— 技 術 ノ ー ト — TECHNICAL NOTE

亜音速核関数計算法としての Desmarais 法の評価*¹ Evaluation of the Desmarais' Method for Computing Subsonic Kernel Function

安 東 茂 典*²・加 藤 三 千 代*²
Shigenori ANDO and Michiyo KATO

Key Words: Lifting Surface, Kernel Function, Desmarais, Numerical Method

Abstract

Desmarais' method for computing the incomplete Struve function in the unsteady lifting surface kernel function is world-famous. It was adopted in a lifting surface computation method, PCKFM, which is also highly evaluated in USA. As a representative of Desmarais' method, "D 12.1" is investigated in this report, being compared with the method developed by us previously. It is found that Desmarais' method has an own defect that it becomes erroneous in proximity to the X -axis. Moreover it treats numerically some parts of the singularities of the kernel function, which is a violation of general numerical rules. Thus although there is a little merit resulting from computer time, we could not appreciate the Desmarais' method because of the above-mentioned defects.

1. 序 論

亜音速揚力面理論を用いて数値計算する際、その核関数の数値計算法が結果に重要な影響を及ぼす。とくにそのなかの、積分関数、あるいは不完全 Struve 関数ともいわれるものの数値計算法が、とりわけ重要である。Watkins¹⁾以来、約 30 年もの間、これの効率よい数値計算法が提案されてきた。筆者らも我が国の上田の方法²⁾に刺激されて、新しい方法を開発し³⁾、そしてそれを用いた新しい揚力面計算法を作成した⁴⁾。しかし、この新しい核関数計算法は、米国ではあまり認められなかった一理由は米国で開発された多くの方法との比較がなされていない、というだけである。米国で著名な揚力面理論 PCKFM の開発者 Lottati⁵⁾にわれわれの開発した揚力面理論(英文)の別刷を送った折にも、「どういう核関数計算法を用いているのか」と訊ねられた。PCKFM 中では、Desmarais

ais の核関数計算法⁶⁾が用いられている。

このような理由で、われわれは本稿では Desmarais の核関数計算法をわれわれの立場から評価することを試みることにした。計算には全て倍精度を用い、かつ $|X|, r \rightarrow 0$ での数値的不安定が起こるかもしれないので、これらの最小値を $10^{-3} \sim 10^{-5}$ にとどめた。

記 号

- a_k : 式(4)をみよ
 - b_k : 式(4)をみよ
 - b : 式(4)をみよ
 - $B(X, r)$: 式(1)で定義される。これは reduced freq. k を 1 としたときのもの³⁾
 - E : 式(5)をみよ
 - F : 式(3)をみよ
 - f : 式(3)をみよ
 - g : 式(4)をみよ
 - H : 式(14)をみよ
 - I_1, K_1 : 変形ベッセル関数
 - L_1 : Struve 関数
 - n, m : "Dn, m" のごとく用いられる。式(4)中に現れる
 - r : これは $|y_0|$ である
 - U_0, U_1, U_2 : 式(10)をみよ
 - $W = \sqrt{X^2 + r^2}$
 - $X = (x_0 - MR)/\beta^2$ のごとく x_0 に関連している³⁾
 - x_0, y_0 : それぞれ、 $x - \xi$ と $y - \eta$ 。(x, y) は down wash 点、(ξ, η) は荷重点の座標である。
 - x, ξ は自由流方向
 - y, η はそれに垂直な翼面内座標
- (註) 核関数について: 揚力面理論は次の積分方程式に基づく。

$$w(x, y) = \frac{1}{8\pi} \iint_S \Delta p(\xi, \eta) K(x_0, y_0) d\xi d\eta \quad (a)$$

*¹ 昭和 63 年 5 月 26 日原稿受理

*² 名古屋大学工学部航空学教室

w は翼面上の垂直速度, Δp は翼面上の空力荷重分布, 積分は全翼面上でとられる. K が核関数である. 関数 B は K の中の重要メンバーである. K は, reduced freq. $k=1, X<0$ の場合のものを求められれば, $k \neq 1, X \geq 0$ の場合のものは容易に求められる³⁾.

2. Desmarais 法について

亜音速核関数中には, 次の積分関数が含まれている.

$$B(X, r) \equiv \int_{-\infty}^X e^{iv}(r^2 + v^2)^{-3/2} dv \quad (1)$$

これの $X < 0$ の領域内での数値計算法が問題になる³⁾. 部分積分すると

$$B = \left(1 - \frac{s}{\sqrt{1+s^2}}\right) \frac{e^{-irs}}{r^2} - \frac{i}{r} F(s, r), \quad s \equiv \frac{|X|}{r} \quad (2)$$

となる. ただし,

$$\left. \begin{aligned} F(s, r) &\equiv \int_s^{\infty} e^{-irt} f(t) dt \\ f(t) &\equiv 1 - t/\sqrt{1+t^2} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Desmarais の提案は $f(t)$ を次の関数 $g(t)$ で近似する.

$$g(t) \equiv \sum_{k=1}^n a_k \exp(-b_k t), \quad b_k \equiv 2^{k/m} b \quad (4)$$

ここで, $a_k (k=1 \sim n), m, b$ は

$$E \equiv \int_0^{\infty} t^{-1/2} [g(t) - f(t)]^2 dt \quad (5)$$

を最小にするように選ばれる. "D 8.1", "D 12.1", "D 24.2", "D 72.3" のような方法が提案されている. たとえば, D 12.1 は, $n=12, m=1$ とするものである. 本報での評価に用いたのは, D 12.1 である. もちろん, これより D 24.2, D 72.3 のほうがよい数値精度を与えるが, 計算時間は増す. よって D 12.1 を用いることにしたわけであるが, これによると

$$e(t) = |g(t) - f(t)| \quad (6)$$

の最大値は, 10^{-4} を越えず, 実用上十分と推察された. なお, 興味のあることは,

$$\exp(-2^k b t) = [\exp(-2^{(k-1)} \cdot b \cdot t)]^2 \quad (7)$$

という関係がある. これを用いると式(4)中に現れる $\exp$ 関数の計算時間は著しく短縮できる. それはわれわれの数値実験でも確かめられた.

D 12.1 中で用いられる, a_k, b は次のごとくである⁶⁾.

$$\left. \begin{aligned} b &= 0.009, 054, 814, 793 \\ a_1 &= 0.000, 319, 759, 140 \\ a_2 &= -0.000, 055, 461, 471 \\ a_3 &= 0.002, 726, 074, 362 \\ a_4 &= 0.005, 749, 551, 566 \\ a_5 &= 0.031, 455, 895, 072 \\ a_6 &= 0.106, 031, 126, 212 \\ a_7 &= 0.406, 838, 011, 567 \\ a_8 &= 0.798, 112, 357, 155 \\ a_9 &= -0.417, 749, 229, 098 \\ a_{10} &= 0.077, 480, 713, 894 \\ a_{11} &= -0.012, 677, 284, 771 \\ a_{12} &= 0.001, 787, 032, 960 \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

3. Desmarais 法の検討

3.1 Desmarais 法の本来の使用法 式(2)中の $F(s, r)$ を(4)を用いて計算すると

(a) 実部

(b) 虚部

第1図 Desmarais 法による関数 F の図示

$$B(X < 0, r) = \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{s}{\sqrt{1+s^2}} \right) e^{-irs} - \frac{i}{r} F_D(s, r) \left\{ \right.$$

$$F_D(s, r) = \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{(b_k + ir)} \exp[-(b_k + ir)s] \quad (9)$$

これが Desmarais 本来の用法である。この F_D を計算した結果を第 1 図に示す。これはともかく有限であり、また一見したところでは、よい挙動をしているかのように見える。

ところが関数 B の、 $X < 0$, $W = \sqrt{X^2 + r^2} \sim 0$ の特異性は周知のように

$$\left. \begin{aligned} U_0 &= 1/[W(W+|X|)] = (1-s/\sqrt{1+s^2})/r^2 \\ U_1 &= -i/W \\ U_2 &= -(1/2)[X/W + \ln(W+|X|)] \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

から成っている²⁾。式(2)においてこのことを考察すると、

U_0 はどうにか分離されている、

しかし U_1, U_2 は F 中にほぼ完全に埋没されている、

ということがわかる。問題になりそうなことは、単に数値上のエラー%ではなく、特異性の関数形が全くめちやくちやになる、ということである。とくに U_2 特異性を見る影もなくなってしまう。 U_1, U_2 特異性は確かに U_0 ほど強烈ではない。しかし U_2 という対数的特異性でさえもおそろかにすべきではない—そのことは Multhopp⁷⁾ がスパン方向の、また安東・市川⁸⁾ がコード方向の対数的特異性対策を施して収束性を顕著に改善したことを想起すれば、明らかである。

なお第 2 図の、 BO はわれわれの以前の方法³⁾により求められた積分関数 B であり、 BD は式(9)により求められたそれである。 BO と BD が、

(a-1) われわれの方法によるものの実部

(b-1) Desmarais 法によるものの実部

(a-2) 同 虚 部

(b-2) 同 虚 部

第 2 図 関数 B の図示。 $|X|$ と r の最小値は 10^{-5}

第1表 われわれの方法と Desmarais 法との計算時間の比較

	B	K_1	I_1-L_1	H
Our's	61/861	8/350	2/350	47/861
Desmarais's	47/861	8/350	2/350	54/861

注 For X/Y , X means computer time (ms), and Y means number of computed cases; obtained with FACOM M-780/20

とくに X 軸の近くで、

および、原点近くでの盛り上がり方において

微妙にちがっていることに気づかれよう。この X 軸の近くで、Desmarais 法が不具合を生ずることは、後述するごとく Desmarais 法の本質的欠陥であるように思われる。

なお B 計算の時間は、第1表に示すように Desmarais 法のほうが約 30% 少ない。

3.2 Desmarais 法の部分的使用 そもそも、「特異部分の計算は解析的に、また非特異部分のそれは数値的に行う」というのが数値計算手法の鉄則である。Desmarais 自身の方法はこの鉄則に違反し、前述のごとく少なくとも対数的特異性を全く行方不明にしている。そのような方法は筆者らには根本的に容認しえないところである。

そこで、われわれが以前提案した³⁾ように、全核関数中の特異部分 U_0, U_1, U_2 (これらは、それぞれ U_0, U_1, U_2 に対応する) を分離した残りの有限部分のみに Desmarais 法を応用してみよう。

(1) $rK_1(r)$ と $I_1(r)-L_1(r)$ への応用：われわれの方法では

$$A \equiv \int_0^\infty e^{-it} (1+t^2)^{-3/2} dt \quad (11)$$

$$= rK_1(r) + \frac{i\pi}{2} r [I_1(r) - L_1(r)] - ir \quad (12)$$

というものが現れる。式(11)の右辺を部分積分し、Desmarais 法を用いると、

$$\left. \begin{aligned} rK_1(r) &= A_r = 1 - r^2 \sum_{k=1}^n a_k / (b_k^2 + r^2) \\ (\pi/2) [I_1(r) - L_1(r)] - 1 &= A_i / r \\ &= - \sum_{k=1}^n a_k b_k / (b_k^2 + r^2) \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

式(13)の左辺をわれわれの方法³⁾ (これは名大の大型計算機センターにあるサブルーチンを使用させていた) で求めたものと、右辺を D 12.1 で計算したものとを比較した。その結果を第3図に示す。

ただし、 rK_1 において Desmarais 法の値の中の乱れている部分には負値をとっているものがある。その絶対値をとり強引に対数図上にプロットしてあることをお断りする。これは $r \approx 20 \sim 30$ のあたりであ

(a) $rK_1(r)$ (b) $I_1(r) - L_1(r)$

第3図 われわれの方法と Desmarais 法との比較

る。

図からわかるように Desmarais 法は、 rK_1 では r が大きくなると、また I_1-L_1 では r が小さくなると、エラーがひどくなる。それぞれは全核関数中では

$$\frac{1}{r} K_1(r) \quad \text{および} \quad \frac{1}{r} [I_1(r) - L_1(r)]$$

として入ってくる。よって $r \rightarrow \infty$ で、 $r^{-1} K_1(r) \rightarrow 0$ であり、 $rK_1(r)$ の $r \rightarrow \infty$ でのエラーは全く問題にはならない。これに対して、 $r \rightarrow 0$ で $r^{-1} [I_1(r) - L_1(r)]$ は $1/2$ となるので、 $r \rightarrow 0$ での I_1-L_1 のエ

(a-1) われわれの方法によるものの実部

(b-1) Desmarais 法によるものの実部

(a-2) 同 虚 部

(b-2) 同 虚 部

 第4図 われわれの方法と Desmarais 法による関数 H の比較. $|X|, r$ の最小値は 10^{-3}

ラーは相当の問題となりうる。

ここでもまた X 軸上での Desmarais 法の一次陥が発現した。

(2) $H(X, r)$ への応用: われわれの方法ではまた

$$H(X, r) = \int_0^{\pi} \left[\frac{u}{\sqrt{u^2 + r^2}} - \frac{X}{\sqrt{X^2 + r^2}} \right] \times [e^{iu} - (1 + iu)] \frac{du}{r^2} \quad (14)$$

という関数が現れる。これをわれわれの方法³⁾で計算すると第4図 HO のごとくなる。ところが式(14)はまた

$$H = -\frac{1}{r} \int_0^{\pi} [f(t) - f(s)] [e^{-irt} - (1 - irt)] dt \quad (15)$$

と書けるので、この $f(t), f(s)$ などを(4)式で定義される g 関数でおきかえれば Desmarais 法で計算できることになる。具体的作業公式は次のようになる。

$$H = is^2 f(s) E(|X|) - \frac{1}{r} \sum_k^n a_k I_k \quad (16a)$$

$$I_k = e^{-b_k s} \left[\frac{b_k - ir - ib_k |X|}{b_k^2} - \frac{e^{-i|X|}}{ir + b_k} \right] + \left[\frac{1}{ir + b_k} + \frac{ir - b_k}{b_k^2} \right] \quad (16b)$$

$$E(|X|) \equiv \{e^{-i|X|} - [1 - i|X| + (-i|X|)^2/2]\} / X^2 \quad (16c)$$

$E(|X|)$ は $|X| \rightarrow 0$ でも有限で、0 に収束する。この式を用いて計算したものを第4図に HD として示した。 X 軸の近くで変なジャンプが起こっている。こ

の計算で $|X|$, r の最小値は 10^{-3} に抑えていることを注意しておく。さらに注意したいのは, $s^2 f(s)$ は次の2通りに書ける。

$$s^2(s+\sqrt{1+s^2})^{-1}(1+s^2)^{-1/2}; \text{ Exact} \quad (17a)$$

$$s^2 \sum_{k=1}^n a_k \exp(-b_k s); \text{ Desmarais 法} \quad (17b)$$

ところが, これらの $r \rightarrow 0$, すなわち $s \rightarrow \infty$ での漸近値は $1/2$, 0 と全く異なるのである。第4図 HD の X 軸近くでの急ジャンプは式(17a), (17b)のいずれを用いても回避できなかった。しかし, 式(16)中の他の部分との整合性を重んずれば式(17b)のほうがよいと考え, 最終的には式(17b)を用いた。

筆者らは, Desmarais 法が X 軸の近くで再三にわたり示す, エラーに充ちた挙動のすべてが, 式(17a), (17b)の極限値の差異に端的に現れていると考えている。 $|X|$ がかなり大きくなれば, 重要性はうすれるが,

$$|X|, r \rightarrow 0 \text{ でしかも } s = |X|/r \gg 1$$

の領域でのエラーは非常に重要である。

3.3 計算時間の比較 名古屋大学の大型計算機 FACOM M-780/20 を用いたが, 1点1点当りの計算時間は非常にわずかで差が検知できない。よって数百点当りの計算を行い, それから1点当りの計算時間を得ることにした。第1表を参照されたい。

積分関数 B 以外では, われわれの方法よりも Desmarais 法のほうが多くの計算時間を要している。したがって B 以外の方法に関しては Desmarais 法は全く問題にならない。 B に関しては Desmarais 法は約30%計算時間が少ない。しかし,

X 軸近傍での不確実性
原点付近での特異性の関数形の破壊

というデメリットは, 30%ほどの計算費上のメリットを引き替えとして受け入れうるものではない—とわれわれは判断する。

なお, 式(7)という漸化式は, 計算時間を短縮するためにたいそう有効であることが確認された。

4. 結 論

揚力面計算に現れる核関数は, 不完全 Struve 関数を含む。これを数値計算するために Desmarais が提案した方法は, PCKFM 揚力面計算法中で採用され, 世界的評価をえている。

われわれがこれを調査した結果, 次のことがわかった。

- (1) X 軸の近傍ではエラーがひどくなる。これは Desmarais 法に固有の欠点である。
- (2) 少なくとも対数的特異性は, 完全に数値計算

部に埋没されてしまう。これは数値計算の基本原則に違反している。

- (3) 計算時間は, Desmarais 自身の提案するような使用法を用いれば, われわれが以前に開発した方法よりも約30%少ない。しかしながらこれだけのメリットと引替えに(1), (2)のデメリットを受け入れる気には, なれない。

- (4) 有限部分のみの計算への限定された使用は, 精度と計算時間の両面ともデメリットをもたらす。

ある人は, 「Desmarais 法を用いた PCKFM はうまくいっているじゃあないか」といわれるかもしれない。しかし, 次のことに注意しなければならない。

- (a) ほとんど厳密解の存在しない世界である: とくに U_1 , U_2 特異性が関与する非定常の場合, そうである。

- (b) PCKFM は, モード関数の少ない ($3 \times 3 \sim 5 \times 5$) モード法であり, Desmarais 法の欠陥が露呈しにくい。分割数の多い離散化法へ適用した場合の収束性調査が, Desmarais 法の試金石となるであろう。

ともあれ, われわれは, 離散化法に Desmarais 法を適用することを推奨しない。ほかによりふさわしいもの—たとえば文献3)のそれ—があるからである。

参考文献

- 1) Watkins, C. E., Woolston, D. C. and Cunningham, H. J.: A Systematic Kernel Function Procedure for Determining Aerodynamic Forces on Oscillating or Steady Finite Wings at Subsonic Speeds, NASA TR-48 (1959).
- 2) Ueda, T.: Expansion Series of Integral Function Occurring in Unsteady Aerodynamics, J. Aircraft, 19(1982), pp. 345-347.
- 3) Ando, S and Kato, M.: An Improved Kernel Function Computation in Subsonic Unsteady Lifting Surface Theory, Computer Meth. Appl. Mech. Engin., 49(1985), pp. 343-355.
- 4) Ando, S. and Ichikawa, M.: A New Numerical Method of Subsonic Lifting Surfaces-BIS, Trans. Japan Soc. Aero. Space Sci., 29(1986), pp. 101-118.
- 5) Lottati, I. and Nissim, E.: Three-Dimensional Oscillatory, Piecewise Continuous-Kernel Function Method (Part I - III), J. Aircraft, 18(1981), pp. 346-351, 352-355, 356-363.
- 6) Desmarais, R. T.: An Accurate Method for Evaluating the Kernel of the Integral Equation Relating Lift to Downwash in Unsteady Potential Flow, NASA TM 83281 (1982).
- 7) Multhopp, H.: Methods for Calculating the Lift Distribution of Wings (Subsonic Lifting Surface Theory), R. & M. 2884(1950).
- 8) Ando, S. and Ichikawa, A.: Quadrature Formulas for Chordwise Integrals of Lifting Surface Theories, AIAA J., 21(1983), pp. 466-467.