$ に含まれる $\bar{A}$ を求めるために、これらの式と(14)式の初期たわみ $\bar{\xi}$ を(2)式の運動方程式に代入し、Galerkin法を適用すると

$$\bar{A}_{,\tau\tau} + \mu_1 \bar{A} + \mu_2 \bar{A}^2 + \mu_3 \bar{A}^3 = 0 \quad (19)$$

で表される1自由度系の非線形常微分方程式を得る。ここで、上式中の係数 μ_1, μ_2, μ_3 は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \mu_1 &= \frac{\pi^4}{1 + \bar{\rho}} \left[\frac{1 + \beta_s}{\lambda^4} + 2 \frac{E_{12} + 2G(1 + \beta_{sr})}{\lambda^2 E_{11}} \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{E_{22}}{E_{11}} + \beta_r \right) + 2\bar{B}^2 \psi \right] \\ \mu_2 &= \frac{3\pi^4 \bar{B}}{1 + \bar{\rho}} \psi, \quad \mu_3 = \frac{\pi^4 \psi}{1 + \bar{\rho}} \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

ただし ψ は

$$\psi = \frac{1}{16K_{22}} \left\{ \frac{(E_{22}/E_{11}) + \alpha_r}{1 + \alpha_s} + \frac{1}{\lambda^4} \right\} + \frac{3}{2} \delta \left\{ \frac{1 + \alpha_s}{\lambda^4} \right.$$

$$+ \frac{2E_{12}}{\lambda^2 E_{11}} + \left(\frac{E_{22}}{E_{11}} + \alpha_r \right) \} \quad (21)$$

である。

なお、(14)式の形の初期たわみを有する板が等方性板であるとした場合には、(19)式と(20)式より

$$\begin{aligned} \bar{A}_r + \pi^4 \left(1 + \frac{1}{\lambda^2} \right)^2 \bar{A} + \frac{3}{4} \pi^4 \left[(1 - \nu^2) \left(1 + \frac{1}{\lambda^4} \right) \right. \\ \left. + 2\delta \left(1 + 2\frac{\nu}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^4} \right) \right] (\bar{A} + \bar{B})(\bar{A}^2 + 2\bar{B}\bar{A}) = 0 \end{aligned} \quad (22)$$

が得られる。この(22)式は Celep⁹⁾の求めた式と一致し、また(22)式で $\bar{B}=0$ とおいた初期たわみのない等方性板の非線形振動方程式は八巻³⁾の求めた式と一致する。

5. 数 値 計 算

数値計算例としては、ポアソン比 $\nu=0.3$ の等方性板に同材質の補強材が配置された補強正方形板を取り上げた。したがってここでは

$$\begin{aligned} \lambda=1, \nu_{xz}=\nu_{yz}=\nu=0.3 \\ E_{11}=E_{22}=\frac{E}{1-\nu^2}, E_{12}=\frac{\nu E}{1-\nu^2}, G=\frac{E}{2(1+\nu)} \\ E_s=E_r=E, G_s=G_r=G, \rho_s=\rho_r=\rho \end{aligned} \quad (23)$$

のもとで数値計算を行った。また、(6)式の質量比 $\bar{\rho}$ 中の補強材が交差する部分の補強材質量 m_{sr} は、その断面形状が長方形であるとして

$$m_{sr} = \rho A_r \frac{A_s/2}{2e_s - h} \cdot \frac{a}{d_r} \cdot \frac{b}{d_s} \quad (24)$$

とした。ここで、 e_s は板中央面から補強材断面の図心までの距離であり、この e_s と伸び剛性比 α_s によれば、曲げ剛性比 β_s は

$$\beta_s = \alpha_s \left[16 \left(\frac{e_s}{h} \right)^2 - 4 \frac{e_s}{h} + 1 \right] \quad (25)$$

で表される。なお、このときの計算にはねじり剛性比 β_{sr} の値も必要である。これに関しては、著者らが実施した実験で

$$\beta_{sr} \approx \beta_s + \beta_r \quad (26)$$

の関係にある補強板試験片を使用したので、実験結果が理論値とも比較できるように、ねじり剛性比 β_{sr} の値には(26)式を満足する値を使用した。

5.1 線形振動 振動振幅が板厚 h に比べて十分小さい場合には、(19)式の $\bar{A}^2$ および $\bar{A}^3$ の項は微小であるとして無視できる。したがって、振動方程式は

$$\bar{A}_{rr} + \mu_1 \bar{A} = 0 \quad (27)$$

となり、これから無次元線形角振動数 $\bar{\omega}$ は

$$\bar{\omega} = \omega b^2 \sqrt{\rho h / D} = \sqrt{\mu_1} \quad (28)$$

と表される。ただし、 ω は線形角振動数、 D は非補強板の曲げ剛性である。ところで、 $\bar{\omega}$ の2乗は(20)式の μ_1 よりわかるように

$$\bar{\omega}^2 = \Phi_1 + \bar{B}^2 (\Phi_2 + \delta \Phi_3) \quad (29)$$

の形で表される。上式の Φ_1 は基礎式(2)の左辺から求められたものであるが、それは(20)式の μ_1 で $\bar{B}=0$ とおいて得られる項を表す。よって、(23)式を考慮に入れると Φ_1 は

$$\Phi_1 = \frac{\pi^4}{1 + \bar{\rho}} \left[\frac{1 + \beta_s}{\lambda^4} + 2 \frac{1 + (1 - \nu) \beta_{sr}}{\lambda^2} + (1 + \beta_r) \right] \quad (30)$$

の形で与えられ、これは初期たわみが無い補強板の線形角振動数に該当する。その値は(30)式からわかるように、曲げ剛性比 β_s , β_r およびねじり剛性比 β_{sr} で決

第2図 線形角振動数 $\bar{\omega}$ と初期たわみ $\bar{B}$ の関係 (二方向補強板)

第3図 線形角振動数 $\bar{\omega}$ と初期たわみ $\bar{B}$ の関係 (一方向補強板)

まり、それらの剛性比が大きいほど高くなる。次に、(29)式の右辺で $\bar{B}^2$ の掛かった第2項は(2)式の右辺から生じたものであり、このなかの Φ_2 と Φ_3 は(23)式を考慮して(20)式からそれぞれ

$$\begin{aligned}\Phi_2 &= \frac{3}{2} \cdot \frac{\pi^4}{1+\bar{\rho}} \left(\frac{1+\alpha_r}{1+\alpha_s} + \frac{1}{\lambda^4} \right) \left(1+\alpha_s - \frac{\nu^2}{1+\alpha_r} \right) \\ \Phi_3 &= \frac{3\pi^4}{1+\bar{\rho}} \left\{ \frac{1+\alpha_s}{\lambda^4} + 2\frac{\nu}{\lambda^2} + (1+\alpha_r) \right\}\end{aligned}\quad (31)$$

と表される。これら Φ_2, Φ_3 のなかには α_s, α_r の伸び剛性比が含まれており、このことは断面力の存在を表す。したがって、初期たわみ $\bar{B}$ の存在は補強板に断面力の発生をもたらす、これは $\bar{B}^2$ に比例した分だけ初期たわみのない場合よりも線形角振動数 $\bar{\omega}$ を高くする。

このように(29)式によれば、線形角振動数を2乗した $\bar{\omega}^2$ は、初期たわみの2乗 $\bar{B}^2$ の一次式で表され、浅い殻の場合¹²⁾と同じく $\bar{\omega}^2$ と $\bar{B}^2$ は線形関係にあることがわかる。その際、 $\bar{\omega}$ の値はまた面内不動周辺 ($\delta=1$) のほうが面内可動周辺 ($\delta=0$) の場合よりも常に高くなることもわかる。以上のことをより明瞭にするために、図に示したものが第2図と第3図である。これらの図は二方向補強板と一方向補強板のそれぞれについて、板中心点の初期たわみ $\bar{B}$ に対する線形角振動数 $\bar{\omega}$ の値を、パラメータとして剛性比をとって示したものである。これら二つの図をみると、線形角振動数 $\bar{\omega}$ の値は伸び剛性比 α_s, α_r が小さく、曲げ剛性比 β_s, β_r とねじり剛性比 β_{sr} が大きな補強板ほど高くなることもわかる。

5.2 非線形振動 初期たわみを有する補強板が大振幅振動を行う場合には、その振動方程式は(19)式からわかるように振動変位 $\bar{A}$ の2乗の項と3乗の項を含んでいる。このうち $\bar{A}$ の2乗の項は復元力を非対称とするため、初期たわみのたわみ線から曲率の増加する方向への振幅 $\bar{A}_1$ と曲率の減少する方向への振幅 $\bar{A}_2$ とでは、その大きさが異なったものになる。このことをわかりやすく説明するために、初期たわみとこのたわみ線からの振幅を無次元化して示したものが第4図であるが、ここでまず無次元振幅 $\bar{A}_1 = A_1/h$ と

第4図 曲率の増加する方向への振幅 $\bar{A}_1$ と減少する方向への振幅 $\bar{A}_2$

$\bar{A}_2 = A_2/h$ の大小関係について考えてみる。ただし、 $\bar{A}_1 \geq 0, \bar{A}_2 \geq 0$ である。

(19)式の振動方程式は、いわゆるエネルギー積分によって

$$\frac{1}{2} \bar{A}_1^2 + \frac{1}{2} \mu_1 \bar{A}_1^2 + \frac{1}{3} \mu_2 \bar{A}_1^3 + \frac{1}{4} \mu_3 \bar{A}_1^4 = V \quad (32)$$

と変形できる。ただし、 V は振動系の全エネルギーである。 $\bar{A} = \bar{A}_1$ と $\bar{A} = -\bar{A}_2$ のときは $\bar{A}_r = 0$ であるから、(32)式は振幅 $\bar{A}_1$ と $\bar{A}_2$ で表せば

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \mu_1 \bar{A}_1^2 + \frac{1}{3} \mu_2 \bar{A}_1^3 + \frac{1}{4} \mu_3 \bar{A}_1^4 \\ = \frac{1}{2} \mu_1 \bar{A}_2^2 - \frac{1}{3} \mu_2 \bar{A}_2^3 + \frac{1}{4} \mu_3 \bar{A}_2^4 = V\end{aligned}\quad (33)$$

となるが、これを書き換えると

$$\begin{aligned}(\bar{A}_2^2 - \bar{A}_1^2) \left[\frac{1}{2} \mu_1 + \frac{1}{4} \mu_3 (\bar{A}_2^2 + \bar{A}_1^2) \right] \\ = \frac{1}{3} \mu_2 (\bar{A}_2^3 + \bar{A}_1^3)\end{aligned}\quad (33')$$

になる。本式の左辺では係数 μ_3 が初期たわみ $\bar{B}$ を含まず、 μ_1 には $\bar{B}^2$ が含まれる。そして一方の右辺ではその値が振幅 $\bar{A}_2^3$ ないし $\bar{A}_1^3$ に比例して増大し、しかもこのときの比例係数 μ_2 は $\bar{B}$ に比例して増大する。したがって、 $\bar{B}$ の増加にともない $\bar{A}_2$ と $\bar{A}_1$ の差は増大し、併せてこの差は $\bar{A}_2$ ないし $\bar{A}_1$ の増加によっても大きくなる。また、(33')式では各物理量は正の実数を表すので、この式が成立するためには

$$\bar{A}_1 \leq \bar{A}_2 \text{ あるいは } \bar{A}_1/\bar{A}_2 \leq 1 \quad (34)$$

でなくてはならない。すなわち、 $\bar{B}=0$ で $\mu_2=0$ となるので、 $\bar{A}_2 = \bar{A}_1$ が得られる初期たわみのない場合を除けば、曲率の減少方向への振幅 $\bar{A}_2$ は曲率の増加方向への振幅 $\bar{A}_1$ よりも常に大きいことになる。このこ

第5図 振幅比 $\bar{A}_1/\bar{A}_2$ と振幅 $\bar{A}_2$ の関係 ($\alpha_s = \alpha_r = 0.5, \beta_s = \beta_r = 10, \beta_{sr} = 20$)

とを明示するために、(33)式を使用して振幅 $\bar{A}_2$ に対する振幅比 $\bar{A}_1/\bar{A}_2$ を計算したものが第5図である。図には、伸び剛性比 $\alpha_s = \alpha_r = 0.5$ 、曲げ剛性比 $\beta_s = \beta_r = 10$ 、ねじり剛性比 $\beta_{sr} = 20$ の二方向補強板が、 $\bar{B} = 0$ 、0.5, 1, 2 の初期たわみをもつ場合について、 $\bar{A}_2$ に対する $\bar{A}_1/\bar{A}_2$ の値を示している。本図によれば、(34)式で示したように $\bar{A}_1/\bar{A}_2 \leq 1$ となっていることがよくわかる。同時に本図からは $\bar{B}$ の増加につれて、また振幅 $\bar{A}_2$ の増加につれて $\bar{A}_2$ と $\bar{A}_1$ の差が増大していくこともわかる。

次に振動方程式(19)の近似解は、振動変位 $\bar{A}(\tau)$ を曲率の減少する方向への振幅 $\bar{A}_2$ のべき級数で展開し、逐次近似法を使用すれば、付録に示す(A.1)式として得られる^{13,14)}。そして、このときの非線形周期 T^* と線形周期 T との比、すなわち比周期 T^*/T は

$$\begin{aligned} \frac{T^*}{T} = & \left[1 + \left\{ \frac{3}{4} \cdot \frac{\mu_3}{\mu_1} - \frac{5}{6} \left(\frac{\mu_2}{\mu_1} \right)^2 \right\} \bar{A}_2^2 - \left\{ \frac{1}{2} \cdot \frac{\mu_2}{\mu_1} \cdot \frac{\mu_3}{\mu_1} \right. \right. \\ & - \frac{5}{9} \left(\frac{\mu_2}{\mu_1} \right)^3 \left. \right\} \bar{A}_2^3 + \left\{ -\frac{3}{128} \left(\frac{\mu_3}{\mu_1} \right)^2 \right. \\ & \left. \left. + \frac{185}{96} \left(\frac{\mu_2}{\mu_1} \right)^2 \frac{\mu_3}{\mu_1} - \frac{235}{288} \left(\frac{\mu_2}{\mu_1} \right)^4 \right\} \bar{A}_2^4 - \dots \right]^{-1/2} \end{aligned} \quad (35)$$

第6図 板中心点の振動波形
($\alpha_s = \alpha_r = 0.5$, $\beta_s = \beta_r = 10$, $\beta_{sr} = 20$)

で近似的に表され、本式により非線形角振動数 $\omega^* [= \omega/(T^*/T)]$ が求められる。この(35)式が本報で取り上げた補強板の非線形振動問題にも適用可能なためには、(A.1)式の近似が適切であることが必要となる。そこで(A.1)式で得られる振動波形を、1階常微分方程式の数値解法として最も一般的に採用されるRunge-Kutta-Gill法による計算結果と比較したものが第6図である。本図には一例として第5図の場合と同じ剛性比をもつ二方向補強板が $\bar{B} = 2$ の初期たわみを有するとして、振幅 $\bar{A}_2$ が $\bar{A}_2 = 2$ の場合について求めた振動波形を示してある。この図で、実線の振動波形は(A.1)式で $\bar{A}_2$ の5乗の項までとって計算したものであり、点線の波形は振動方程式(19)をRunge-Kutta-Gill法で数値計算して求めたものである。これ

第7図 初期たわみのない二方向補強板の比周期 T^*/T と振幅 $\bar{A}_2$ の関係

第8図 比周期 T^*/T と振幅 $\bar{A}_2$ の関係
($\alpha_s = \alpha_r = 0.5$, $\beta_s = \beta_r = 10$, $\beta_{sr} = 20$)

ら両者の振動波形は、(a)図の面内可動周辺の場合も (b)図の面内不動周辺の場合もともに非常によく一致している。またこの第6図によれば、(34)式の関係 $\bar{A}_1 < \bar{A}_2$ が成立していることもわかる。以上のことより、(A.1)式の近似は補強板の非線形振動問題に対しても適切であるものと考えてよい。

次に、初期たわみのない、すなわち $\bar{B}=0$ の場合は $\mu_2=0$ となるが、(19)式で $\mu_2=0$ としたときの非線形周期 T^* は楕円積分によって厳密解が求められる³⁾。よっていま、初期たわみのない二方向補強板の比周期 T^*/T と振幅 $\bar{A}_2$ の関係を楕円積分で求め、この厳密解の上に近似式(35)による結果を重ねてみると第7図を得る。ただし、(35)式では $\bar{A}_2$ の4乗の項までとって計算した。ところが、この(35)式による結果は、図示のように楕円積分による厳密解との相違が識別不可能である。このことから、(35)式は $\bar{A}_2$ の4乗の項までとれば、補強板の非線形振動問題にも十分適用できることがわかる。したがって、以下に示す比周期の値はすべて(35)式で $\bar{A}_2$ の4乗の項までとって計算したものである。

第8図は、伸び剛性比 $\alpha_s=\alpha_r=0.5$ 、曲げ剛性比 $\beta_s=\beta_r=10$ 、ねじり剛性比 $\beta_{sr}=20$ の二方向補強板が、 $\bar{B}=0, 0.5, 1, 2$ の初期たわみをもつ場合の振幅 $\bar{A}_2$ に対する比周期 T^*/T の値を示したものである。この図をみると、点線で示す面内可動周辺の場合、ここで採用した $\bar{B}$ の値に対して $\bar{A}_2$ が0から2まで変化するとき、 T^*/T は1.0から0.94の間しか変化せず、とくに $\bar{A}_2$ が小さいときは $\bar{B}$ による差異はきわめて小さく、ほとんど1と見なしでもよい。このことから面内可動周辺の場合、非線形角振動数 ω^* と線形角振動数 ω との比、すなわち振動数比 ω^*/ω に及ぼす初期た

わみと振幅の大きさの影響は小さいことがわかる。一方、実線で示した面内不動周辺の場合、比周期 T^*/T は $\bar{B}=0$ のとき、 $\bar{A}_2=0$ のときの1.0から $\bar{A}_2=2$ のときの0.84まで単調に減少しており、 $\bar{B}$ が0.5, 1と大きくなると1に接近する。そして、 $\bar{B}=2$ のときには初期たわみのない $\bar{B}=0$ の場合とは異なり、 T^*/T の値は振幅の増加とともに増大し、 $\bar{A}_2=2$ では1.10となる。したがって、図中に示す剛性比をもつ補強板の場合、 $\bar{A}_2=2$ のとき比周期は $0.84 \leq T^*/T \leq 1.10$ の範囲の値をとることになる。つまり振動数比でいえば、 $0.91 \leq \omega^*/\omega \leq 1.19$ の範囲をとり、面内不動周辺の場合は振幅と初期たわみの大きさによって振動数比は大きく変化することがわかる。

第9図は、伸び剛性比 α_s と α_r が第8図と同じ値で、曲げ剛性比とねじり剛性比が $\beta_s=\beta_r=25$ 、 $\beta_{sr}=50$ と第8図よりも大きな値である二方向補強板の振幅 $\bar{A}_2$ に対する比周期 T^*/T の値を示したものである。この図からわかるように、 $\bar{B}=0 \sim 2$ の初期たわみの値に対して振幅 $\bar{A}_2$ が0から2の間では、点線で示す面内可動周辺の場合、比周期 T^*/T は $0.98 \leq T^*/T \leq 1.00$ の範囲の値となり、このことは非線形角振動数 ω^* が第8図の場合よりさらに初期たわみと振幅の大きさにはほぼ無関係に線形角振動数 ω に近い値をとることを表す。また、実線で示した面内不動周辺の場合、比周期 T^*/T は $0.92 \leq T^*/T \leq 1.01$ の範囲の値をとり、これから振動数比 ω^*/ω は $0.99 \leq \omega^*/\omega \leq 1.09$ の範囲の値となる。この値は第8図の場合よりも1に接近しており、このことから、 ω^*/ω の値は曲げ剛性比 β_s 、 β_r とねじり剛性比 β_{sr} の値が大きな補強板ほど1に近づくことになる。

第10図は、曲げ剛性比 β_s 、 β_r とねじり剛性比 β_{sr}

第9図 比周期 T^*/T と振幅 $\bar{A}_2$ の関係
($\alpha_s=\alpha_r=0.5$, $\beta_s=\beta_r=25$, $\beta_{sr}=50$)

第10図 比周期 T^*/T と振幅 $\bar{A}_2$ の関係
($\alpha_s=\alpha_r=0.2$, $\beta_s=\beta_r=10$, $\beta_{sr}=20$)

が第8図の場合と同じ値であるが、伸び剛性比が $\alpha_s = \alpha_r = 0.2$ で、第8図よりも小さな値である二方向補強板の振幅 $\bar{A}_2$ に対する比周期 T^*/T の値を示したものである。この補強板の場合、 $\bar{B} = 0 \sim 2$ の値に対して振幅 $\bar{A}_2$ が 0 から 2 の間において、振動数比 ω^*/ω は面内可動周辺では $1.00 \leq \omega^*/\omega \leq 1.05$ の範囲の値をとり、また面内不動周辺では $0.94 \leq \omega^*/\omega \leq 1.19$ の範囲の値となる。これらの値は第8図の場合に比べてわずかに 1 の値に接近したものとなっており、 ω^*/ω の値は伸び剛性比 α_s, α_r が小さな補強板ほど 1 に近づくことになる。しかしながら、伸び剛性比の値が ω^*/ω に及ぼす影響は小さいものといえる。

6. 結 言

本報は、初期たわみを有する周辺単純支持の補強長方形板の非線形曲げ振動を理論解析し、初期たわみや振幅さらには補強材と板の剛性比が補強板の基本振動数に及ぼす影響を検討したものである。得られた結果を要約すると次のとおりである。

(1) 線形角振動数を 2 乗した ω^2 は (29) 式で与えられ、板中心点における初期たわみの 2 乗 B^2 と線形関係にある。

(2) 線形振動数は、補強材の伸び剛性を板のそれで割った伸び剛性比が小さく、同様な曲げ剛性比とねじり剛性比が大きな補強板ほど高くなる。

(3) 線形振動数は、面内不動周辺の場合が面内可動周辺の場合よりも常に高い値となる。

(4) 初期たわみのたわみ線から曲率の減少する方向への振幅 A_2 は、曲率の増加する方向への振幅 A_1 よりも常に大きく、その差は初期たわみの増加につれて大きくなり、しかも振幅の増加によっても大きくなる。

(5) 非線形角振動数 ω^* と線形角振動数 ω との比 ω^*/ω の値は、伸び剛性比が小さく、曲げ剛性比とねじり剛性比が大きな補強板ほど 1 の値に近づく。

(6) ω^*/ω の値は、面内不動周辺の場合には振幅や初期たわみの大きさによって大きく変化するが、面内可動周辺の場合にはほとんど変化せず、1 に近い値をとる。

なお、本研究に関しては実験的研究も行い、理論解析結果の検証を行っているが、これについては別報で報告する予定である。

参 考 文 献

- 1) Herrmann, G.: Influence of Large Amplitudes on Flexural Motions of Elastic Plates, National Advisory Committee for Aeronautics, Technical Note 3587 (1956), pp. 1-45.

- 2) Chu, H. and Herrmann, G.: Influence of Large Amplitudes on Free Flexural Vibrations of Rectangular Elastic Plates, Trans. ASME, J. Appl. Mech., 23 (1956), pp. 532-540.
- 3) Yamaki, N.: Influence of Large Amplitudes on Flexural Vibrations of Elastic Plates, Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik, 41 (1961), pp. 501-510.
- 4) Wah, T.: Large Amplitude Flexural Vibration of Rectangular Plates, Int. J. Mech. Sci., 5 (1963), pp. 425-438.
- 5) 八巻 昇, 永井健一: 一様分布周期横荷重をうける長方形板の非線形曲げ振動, 日本機械学会論文集, 39 (1973), pp. 3334-3341.
- 6) Vendhan, C. P.: A Study of Berger Equations Applied to Non-linear Vibrations of Elastic Plates, Int. J. Mech. Sci., 17 (1975), pp. 461-468.
- 7) Nowinski, J. L.: Large-Amplitude Oscillations of Oblique Panels with an Initial Curvature, AIAA J., 2 (1964), pp. 1025-1031.
- 8) Celep, Z.: Free Flexural Vibration of Initially Imperfect Thin Plates with Large Elastic Amplitudes, Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik, 56 (1976), pp. 423-428.
- 9) 八巻 昇, 千葉正克: 初期たわみ, 初期面内応力を有するく形板の非線形曲げ振動 (第1報, 理論), 日本機械学会論文集 (C編), 48 (1982), pp. 1687-1694.
- 10) Prathap, G. and Varadan, T. K.: Large Amplitude Flexural Vibration of Stiffened Plates, J. Sound Vib., 57 (1978), pp. 583-593.
- 11) 関谷 壮, 浜田 実, 角誠之助: 平板構造強度設計便覧, 朝倉書店, 1982, pp. 246.
- 12) Reissner, E.: On Transverse Vibrations of Thin, Shallow Elastic Shells, Q. Appl. Math., 13 (1955), pp. 169-176.
- 13) 榎木義一: 非線形振動論, 共立出版, 1959, pp. 12-16.
- 14) 砂川 恵: 長方形平板の自由振動特性に及ぼす温度変化および振幅の影響, 日本機械学会論文集, 30 (1964), pp. 558-566.

付録 板中心点の振動変位 $\bar{A}(\tau)$ の近似式

振動方程式 (19) の近似解は、曲率の減少する方向への振幅 $\bar{A}_2$ を使用すれば次式で得られる。

$$\begin{aligned} \bar{A} = & \left[-\frac{1}{2} \mu_{21} \bar{A}_2^2 + \frac{1}{3} \mu_{21}^2 \bar{A}_2^3 - \left(\frac{25}{48} \mu_{21}^3 \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{21}{32} \mu_{21} \mu_{31} \right) \bar{A}_2^4 \right. \\ & \left. + \left(\frac{25}{36} \mu_{21}^4 - \frac{29}{24} \mu_{21}^2 \mu_{31} \right) \bar{A}_2^5 - \dots \right] \\ & + \left[-\bar{A}_2 + \frac{1}{3} \mu_{21} \bar{A}_2^2 - \left(\frac{29}{144} \mu_{21}^2 - \frac{1}{32} \mu_{31} \right) \bar{A}_2^3 \right. \\ & \left. + \left(\frac{119}{432} \mu_{21}^3 - \frac{35}{96} \mu_{21} \mu_{31} \right) \bar{A}_2^4 - \left(\frac{7103}{20736} \mu_{21}^4 \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{1607}{2304} \mu_{21}^2 \mu_{31} + \frac{23}{1024} \mu_{31}^2 \right) \bar{A}_2^5 + \dots \right] \\ & \times \cos \left(\frac{2\pi}{T^*} \tau \right) \\ & + \left[\frac{1}{6} \mu_{21} \bar{A}_2^2 - \frac{1}{9} \mu_{21}^2 \bar{A}_2^3 + \left(\frac{2}{9} \mu_{21}^3 - \frac{1}{3} \mu_{21} \mu_{31} \right) \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \bar{A}_2^4 - \left(\frac{8}{27} \mu_{21}^4 - \frac{5}{9} \mu_{21}^2 \mu_{31} \right) \bar{A}_2^5 + \dots \Big] \\
& \times \cos \left(\frac{4\pi}{T^*} \tau \right) + \left[- \left(\frac{1}{48} \mu_{21}^2 + \frac{1}{32} \mu_{31} \right) \bar{A}_2^3 \right. \\
& + \left(\frac{1}{48} \mu_{21}^3 + \frac{1}{32} \mu_{21} \mu_{31} \right) \bar{A}_2^4 \\
& - \left(\frac{31}{576} \mu_{21}^4 + \frac{11}{384} \mu_{21}^2 \mu_{31} - \frac{3}{128} \mu_{31}^2 \right) \\
& \times \bar{A}_2^5 + \dots \Big] \cos \left(\frac{6\pi}{T^*} \tau \right) + \left[\left(\frac{1}{432} \mu_{21}^3 \right. \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{96} \mu_{21} \mu_{31} \Big) \bar{A}_2^4 - \left(\frac{1}{648} \mu_{21}^4 + \frac{1}{72} \mu_{21}^2 \mu_{31} \right) \bar{A}_2^5 \\
& + \dots \Big] \cos \left(\frac{8\pi}{T^*} \tau \right) + \left[- \left(\frac{5}{20736} \mu_{21}^4 \right. \right. \\
& + \frac{5}{2304} \mu_{21}^2 \mu_{31} + \frac{1}{1024} \mu_{31}^2 \Big) \bar{A}_2^5 + \dots \Big] \\
& \times \cos \left(\frac{10\pi}{T^*} \tau \right) + \dots \dots \dots \quad (A.1)
\end{aligned}$$

ただし, μ_{21} と μ_{31} は

$$\mu_{21} = \mu_2 / \mu_1, \mu_{31} = \mu_3 / \mu_1 \quad (A.2)$$

である.