低レイノルズ数型 $k-\epsilon$ 乱流モデルを用いた境界層の遷移計算^{*1}Transition Calculations of Boundary Layers with Low-Reynolds-Number Versions of $k-\epsilon$ Turbulence Model藤 沢 延 行^{*2}・岡 沢 政 喜^{*2}

Nobuyuki FUJISAWA, Masanobu OKAZAWA

白 井 紘 行^{*2}

and Hiroyuki SHIRAI

Key Words: Boundary Layer, Transition, Numerical Analysis, Turbulence Model, Low-Reynolds-Number $k-\epsilon$ Model

Abstract

Calculations of laminar-turbulent transition of boundary layers are presented with low-Reynolds number versions of $k-\epsilon$ model of turbulence developed for the near-wall low-Reynolds-number flows. The models are tested for the transitional boundary-layers at various levels of free-stream turbulence with and without the pressure gradient. The test calculations of flows without the pressure gradient show that the model by Launder-Sharma and that by Lam-Bremhorst to some extent are able to handle the transition phenomena within a reasonable range of initial conditions of dissipation. The former model can reproduce the observed effects of level and length scale of free-stream turbulence on the transition, though the latter fails at the lower turbulence level and for the effect of length scale. It is also noted that the applicable range of the low-Reynolds-number $k-\epsilon$ model is limited to a relatively small pressure-gradient condition, as the model shows an opposite trend to the experimental effect of pressure gradient on the transition.

1. ま え が き

乱れエネルギー k と散逸 ϵ を未知数とする $k-\epsilon$ 型 2 方程式乱流モデルは、少ない方程式数で乱流を記述し、また比較的良好な精度でその特性を予測できることから、最近では工学上の流れ計算に盛んに使われている。また、このモデルの欠点を補うために開発された代数応力方程式モデルや低レイノルズ数型モデルも含めると、2 方程式モデルの適用範囲はかなり広いと言える。さて、翼表面に形成される境界層の挙動につい

て考えると、翼先端付近には層流境界層が形成されるが、一般に、主流の乱れ強さや長さスケール、圧力勾配、流れの非定常性、翼面粗さ、翼面曲率、熱伝達、音などの影響で乱流へ遷移し、さらに完全乱流へと移行する。このうち、主流の乱れによる境界層の遷移は、翼まわりの流れを数値計算するうえでしばしば問題となる。これについては、一般に、実験式に基づいて遷移点を決め、その位置で境界層厚さが連続となるように層流と乱流を別々に計算する方法がとられる。一方、低レイノルズ数型 $k-\epsilon$ モデルが遷移計算に適用できれば、層流から乱流までの全領域を同一のモデルで計算できる利点がある。

過去に示された低レイノルズ数型 $k-\epsilon$ モデルを用いた遷移計算のうち多くの報告¹⁻³⁾は、実験との比較や境界条件についての説明が不十分なうえ、乱流境界層の低レイノルズ数領域の特性を十分再現できないことも考えられる⁴⁾ため、Rodi-Scheuerer⁵⁾が示したLam-Bremhorstモデル⁶⁾に基づく遷移計算法のみが有効な方法と言える。しかしながら、このモデルにおいても、彼らが指摘しているように主流乱れの小さい範囲には適用できないことや、著者が計算に使用したところ遷移点が主流乱れの長さスケールの入力値にかなり敏感に反応したことなど実験に適合しない点があり、さらに洗練された遷移モデルの確立が急務と言える。

本報告では、壁乱流の低レイノルズ数領域の計算に適用できる低レイノルズ数型 $k-\epsilon$ モデル⁶⁻¹⁰⁾の中から、遷移計算に適合するモデルを示し、また、それを用いて種々の主流乱れにおける境界層の遷移計算を行う。さらに、順、逆圧力勾配下の境界層の遷移計算にも適用し、実験との比較からこの遷移モデルの適用範囲について考察する。

^{*1} 平成元年9月1日原稿受理^{*2} 群馬大学工学部

2. 乱流モデルと基礎方程式

2.1 低レイノルズ数型 $k-\varepsilon$ モデル 第1図に示すように、平板に沿って発達する境界層を考える。ここに、座標系は平板前縁を原点 o とし、主流方向に x 、壁面に垂直方向に y をとる。平板前縁付近では境界層は層流状態にあるが、主流乱れや圧力勾配などの影響で境界層は乱流遷移し、下流方向へ発達する。いま、層流境界層を乱れの十分小さい低レイノルズ数乱流と考えると、低レイノルズ数型 $k-\varepsilon$ モデルを用いた境界層の遷移計算が可能である。

非圧縮性二次元境界層に対する低レイノルズ数型 $k-\varepsilon$ モデルは、次のとおり書き表される。

$$U \frac{\partial k}{\partial x} + V \frac{\partial k}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial y} \right] - \overline{uv} \frac{\partial U}{\partial y} - \bar{\varepsilon} - D \quad (1)$$

$$U \frac{\partial \bar{\varepsilon}}{\partial x} + V \frac{\partial \bar{\varepsilon}}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \bar{\varepsilon}}{\partial y} \right] - c_{\varepsilon 1} f_1 \frac{\bar{\varepsilon}}{k} \overline{uv} \frac{\partial U}{\partial y} - c_{\varepsilon 2} f_2 \frac{\bar{\varepsilon}^2}{k} + E \quad (2)$$

ここに、

$$\nu_t = c_{\mu} f_{\mu} k^2 / \bar{\varepsilon} \quad (3)$$

$$\bar{\varepsilon} = \varepsilon - D \quad (4)$$

である。ただし、 U, V はそれぞれ主流方向およびそれに垂直方向の時間平均速度成分で u, v はそれらの

第1図 境界層遷移の概念図

速度変動成分、 ν は流体の動粘度、 $\bar{\quad}$ は時間平均である。過去に報告された低レイノルズ数型 $k-\varepsilon$ モデルはいずれも壁面近くの低レイノルズ数領域を表すために開発されたものであるが、それらの低レイノルズ数関数および定数値は第1表に示すとおりである。ただし、いずれのモデルにおいても $c_{\mu}=0.09, \sigma_{\varepsilon}=1.3$ である。ここに、 $R_t = k^2 / (\nu \bar{\varepsilon})$, $R_y = \sqrt{k} y / \nu$, $y^+ = U_{\tau} y / \nu$ であり、 U_{τ} は壁面摩擦速度を表す。これらの低レイノルズ数型 $k-\varepsilon$ モデルは、境界層近似した運動方程式

$$U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu \frac{\partial U}{\partial y} - \overline{uv} \right) \quad (5)$$

と連続の式

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \quad (6)$$

そして、渦粘性表現

$$-\overline{uv} = \nu_t \frac{\partial U}{\partial y} \quad (7)$$

と連立することによって、境界層の遷移計算に応用できる。ただし、 P は圧力、 ρ は流体の密度を表す。

2.2 境界条件 上流側の境界条件としては、層流境界層における時間平均速度 U 、乱れエネルギー k 、散逸 ε の断面内分布を与える必要がある。 U については、層流境界層に対するポールハウゼンの近似式を用いる。

$$\frac{U}{U_e} = 2 \frac{y}{\delta} - 2 \left(\frac{y}{\delta} \right)^3 + \left(\frac{y}{\delta} \right)^4 + \frac{\Lambda}{6} \frac{y}{\delta} \left(1 - \frac{y}{\delta} \right)^3 \quad (8)$$

ただし、 $\Lambda (= \delta^2 / \nu \cdot dU_e / dx)$ は圧力勾配の影響を表すパラメータ、 U_e は主流の速度、 δ は境界層厚さである(添字 e は主流における物理量を表す)。一方、このような条件下における k と ε の分布についての測定例はほとんど見られないため、壁近くの低レイノルズ数領域での挙動を参考にして、次のように与える⁵⁾。すなわち、乱れエネルギー k は、壁面で0かつ壁面近

第1表 種々のモデルにおける低レイノルズ数関数および定数

Model	Code	f_{μ}	f_1	f_2	E	D	$\bar{\varepsilon}$	$c_{\varepsilon 1}$	$c_{\varepsilon 2}$	σ_k
Launder-Sharma	LS	$\exp \left[\frac{-3.4}{(1+R_t/50)^2} \right]$	1.0	$1-0.3 \exp(-R_t^2)$	$2\nu_t \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right)^2$	$2\nu \left(\frac{\partial \sqrt{k}}{\partial y} \right)^2$	0	1.44	1.92	1.0
Chien	CH	$1-\exp(-0.0115y^+)$	1.0	$1-0.22 \exp \left[-\left(\frac{R_t}{6} \right)^2 \right]$	$-2\nu(\bar{\varepsilon}/y^2) \times \exp(-0.5y^+)$	$2\nu \frac{k}{y^2}$	0	1.35	1.8	1.0
Lam-Bremhorst	LB	$[1-\exp(-0.0160R_y)]^2 \times \left(1+\frac{19.5}{R_t} \right)$	$1+\left(\frac{0.06}{f_{\mu}} \right)^3$	$1-\exp(-R_t^2)$	0	0	$\frac{\partial \varepsilon}{\partial y}=0$	1.44	1.92	1.0
Nagano-Hishida	NH	$\left[1-\exp \left(-\frac{y^+}{26.5} \right) \right]^2$	1.0	$1-0.3 \exp(-R_t^2)$	$\nu \nu_t (1-f_{\mu}) \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right)^2$	$2\nu \left(\frac{\partial \sqrt{k}}{\partial y} \right)^2$	0	1.45	1.9	1.0
Myong-Kasagi	MK	$\left(1+\frac{3.45}{\sqrt{R_t}} \right) \left[1-\exp \left(-\frac{y^+}{70} \right) \right]$	1.0	$\left[1-\frac{2}{9} \exp(R_t/6) \right]^2 \times [1-\exp(-y^+/5)]^2$	0	0	$\frac{\partial \varepsilon}{\partial y}=0$	1.4	1.8	1.4

くで $k \propto y^2$ の関係に従うこと⁴⁾、そして境界層外側の主流乱れエネルギー k_e に分布が漸近する条件を加え、

$$k/k_e = (U/U_e)^2 \quad (9)$$

と与える。また、 ε の境界条件は、式(1)で局所平衡を仮定し、 $y \rightarrow 0$ で $\bar{\varepsilon} \rightarrow 0$ となることを考慮して次式で与える。

$$\bar{\varepsilon} = ak(\partial U / \partial y) \quad (10)$$

ただし、 $a = \sqrt{c_\mu f_\mu}$ である。完全乱流では $f_\mu = 1$ であるから $a = 0.3$ となるが、低レイノルズ数乱流では $f_\mu = 0 \sim 1$ の値をとるため、 a 値のとりうる範囲は $0 \sim 0.3$ 程度と考えられる。一方、Rodi-Scheuerer⁵⁾ は、Lam-Bremhorst モデルを用いた境界層の遷移計算を行い、計算と実験との一致性から a 値を主流乱れ強さ $T_u (= \sqrt{u_e^2} / U_e)$ の経験的関数として与えた。それによると、乱れ強さ T_u が 2.5% までは $a = 0 \sim 0.3$ の範囲にあるが、それ以上では 0.3 より大きくなり上記の a 値の条件を満足しない。また、式(10)は、 $\partial U / \partial y = 0$ となる境界層の外側位置では $\bar{\varepsilon} = 0$ となり、主流の境界条件 ($\varepsilon = \varepsilon_e$) を満足しないため、その領域では式(10)に次式の条件を加える。

$$\varepsilon \geq \varepsilon_e = k_e^{3/2} / L_e \quad (11)$$

ただし、 k_e は主流の乱れエネルギー、 L_e は乱れの長さスケールであり、いずれも上流側境界条件位置における実験値を与える必要がある。これによって、主流の乱れ強さと長さスケールの影響を計算上考慮することになる。上流境界条件の一例として、第2図に、平均速度 U 、乱れエネルギー k 、散逸 ε 、そして長さスケール L の分布を示す。ただし、主流乱れ $T_u = 2\%$ で零圧力勾配下の場合である。

主流側の境界条件としては、平均速度 U に対して、

$$U = U_e \quad (12)$$

一方、乱れエネルギー k 、散逸 ε については、次式で与えた。

$$U_e \frac{dk_e}{dx} = -\bar{\varepsilon}_e \quad (13)$$

第2図 上流側境界条件の一例 ($T_u = 2\%$, $L_e/\delta = 16$, $R_e = 100$)

$$U_e \frac{d\bar{\varepsilon}_e}{dx} = -c_{\varepsilon 2} \frac{\bar{\varepsilon}_e^2}{k_e} \quad (14)$$

したがって、主流側の値 k_e , ε_e は、これらの関係に従って下流方向に変化することになる。一方、壁側の境界条件は、

$$U_w = k_w = 0 \quad (15)$$

であり、また、 ε_w については第1表に示すとおりモデルに依存する (添字 w は壁面における物理量を表す)。

2.3 数値計算法 数値計算は、Spalding¹¹⁾ の GENMIX コードを基本として、前進差分法により U , k , ε の下流方向変化を計算した。計算グリッドは、非等間隔で壁面近くでは密にし、壁面に垂直方向に 80 点以上、壁面に最も近いグリッド位置は $y^+ \leq 1$ の条件を満たすようにした。また、流れ方向のグリッド間隔は、運動量厚さ θ の 25% 程度である。この条件下では、形状係数 $H (= \delta^*/\theta)$ 、摩擦係数 $c_f (= \tau_0 / (0.5\rho U_e^2))$ 、レイノルズ数 $Re (= U_e \theta / \nu)$ などの計算結果はグリッドにほとんど依存しない結果が得られる。ここに、 δ^* は排除厚さ、 θ は運動量厚さ、そして τ_0 は壁面せん断応力である。

3. 結果および考察

3.1 乱流境界層 第3図は、第1表に示した種々の低レイノルズ数型 k - ε モデル (第1表のコードで示す) を用いて、零圧力勾配下の乱流境界層における摩擦係数 c_f の下流方向変化¹²⁾ を数値計算した結果である。ただし、上流側の境界条件としては、十分に発達した乱流境界層の U , k , ε の実験値を用いた。図からわかるように、第1表に示したいずれのモデルを用いた場合にも計算と実験とはかなり良く一致しており、各モデルの低レイノルズ数関数が壁近くの低レイノルズ数領域を良く再現していることがわかる。さらに詳しい低レイノルズ数型 k - ε モデルの比較は、文献^{4,13)} に示されている。

3.2 零圧力勾配下における境界層の遷移 第4図

第3図 零圧力勾配下の乱流境界層における摩擦係数 c_f の下流方向変化

第4図 遷移計算における散逸の初期パラメータ α と主流乱れの長さスケール L_e の影響 ($T_u=1.9\%$)

(a)～(d)は、層流境界層 ($Re=100$) において上流側境界条件 (式(8)～(11)) を与え、第1表の低レイノルズ数型 $k-\varepsilon$ モデルを用いて平板境界層の遷移時における形状係数 H の下流方向変化を計算した結果である。ただし、数値計算結果は、上流側境界条件位置における主流の乱れ強さ $T_u=1.9\%$ の Abu-Ghannam の実験^{14,15)} と対比して示した。ここに、図(a), (b) は ε の境界条件に含まれる α 値を Rodi-Scheuerer⁵⁾ の経験式を用いて T_u の関数として与えた結果であり ($\alpha=0.165$)、図(c), (d) は $\alpha=0.3$ (乱流状態に対する値) とした結果である。ただし、主流乱れの長さスケール L_e は、乱れの等方性を仮定し、主流乱れ強さの下流方向減衰の実験値から求めると、 $L_e=0.011$ m と求まるが (図(a), (c))、 L_e の影響を検討するため $L_e=0.022$ m とした計算結果も示す (図(b), (d))。これらの図から、 α 値の増大 (ε の増大) は、遷移点を下流方向へ移動させる効果があること、および、その移動量はモデルによってかなり異なることがわかる。LS モデルと LB モデルでは、 α 値のとりうる範囲 ($\alpha=0\sim0.3$) において実験との一致が見られるが、CH, NH, MK モデルでは遷移がかなり上流側で生じており、実験との一致はこの α 値の範囲では得られていない。このモデルごとに異なる遷移挙動はモデルに含まれる低レイノルズ数関数 f_μ の関数型に強く依存すると考えられる。LS, LB モデルでは、 f_μ が乱れレイノルズ数 Re_τ または Re_y の関数で与えられているが、

CH, NH, MK モデルでは無次元距離 y^+ の関数が含まれている。したがって、第3図から明らかなように、壁近くの低レイノルズ数領域では Re_τ , Re_y , y^+ などを含むいずれの関数型の採用も可能であるが、遷移計算においては Re_τ または Re_y の使用が有効であるといえる。一方、 L_e の影響は、LB モデルでは顕著に認められるが、LS モデルではさほど大きくない。また、CH, NH, MK モデルではほとんど認められない。実験的には、この程度の L_e の変化による遷移点の移動は十分小さいことが予期されるため^{14,15)}、LB モデルで認められる遷移点の移動は大きすぎると考えられる。したがって、LS モデルが遷移計算に適合すると考えられる。しかしながら、遷移に及ぼす L_e の影響については不明な点が多く、さらに詳しい実験的究明が必要と思われる。

第5図(a)～(d)は、種々の主流乱れ強さにおける境界層の遷移実験と LS, LB モデルを用いて遷移計算を行った結果を対比して示す。ただし、形状係数 H 、摩擦係数 c_f 、そしてレイノルズ数 Re_θ について示した。ここに、散逸の初期パラメータである α 値は、LS モデルでは $\alpha=0.3$ と固定し、LB モデルでは Rodi-Scheuerer の経験式⁵⁾ を用いて算出した。主流乱れ強さ T_u の大きい場合 (図(c), (d)) には、LS, LB いずれのモデル計算結果においても、 H , c_f , Re_θ の値は層流状態から乱流状態へと遷移挙動を示しており、実験結果との一致もほぼ良好と言える。ただし、

第5図 種々の主流乱れにおける零圧力勾配下の境界層遷移の計算

c_l の計算結果は、実験と比べ遷移領域における変化が急峻である。このことは、このようなモデル計算における一般的傾向と考えられる^{5,16)}。したがって、これらのモデル計算では、遷移開始点については実験との一致は得られるが、遷移区間の長さのような層流と乱流が断続的に現れる遷移挙動は再現できないと考えられる。一方、 T_u が減少すると (図(b)), LBモデルの示す遷移位置が下流方向へ移動し始めることが認められ、実験との不一致が大きくなる。さらに T_u の小さい場合 (図(a)) には、LBモデルでは遷移挙動は

認められず、LBモデルを用いた遷移計算の限界を示す。この T_u の小さい領域におけるLBモデルの遷移遅れ挙動は、Rodi-Scheuererの遷移計算結果⁵⁾にも認められる。このことは、式(2)で局所平衡を仮定した次式を考えると明らかである。

$$\bar{\varepsilon} = \sqrt{\frac{C_{e1}f_1}{C_{e2}f_2} C_\mu f_\mu} \cdot \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right) \quad (16)$$

すなわち、LBモデルでは T_u が小さくなると乱れレイノルズ数 R_t が小さくなるが、このとき第1表からわかるように低レイノルズ数関数 f_μ と $1/f_2$ が顕著な

増大を示すため、上式より ε がかなり大きくなり、それによって遷移遅れを発生すると考えられる。この現象は、散逸の初期パラメータ a を十分小さくしても避けられないようである。一方、LS モデルを用いた計算結果では、このような T_u の小さい領域においても遷移挙動が認められ、また、実験との一致も良好である。このように、主流乱れの小さい領域における遷移挙動は、低レイノルズ数関数に起因すると考えられる。

第6図(a), (b)は、遷移領域における速度分布の一例として、主流乱れ強さ $T_u=1.9\%$ の場合の計算と実験の対比結果である。ただし、図(a)はLSモデルを用いた場合、図(b)はLBモデルを用いた場合である。いずれのモデルにおいても、遷移が始まると層流の速度分布が壁面付近を中心として増大し、徐々に乱流の速度分布に近接する様子が認められ、実験とも定性的に一致する。LSモデルでは遷移開始点が実験と良く一致しており、速度分布変化の全体的傾向をかな

第6図 遷移領域における速度分布 ($T_u=1.9\%$) 第7図 遷移開始レイノルズ数 R_{et} と主流の平均乱れ強さ T_{ua} の関係

り良く再現している。ただし、境界層の外側付近では、LBモデルの結果のほうが実験結果に近い。このように、遷移領域の速度分布も、また、モデルに含まれる低レイノルズ数関数に依存する。

第7図は、遷移開始位置におけるレイノルズ数 R_{et} が主流の平均乱れ強さ T_{ua} によって変化する関係を示す。ただし、計算では摩擦係数 c_f が遷移領域で極小となる位置を求めた。また、 T_{ua} は平板前縁位置における乱れ強さと遷移開始位置のその代数平均値である。一方、この関係は、図に示すように Abu-Ghannam の実験式^{14,15)}で表される。これらの結果から、 T_{ua} の大きい領域ではいずれのモデル結果も実験と良く一致するが、LBモデルでは実験との一致が $T_{ua} \leq 2\%$ では得られず、その領域ではLSモデルのみが良好な結果を与えることがわかる。

3.3 順、逆圧力勾配下における境界層の遷移 第8図(a), (b)および第9図(a), (b)は、それぞれ、順、逆圧力勾配下における境界層の遷移計算結果を、種々の主流乱れ強さ T_u について Abu-Ghannam の実験^{14,15)}と対比して示す。ただし、図中の圧力勾配パラメータ $\lambda_\theta (= \theta^2/\nu \cdot dU_e/dx)$ は遷移開始点における値である。いずれの図においても、 T_u の比較的大きい場合には、LS, LB いずれのモデルを用いてもあまり差は認められず、実験との一致も良好である。しかしながら、LBモデルでは、 T_u の比較的小さい場合に実験との不一致が顕著になり、零圧力勾配下の遷移計算結果と同様の傾向を示す。

第8図 順圧力勾配下の境界層における遷移計算

第9図 逆圧力勾配下の境界層における遷移計算

第10図 遷移開始レイノルズ数 $R_{\theta t}$ に及ぼす圧力勾配パラメータ λ_0 の影響

第10図は、順、逆圧力勾配下における境界層の遷移開始レイノルズ数 $R_{\theta t}$ と圧力勾配パラメータ λ_0 の関係を種々の平均主流乱れ強さ T_{ua} について示した結果である。図には、LS, LBモデルを用いた計算結果と Abu-Ghannam の実験式^{14,15)}を比較して示した。ただし、計算では Abu-Ghannam の実験における主流乱れの長さスケールの平均値として $L_0 = 0.015 \text{ m}$ を入力した。実験式によると、 λ_0 が増すと $R_{\theta t}$ は増大するが、この関係は LS, LBモデルを用いた計算結果には認められず、両者の示す圧力勾配の影響は定性的に一致しないことがわかる。しかしながら、計算、実験いずれの結果においても T_{ua} が増すと λ_0 による $R_{\theta t}$ の変化割合は小さくなることが認められ、 T_{ua} の大きい領域では、遷移レイノルズ数における両

第11図 低レイノルズ数関数 f_{μ} の分布 (LSモデル)

者の一致性は良好になる。計算結果に見られるこの λ_0 の影響は、LS, LBいずれのモデルにおいてもほぼ同様に認められることから、これは低レイノルズ数関数の違いに起因するものでないことが推測される。

第11図は、境界層遷移に強く関係する低レイノルズ数関数 f_{μ} の下流方向への発達過程を、順、逆圧力勾配の場合について対比して示した。ただし、この結果は、LSモデルを用い、主流乱れ $T_{ua} = 2\%$ とした場合である。図からわかるように、上流側境界条件位置に対応するレイノルズ数 $R_{\theta} = 100$ の結果では、 f_{μ} の分布は圧力勾配にほとんどよらないが、下流側の $R_{\theta} = 200$ および遷移直前の $R_{\theta} = 300$ では圧力勾配の影響が顕著に認められる。すなわち、順圧力勾配下の結果は、同一レイノルズ数の逆圧力勾配下の結果と比べ、より大きな f_{μ} の分布を示しており、より小さなレイノルズ数において乱流に遷移することを示す。この f_{μ} の増大は、それに含まれる乱れレイノルズ数 R_t の増大に対応する。したがって、それを構成する乱れエネルギー k と散逸 ε の関係に及ぼす圧力勾配の影響が実験と一致しないことになる。このことは、モデル方程式(1)、(2)に基づく限りでは実験に見られるような圧力勾配の影響は再現されないことを示唆する。一方、高レイノルズ数型 $k-\varepsilon$ モデルを用いた計算では、逆圧力勾配下の乱流境界層の特性はあまりよく表せないことが指摘されているが、その一解決策として、モデル方程式に $\partial U/\partial x$ による効果を加えた Hanjalić-Launder のモデルが有効と言われている^{17,18)}。第10図には、モデル方程式(1)、(2)にこの効果を加え(付録参照)、LSモデルを用いて $T_{ua} = 1\%$ の場合について計算した結果を比較のため示した。このモデル計算結果は、先に示したLSモデル結果よりも強く λ_0 による $R_{\theta t}$ の減少傾向を示しており、実験との不一致は改善されず、乱流境界層の場合との相違を示した。以上のことから、低レイノルズ数型 $k-\varepsilon$ モデルを用いた遷移計算法は、主流乱れの影響に対しては実験結果を良好に再現するが、圧力勾配の影響については定性的一致は得られず、その適用範囲は圧力勾配の小さい

領域に限られる。この欠点を改良するためには、低レイノルズ数型レイノルズ応力モデルによる検討が有効と考えられるが、そのためには順、逆圧力勾配下の境界層遷移についての詳細な実験データの集積が必要と思われる。

4. 結 論

壁乱流の低レイノルズ数領域の計算に適用できる5種の低レイノルズ数型 $k-\epsilon$ モデルを主流乱れによる境界層の遷移計算に応用し、遷移モデルとしての適合条件について検討した。また、零、順、逆圧力勾配下の境界層の遷移計算を行い、実験との対比から次の結論を得た。

(1) 低レイノルズ数関数に無次元距離 y^+ を含む CH, NH, MK モデルでは、予測される散逸の初期パラメータの範囲で実験との一致は得られず、乱れレイノルズ数 R_t または R_v を含む LS, LB モデルが妥当な遷移結果を与えた。

(2) LS モデルと LB モデルを比較すると、LS モデルは、散逸の初期パラメータを予測される範囲で一定にできること、遷移点に及ぼす主流乱れの長さスケールの影響が実験と定性的に一致すること、そして、乱れ強さの影響をより広い範囲で定量的に再現できる特長をもつ。

(3) 低レイノルズ数型 $k-\epsilon$ モデルの範囲では、遷移レイノルズ数に及ぼす圧力勾配の影響は再現されず、モデル計算の適用範囲は圧力勾配の小さい範囲に限られる。

終りに、本研究に対して助言をいただいたカールスルエ大学 W. Rodi 教授と B. Schönung 博士に感謝申し上げる。

参 考 文 献

- 1) Priddin, C. H.: The Behavior of the Turbulent Boundary Layer on Curved Porous Walls, Ph. D. Thesis, Imperial College, London, 1975.
- 2) Arnal, D., Habiballah, M. and Delcourt, V.: Synthèse sur les Methodes de Calcul de la Transition Développées on DERAT, ONERA, Rapp. Tech., OA No. 11/5018 AYD, 1980.
- 3) Dutoya, D. and Michard, P.: A Program for Calculating Boundary Layers along Compressor and Turbine Blades, Numerical Methods in Heat Transfer, ed. Lewis, R. W., Morgan, K. and Zienkiewicz, O. C., J. Wiley and Sons Ltd., New York, 1981, pp. 413-428.
- 4) Patel, V. C., Rodi, W. and Scheuerer, G.: Turbulence Models for Near-Wall and Low Reynolds Number Flows: A Review, AIAA J., 23 (1985), pp. 1308-1319.
- 5) Rodi, W. and Scheuerer, G.: Calculation of Laminar-Turbulent Boundary Layer Transition on Turbine Blades, Proc. 65th AGARD-PEP Symp., Bergen, 1985, Pap. 18.
- 6) Lam, C. K. G. and Bremhorst, K. A.: Modified Form of

the $k-\epsilon$ Model for Predicting Wall Turbulence, ASME J. Fluids Eng., 103 (1981), pp. 456-460.

- 7) Launder, B. E. and Sharma, B. I.: Application of the Energy-Dissipation Model of Turbulence to the Calculation of Flow near a Spinning Disc, Lett. Mass Trans., 1 (1974), pp. 131-138.
- 8) Chien, K.-Y.: Predictions of Channel and Boundary-Layer Flows with a Low-Reynolds-Number Turbulence Model, AIAA J., 20 (1982), pp. 33-38.
- 9) Nagano, Y. and Hishida, M.: Improved Form of the $k-\epsilon$ Model for Wall Turbulent Shear Flows, ASME J. Fluids Eng., 109 (1987), pp. 156-160.
- 10) 明 賢國, 笠木伸英: $k-\epsilon$ 乱流モデルに対する新たな提案とその評価 (第1報, 第2報), 日本機械学会論文集 (B編), 54 (1988), pp. 3003-3009; pp. 3512-3520.
- 11) Spalding, D. B.: GENMIX; A General Computer Program for Two-Dimensional Parabolic Phenomena, Pergamon Press, Oxford, 1977.
- 12) Coles, D. and Hirst, E. A.: Computation of Turbulent Boundary Layers, 1968 AFOSR-IFP-Stanford Conf., 2, Stanford, 1969.
- 13) 藤沢延行, 岡沢政喜, 白井紘行: 低レイノルズ数型 $k-\epsilon$ モデルを用いた平板境界層の遷移予測, 第4回生研 NST シンポジウム, 1989, pp. 9-15.
- 14) Abu-Ghannam, B. J.: Boundary-Layer Transition in Relation to Turbomachinery Blades, Ph. D. Thesis, Univ. Liverpool, 1979.
- 15) Abu-Ghannam, B. J. and Shaw, R.: Natural Transition of Boundary Layers-The Effects of Turbulence, Pressure Gradient, and Flow History, J. Mech. Eng. Sci., 22 (1980), pp. 213-228.
- 16) Jones, W. P. and Launder, B. E.: The Calculation of Low-Reynolds-Number Phenomena with a Two-Equation Model of Turbulence, Int. J. Heat Mass Trans., 16 (1973), pp. 1119-1130.
- 17) Rodi, W. and Scheuerer, G.: Scrutinizing the $k-\epsilon$ Turbulence Model under Adverse Pressure Gradient Conditions, ASME J. Fluids Eng., 108 (1986), pp. 174-179.
- 18) Hanjalić, K. and Launder, B. E.: Sensitizing the Dissipation Equation to Irrotational Strains, ASME J. Fluids Eng., 102 (1980), pp. 34-40.

付 録

Hanjalić-Launder¹⁸⁾に従って、 $\partial U/\partial x$ の影響を考慮すると、低レイノルズ数型 $k-\epsilon$ モデルの支配方程式は次のとおり表される。

$$U \frac{\partial k}{\partial x} + V \frac{\partial k}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial y} \right] - \overline{uv} \frac{\partial U}{\partial y} - (\overline{u^2} - \overline{v^2}) \frac{\partial U}{\partial x} - \bar{\epsilon} - D \quad (17)$$

$$U \frac{\partial \bar{\epsilon}}{\partial x} + V \frac{\partial \bar{\epsilon}}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \frac{\partial \bar{\epsilon}}{\partial y} \right] - f_1 \frac{\bar{\epsilon}}{k} \left\{ c_{\epsilon 1} \overline{uv} \frac{\partial U}{\partial y} + c_{\epsilon 3} (\overline{u^2} - \overline{v^2}) \frac{\partial U}{\partial x} \right\} - c_{\epsilon 2} f_2 \frac{\bar{\epsilon}^2}{k} + E \quad (18)$$

ここに、 $c_{\epsilon 3}=4.44$ である。また、 $\overline{u^2}$, $\overline{v^2}$ には、乱流境界層に対する実験的關係 $\overline{u^2}/k=1.1$ と $\overline{v^2}/k=0.25$ を用いる。