論文 CONTRIBUTED PAPERS

ϕ - ω を用いた非圧縮性流計算法の改良^{*1}

Some Improvements of an Incompressible Flow Solver in ϕ - ω Variables

賈 為^{*2}・中村佳朗^{*3}

Wei JIA, Yoshiaki NAKAMURA

保原 充^{*3}

and Michiru YASUHARA

Key Words : Incompressible Viscous Flow, ϕ - ω Scheme, Pressure Solver

Abstract

In this paper some improvements of numerical methods to solve incompressible Navier-Stokes equations in ϕ - ω variables are presented. The flow around a cylinder is selected as a test problem. First, the numerical instability due to a central difference approximation for convective terms is discussed, which was found to be strongly related to the pressure gradient in the flow field. Second, in order to remove this instability and treat relatively high Reynolds number flow problems, the third-order accurate upwind finite difference technique based on the GQ (Generalized QUICK) algorithm is incorporated to model the convective terms which yielded stable and reasonable results as expected. The accuracy of the two schemes: the central difference approximation and the GQ algorithm are checked by the calculation of viscous flows on a flat plate for two cases: $Re=10^4$ and 10^5 . Both results showed good agreements with Blasius' analytic solutions. The numerical viscosity due to the upwind finite difference approximation in the GQ scheme was rather small. Third, in order to obtain accurate pressure distributions from the calculated velocity field, the Poisson equation with Neumann boundary conditions is solved by the SOR and PCR method. This problem is well known for its difficult convergence. The following things were found. (a) By use of the SOR method, a convergence is very slow. After a number of iterations, the residual distributions in the field become independent of the

source distributions. This suggests that the SOR method can not cancel residuals in an effective way. (b) By use of the PCR method, a fast convergence is obtained within a few hundred iterations, but the residual can not be reduced after that. (c) At this time, deleting sources of which absolute values are smaller than some small given value can highly improve the convergence rate of the pressure Poisson equation.

1. ま え が き

ϕ (流れ関数)と ω (渦度)を変数とする非圧縮性流れの数値計算法はCFDのなかで最もよく研究されてきた方法の一つである。 u - v - p 法に比べて、従属変数が一つ少なく、連立方程式をより厳密に満足できるという利点や、流れを求める段階で圧力のポアソン方程式を解く必要がないという利点があげられる。

いままでなされた ϕ - ω 法の各種の研究をまとめると、その多くは、中程度のレイノルズ数での計算を想定し、慣性項に2次精度の中心差分または人工粘性の強い1次精度の風上差分を用いていた。レイノルズ数が高くなると、中心差分で近似された慣性項が不安定になることはよく知られているが、その挙動が数値解でどんな形で現れるかについて考察した報告が少ない。また、レイノルズ数が高い場合、1次精度の風上差分近似は数値粘性が本当の粘性よりも大きく、正しい結果が求まらないのは言うまでもない。

近年、 ϕ - ω 法の研究は鈍化しつつあった。その原因は、 ϕ - ω 法の適用範囲は(ベクトル・ポテンシャルを考えない限り)2次元に限られており、また、幾何学形状が複雑な場合、 u - v - p 法より境界条件を与え

^{*1} 平成元年3月31日原稿受理

^{*2} 名古屋大学大学院

^{*3} 名古屋大学工学部航空学科

にくいからである。そのためか、 $u-v-p$ 法にはいろいろな高精度スキームが開発されたにもかかわらず、 $\phi-\omega$ 法にはこのようなものはほとんど見当たらない。

本研究の一つの目的は、このような状況を踏まえ、 $u-v-p$ 法ですでに成功していたGQ法¹⁻⁷⁾を $\phi-\omega$ 法に導入し、 $\phi-\omega$ 表示で比較的高いレイノルズ数での流れにも適用できる計算コードを開発することにある。

$\phi-\omega$ 法は流れを求める段階で圧力が関係してこないが、得られた流れ場から圧力を正しく求めるためには、かなりの工夫が必要となる。圧力を求める方法として、直接、運動方程式を積分する方法がある。しかし、数値解にも求積法にも誤差が含まれているため、この方法を用いると、積分経路によって圧力の値が違ってくる。

圧力分布をより正確に求めるためのもう一つの方法は、運動方程式の発散をとり、圧力のポアソン方程式を作って、これを解く方法である。この場合、方程式の境界条件の全部または一部は必ずノイマン条件で与えられる。全ノイマン条件で与えられた場合、ポアソン方程式の解を保証するために、方程式のソースと境界での法線方向微分の間に、Gaussの定理により得られる拘束条件⁸⁾が満たされなければならない。外部流の場合、外側をディリクレ条件とノイマン条件のどちらで与えても同じ解が得られる⁹⁾との報告があり、ディリクレ条件を与えると境界での法線方向の微分が自己調整機能をもつため、拘束条件がいらなくなるが、ノイマン条件が混在する場合、普通の点反復法(たとえばSOR法)を用いては収束が非常に悪い。SOR法を用いた場合、十分な反復を終えた時点での残差分布が非常に特徴をもつ。このことがノイマン条件をもつポアソン方程式を解くのに、点反復法を用いるべきではないことに関係している。本研究のもう一つの目的は、圧力ポアソン方程式を精度よく解くための方法を探ることである。ここで、最近普及しつつあるPCR法と以前からのSOR法を比較し、両方法の収束性の相違について考察する。

収束性を調べる前に、合理的な判定基準を設ける必要がある。収束判定は普通相対残差によって行っているが、相対残差の性質が方程式の形に強く依存するので、方程式を変形して解く場合、変形された方程式の相対残差を用いては必ずしも元の方程式の収束状況を正しく反映しない。われわれは方程式が変形された際に、相対残差の式がどのような形を取るべきかについても検討する。

2章には流れ場の計算法が、3章には圧力の計算法が、4章には計算結果および収束性の改善策について

の検討が示され、最後に、5章には結言が述べられている。

2. 計 算 法

2.1 基礎方程式 用いられた基礎方程式は $\phi-\omega$ を変数とする2次元非圧縮性ナビエ・ストークス方程式で、一般座標での無次元化された形は以下のようになる。

$$\frac{\partial}{\partial t}(J\omega) + \frac{\partial}{\partial \xi}(JU\omega) + \frac{\partial}{\partial \eta}(JV\omega) = Re^{-1}J\nabla^2\omega \quad (1a)$$

$$\nabla^2\phi = -\omega \quad (1b)$$

ただし

$$\nabla^2(\quad) = J^{-2}\{\alpha(\quad)_{\xi\xi} - 2\beta(\quad)_{\xi\eta} + \gamma(\quad)_{\eta\eta} + \sigma(\quad)_{\eta} + \tau(\quad)_{\xi}\} \quad (1c)$$

$$U = \xi_x u + \xi_y v \\ V = \eta_x u + \eta_y v \quad (1d)$$

ここで、 ϕ は流れ関数、 ω は渦度である。 u, v はそれぞれ x 方向と y 方向の速度成分で、 U, V はそれぞれ η 方向、および、 ξ 方向に垂直の方向の反変速度成分である。また、 Re は物体長さを基準とするレイノルズ数である。

J は変換のヤコビアンで、 $\alpha, \beta, \gamma, \sigma, \tau$ は変換のメトリックである。これらは次のように定義される。

$$J = x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi, \quad \alpha = x_\eta^2 + y_\eta^2, \\ \beta = x_\xi x_\eta + y_\xi y_\eta, \quad \gamma = x_\xi^2 + y_\xi^2 \\ DX = \alpha x_{\xi\xi} - 2\beta x_{\xi\eta} + \gamma x_{\eta\eta} \\ DY = \alpha y_{\xi\xi} - 2\beta y_{\xi\eta} + \gamma y_{\eta\eta} \quad (2) \\ \sigma = (y_\xi DX - x_\xi DY)/J \\ \tau = (x_\eta DY - y_\eta DX)/J$$

式(1)で、渦度輸送拡散方程式の慣性項は保存形に、拡散項は非保存形になっている。また、流れ関数のポアソン方程式は渦度方程式の拡散項と同じ形で、非保存形になっている。これについて、Roache^{8,10)}は変数係数をもつ拡散項(一般座標の場合)に対して、非保存形表示の差分化は、保存形表示の差分化よりも正確な結果を与えることを指摘しており、これを配慮した。

2.2 計算スキーム 本研究は、式(1)に対して、慣性項を除くすべての空間微分を2次精度の中心差分で近似し、式(1a)の渦度輸送拡散方程式の慣性項に対して、2次精度の中心差分で近似する方法と、GQ法(Generalized Quick法)で近似する方法を用いて、その比較を行う。

流れ場のレイノルズ数が大きくなるにつれて、慣性項が不安定になることがよく知られている。GQ法は

これに対処するための一つの方法で、コントロール・ボリューム面に分離された慣性項を、2次の上流補間を用いて近似する方法である。これにより、慣性項の計算精度があがり、計算の安定性も高められる。GQ法については、著者らは文献6の中で詳しく説明しているため、ここでは、単にそれを ψ - ω 法に適用して得られた式を書く。

渦度輸送拡散方程式をコントロール・ボリューム面で積分すると、その慣性項はコントロール・ボリューム面に分離することができる。このとき、慣性項の一つの項を例にとり、GQ法によって近似すると以下のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta\eta} \int_{-\Delta\eta/2}^{\Delta\eta/2} (JU\omega)_{i+\frac{1}{2}J} d\eta' &= (JU)_{i+\frac{1}{2}J} \left\{ \frac{1}{2} (\omega_{i+1J} + \omega_{iJ}) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\Delta\xi^2}{8} CURV\omega_{i+\frac{1}{2}J}^\varepsilon + \frac{\Delta\eta^2}{24} CURV\omega_{i+\frac{1}{2}J}^\eta \right\} \\ CURV\omega_{i+\frac{1}{2}J}^\varepsilon &= \begin{cases} (\omega_{i+1J} - 2\omega_{iJ} + \omega_{i-1J})/\Delta\xi^2 & (JU)_{i+\frac{1}{2}J} > 0 \\ (\omega_{i+2J} - 2\omega_{i+1J} + \omega_{iJ})/\Delta\xi^2 & (JU)_{i+\frac{1}{2}J} < 0 \end{cases} \\ CURV\omega_{i+\frac{1}{2}J}^\eta &= \begin{cases} (\omega_{iJ+1} - 2\omega_{iJ} + \omega_{iJ-1})/\Delta\eta^2 & (JU)_{i+\frac{1}{2}J} > 0 \\ (\omega_{i+1J+1} - 2\omega_{i+1J} + \omega_{i+1J-1})/\Delta\eta^2 & (JU)_{i+\frac{1}{2}J} < 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (3)$$

式(1)の連立偏微分方程式の非定常解を求める。時間積分法として、ここではオイラーの陰解法を用いる。ゆえに、この場合、時間ステップごとの渦度の計算は反復計算となり、また、 ψ のポアソン方程式を解く計算も、反復計算となる。二つの計算は同じ時間レベルで行うのは厳密な考え方で、われわれは ω と ψ を同時緩和する方法を用いる。なお、緩和法には、ふつうよく用いられるベクトル化の容易なチェッカー・ボードSOR法を採用した。

収束判定については、本研究は流れの非定常解を求めているため、時間ステップごとに ω と ψ を反復計算により収束させてから、次の時間ステップに移る方法をとった。また、 ω と ψ を同時緩和しているため、収束制限は ψ (その値の大きさはあらかじめ予想しやすい)だけに与えればよい。収束判定は次のように与えた。

$$\textcircled{1} \quad k > 100$$

$$\textcircled{2} \quad \max|\psi^{k+1} - \psi^k| < \Delta r_{\min} \times 10^{-3}$$

ただし、 k は反復回数、 $\Delta r_{\min}$ は最小メッシュ間隔である。以上の条件のいずれかが満たされた場合に、次の時間ステップに移る。

2.3 境界条件 ψ - ω の境界条件について考案さ

れた方法は多く、とくに壁表面の ω については、何種類もの境界条件^{8,11,12)}が提案されている。われわれはそのなかで、最も基本的な、かつ信頼性のある方法を選んだ。 ψ について、

外側境界： $\psi = y \cos \alpha - x \sin \alpha$ 、ただし、 α は迎角。

物体表面： $\psi = \text{一定}$ で、 $\psi_0 = 0$ 。

$\psi_0 = 0$ は、2次精度の片側差分を取ると、 $(-3\psi_{i,1} + 4\psi_{i,2} - \psi_{i,3})/2 = 0$ となる。ここで、添字 η は、物体に垂直方向の微分を表す。また、 i は物体表面に沿う方向を、1, 2, 3はそれぞれ物体表面から法線方向に沿って物体表面、表面より一つおよび二つ上の点を表している。これを $\psi_{i,1}$ について解くと、以下のようになる。

$$\psi_{i,1} = (4\psi_{i,2} - \psi_{i,3})/3 \quad (4)$$

これを物体表面のすべての点で平均したものを物体表面の ψ とする。

ω について、

外側境界： $\omega = 0$

物体表面： $\omega = -(\alpha\psi_{\varepsilon\varepsilon} - 2\beta\psi_{\varepsilon\eta} + \gamma\psi_{\eta\eta} + \sigma\psi_{\eta} + \tau\psi_{\varepsilon})/J^2$ の関係から、物体表面の $\psi = \text{一定}$ ($\psi_{\varepsilon} = \psi_{\varepsilon\varepsilon} = 0$)と $\psi_{\eta} = 0$ に着目すると

$$\omega_{i,1} = -\gamma_{i,1}\psi_{\eta\eta}/J_{i,1}^2 \quad (5)$$

を得る。また $\psi_{i,2}$ を $\psi_{i,1}$ についてテーラー展開し、物体表面で $\psi_{\eta} = 0$ を代入すると

$$\psi_{i,2} = \psi_{i,1} + \frac{1}{2}\psi_{\eta\eta}\Delta\eta^2 + O(\Delta\eta^3) \quad (6)$$

となる。これを $\psi_{\eta\eta}$ について解き、 ω の式に代入すると、物体表面の ω は

$$\omega_{i,1} = -2(\psi_{i,2} - \psi_{i,1})\gamma_{i,1}/J_{i,1}^2 \quad (7)$$

となる。

3. 圧力の計算

3.1 表面積分法 物体表面での圧力分布は運動方程式を表面に沿って積分することにより求められる。物体表面では、運動方程式の時間微分項と慣性項が消えるので、以下の式が成立する。

$$p_x = -Re^{-1}\omega_y, \quad p_y = Re^{-1}\omega_x \quad (8)$$

これを一般座標に変換すると、物体表面に沿う圧力勾配は

$$p_{\varepsilon} = Re^{-1}J^{-1}(\beta\omega_{\varepsilon} - \gamma\omega_{\eta}) \quad (9)$$

となる。物体表面に沿って、圧力の全微分を後縁から積分すると

$$p - p_{\tau\varepsilon} = Re^{-1} \int_{\tau\varepsilon}^{\varepsilon} J^{-1}(\beta\omega_{\varepsilon} - \gamma\omega_{\eta}) d\xi \quad (10)$$

を得る。本研究では、この積分はシンプソンの数値積分によって近似される。

3.2 圧力のポアソン方程式 運動方程式の発散を取ると、圧力に関するポアソン方程式が得られる⁸⁾。デカルト座標の場合、その形は以下になる。

$$\nabla^2 p = D, \quad D = 2(u_x v_y - v_x u_y) \quad (11)$$

それを一般座標に変換した形は

$$J^{-2}(\alpha p_{\xi\xi} - 2\beta p_{\xi\eta} + \gamma p_{\eta\eta} + \sigma p_\eta + \tau p_\xi) = D \quad (12)$$

$$D = 2J^{-1}(u_\xi v_\eta - v_\xi u_\eta)$$

である。圧力の境界条件は、

外側境界: $p=0$

物体表面: $\partial p / \partial n = 0$

外部流問題の場合、外側をディリクレ条件とノイマン条件のどちらで与えても同じ解が得られる⁹⁾との報告がある。ポアソン方程式の境界条件は全てノイマン条件で与えられた場合、Gaussの発散定理より得られる以下の保存条件が満足されなければ、解を持たないことが知られている⁸⁾。

$$\int_R D dR = \int_{\partial R} (\partial p / \partial n) ds \quad (13)$$

ふつう、ポアソン方程式を差分法で離散化する際に、係数マトリックスが特異($|A|=0$)となるうえに、打ち切り誤差を含み、また、ソースの計算にも数値誤差が含まれているため、境界を含めて左辺($\sum \nabla_{i,j}^2 p = 0$) ≠ 右辺($\sum D_{i,j} \neq 0$)となる。これがいわゆる離散系では拘束条件が満たされていないということに相当する。この場合、反復解法を用いて解くと、残差がある程度しか落ちない。これに対処するために、ソースを修正する^{13,14)}か、または特別な定式化(保存形)と境界での特別な取扱い(内点と同一近似)^{15,16)}をする必要がある。たとえば、ソース修正法は、まず、以下の値を離散形で計算し、

$$E = \int_R D dR - \int_{\partial R} (\partial p / \partial n) ds \quad (14)$$

それから方程式のソースを以下のように修正する。

$$\nabla^2 p = D - E/R \quad (15)$$

修正された方程式は式(13)の拘束条件を恒等的に満たしているため、反復解法を用いると、より良い収束性が得られると言われている。

しかし、一方、外部流問題では、外側をディリクレ条件で与えても差し支えない。この場合、ディリクレ条件をもつ境界での法線方向微分が自己調整機能をもつため、拘束条件もなく、上のような修正も必要がない。このために、われわれは外側をディリクレ条件で与える従来の方法を採用した。ただし、ノイマン条件が部分的に混在した場合、普通のSOR法のような点反復法では収束性が非常に悪くなるため、これを改善するために、別の方法を考えなければならない。

3.3 数値解法 圧力のポアソン方程式を解くのに、SOR法は最もよく使われている。それは、ほか

の方法と比べてかなり簡単で、複雑な計算領域をもつ問題にも適用しやすいからである。境界条件が全てディリクレ条件で与えられた場合、最適緩和係数を選ぶことによって、合理的な収束速度が得られる。ベクトル化が要求されるスーパー・コンピュータを使う計算では、チェッカー・ボードSOR法が多く用いられている。一方、PCR法^{17,18)}は非対称マトリックスをもつ連立1次方程式を解くために近年開発された方法で、共役残差法に不完全LU分解を前処理に加えたものである。この方法はSOR法よりはるかに優れた収束性能を発揮しうする方法として紹介され、最近数値流体力学の計算に普及しつつあるが、場合によって収束しないケースもある。本研究はこの二つの方法を使って、圧力のポアソン方程式を解き、その性能を比較する。

3.3.1 チェッカー・ボードSOR法

$$p_{i,j}^{k+1} = p_{i,j}^k - (\omega/a_{i,j}) r_{i,j}^k, \quad r_{i,j}^k = (D - \nabla^2 p)_{i,j} \quad (16)$$

$$\nabla^2(\quad) = J^{-2} \{ \alpha(\quad)_{\xi\xi} - 2\beta(\quad)_{\xi\eta} + \gamma(\quad)_{\eta\eta} + \sigma(\quad)_{\eta} + \tau(\quad)_{\xi} \}$$

ここで、 $a_{i,j}$ は $p_{i,j}$ に掛かる係数($a_{i,j} = 2J_{i,j}^{-2}(\alpha + \gamma)_{i,j}$)で、 $r_{i,j}$ は点 (i,j) での残差である。また、 ω は緩和係数である。チェッカー・ボードSOR法は $i+j$ が奇数か偶数かによって、点を二つのグループに分け、最初のグループでは新しい情報を用いず、次のグループで、すべての隣点での新しい値を用いる。このことによって、回帰的な演算が避けられると同時に、通常のSOR法よりやや良い収束性が得られる。

3.3.2 PCR法(ILUCR法) 解くべき方程式を $Ax=b$ で表したとき、その非対称行列 A を以下のように不完全LU分解し、

$$A = LU + N \quad (17)$$

その後、共役残差法を適用する。つまり、連立一次方程式の両辺に $(LU)^{-1}$ を乗じて

$$(LU)^{-1}Ax = (LU)^{-1}b \quad (18)$$

を得る。この式に対し共役残差法を適用する。ただし、ここで採用した不完全LU分解は、もとの行列 A の非零成分が存在する部分だけについて行うものとする。

次にILUCR法のアルゴリズムについて述べる。以下に表す変数は α, β, μ を除いて全てベクトルまたは行列である。

(1) 適当な初期値 x_0 を選んで

$$r_0 = (LU)^{-1}(b - Ax_0), \quad p_0 = r_0, \quad q_0 = (LU)^{-1}Ap_0 \quad (19)$$

を計算する。

(2) 以下の計算を残差が要求精度より小さくなる

まで繰り返す.

$$\begin{aligned}\mu_k &= (q_k, q_k) \\ \alpha_k &= (q_k, r_k) / \mu_k \\ x_{k+1} &= x_k + \alpha_k p_k \\ r_{k+1} &= r_k - \alpha_k q_k \\ s_{k+1} &= (LU)^{-1} A r_{k+1} \\ \beta_{k+1} &= (s_{k+1}, q_k) / \mu_k \\ p_{k+1} &= r_{k+1} - \beta_{k+1} p_k \\ q_{k+1} &= s_{k+1} - \beta_{k+1} q_k\end{aligned}\quad (20)$$

3.3.3 収束判定 厳密解がわからないとき, 相対残差によって収束判定を行うのが最も適切とされているが, 相対残差の性質が方程式の形に強く依存するので, 方程式を変形して解く場合, 変形された方程式の相対残差を用いては必ずしも元の方程式の収束状況を正しく反映しない. 以下でこれについて検討する.

連立方程式を $Ax=b$ で表したとき, 残差ベクトルを $r=b-Ax$ で定義し, 相対残差の自乗ノルムは次のように定義される.

$$L2\text{-Residual} = \{(r, r) / (b, b)\}^{1/2} = (\sum r_{i,j}^2 / \sum b_{i,j}^2)^{1/2} \quad (21)$$

一方, 与えられた連立方程式を解くために, 意識的あるいは無意識的にその両辺に別のマトリックス B を乗じて $(BA)x=(Bb)$ を解くケースがよくある. このときの残差ベクトルは $r^*=B(b-Ax)=Br$ となり, 相対残差の自乗ノルムは次のようになる.

$$L2^*\text{-Residual} = \{(Br, Br) / (Bb, Bb)\}^{1/2} \quad (22)$$

これは元の方程式の残差に一種の重みを掛けることに等しい. これにより, 残差の性質が大きく変わりうる. 以上のことは圧力のポアソン方程式を座標変換するとき, および, PCR 法を用いて解くときに起こりうる.

まず, 座標変換の場合を考える. 式(12)は一般座標に変換された圧力のポアソン方程式である. $\nabla^2 p$ は $J^{-2}(ap_{\xi\xi} \dots)$ に変換されている. 方程式の残差は $r_{i,j}=(D-\nabla^2 p)_{i,j}$ である. ところが, 式(12)の両辺に J^2 を掛けて整理すると, 新しい式の残差が $r_{i,j}^*=J_{i,j}^2 \cdot r_{i,j}$ に変わってしまう. 物体表面から外側境界へ行くにつれ, J が急激に増加するので, r^* は外側近くでの残差を過大評価する性質をもち, 元の方程式の収束状況を正しく反映しないことがわかる. ゆえに, これを正しく評価するためには, 式(12)の変形を避けるか, または変形しても元の残差式を用いて評価する必要がある. これに関して, われわれは式の変形を避ける方法を採用した.

PCR 法を用いるときも, 同じことが起こる. この場合, $Ax=b$ を解く代わりに, $(LU)^{-1}Ax=(LU)^{-1}b$ を解いている. 元の残差を r とすると, r^*

$=(LU)^{-1}(b-Ax)$ となる. ここで都合のいいことは, $A \equiv LU$ だから, $r^* \equiv A^{-1}b-x$ となり, これが一種の収束判定基準として用いられる.

以上より, あるグリッド点での残差の式は SOR 法を用いるときに 2 種類:

$$(a) \quad r=(D-\nabla^2 p), \quad (b) \quad r^*=J^2 \cdot r \quad (23)$$

PCR 法を用いるときに 4 種類:

$$\begin{aligned}(a) \quad r &= (D-\nabla^2 p), \quad (b) \quad r^* = J^2 \cdot r, \\ (c) \quad r^{LU} &= (LU)^{-1}r, \quad (d) \quad r^{*LU} = (LU)^{-1}r^*\end{aligned}\quad (24)$$

得られる. これらの残差を基本残差 r と数値的に比べた結果は 4 章の後半に述べる.

収束を判定するのに, 最大変動量 $\Delta p_{\max} = \max|p^{k+1} - p^k|$ (式(16)より点残差の最大値にも比例する) もよく用いられるが, 式(21)の $L2\text{-Residual}$ は全ての格子点での残差を加えたため, より厳しい基準となっている.

4. 計算結果

本研究のテスト・ケースとして, 円柱まわりの流れを選んだ. また, スキームの精度を調べるために, 解析解のある前縁をもつ平板上の流れも計算した.

円柱まわりの流れを計算するとき, 円筒座標をベースとする O-メッシュを用いる. このとき, 計算領域は円柱直径 10 倍の円に取り, 表面から外側境界まで, 50 本のメッシュを用い, 円柱表面付近に集中するように分布させた. メッシュの最小間隔は 10^{-3} である. ちなみに, レイノルズ数が 10^5 の場合の平板境界層を例にとると, $x=1$ で境界層の中にメッシュが 9 本入ることになる. また, 円柱の周方向には, 基本として, 等間隔に分布した 40 本のメッシュを用いるが, 比較のため, それを 2 倍, 4 倍にしたメッシュも用いた.

前縁をもつ平板上の流れを計算するとき, 計算領域は平板の前縁から前方に, および, 表面から上方に, それぞれ平板長さの 10 倍をとった. メッシュは平板の表面と前縁に集中させ, その数は 121(平板上 61) $\times$ 61 である. 平板の計算において, いくつか注意しなければならない点がある. 一つには, 本研究では, 完全なナビエ・ストークス方程式を用いているため, 前縁付近では, Blasius の解析解と違って, 圧力の勾配が存在する. 二つ目に, この問題は本質的に定常状態をもつ問題で, 定常状態に達した段階で計算を打ち切ることができる. 最後に, この問題に用いられるメッシュは H メッシュで, 平板表面の ϕ は 0 と固定することができるが, 一方, 下流境界では自然流出条件を与える必要がある.

第1図 円柱まわりの速度ベクトル分布：中心差分スキーム，40×50 メッシュ
(a) $Re=10^2$ ，(b) $Re=10^3$ ，(c) $Re=10^4$ ，
(d) $Re=10^5$

第2図 円柱まわりの速度ベクトル分布：中心差分スキーム， $Re=10^4$
(a) 80×50 メッシュ，(b) 160×50 メッシュ

以下に計算結果について説明する。まず，円柱まわりの流れを中心差分スキームで計算した結果について示す。

第1図は40×50のメッシュで計算した結果である。第1図(a)～(d)は，それぞれレイノルズ数が 10^2 ， 10^3 ， 10^4 ， 10^5 で，無次元化時間 $T=5$ の速度ベクトル分布を示す。レイノルズ数が 10^3 までは，安定な計算結果が得られるが，レイノルズ数が 10^4 以上になると，中心差分近似による不安定性が起こり，計算は発散しないが，速度ベクトル分布に不合理な欠陥が現れる。中心差分近似を変えずに，それをなんとか克服するために，円柱の周方向にメッシュの数を2倍，4倍

第3図 円柱まわりの速度ベクトル分布：GQ法，40×50
メッシュ
(a) $Re=10^4$ ，(b) $Re=10^5$

に増やしてレイノルズ数が 10^4 の場合について再計算した。その結果を第2図(a)と(b)(周方向に2メッシュごとに描いたもの)に示す。周方向のメッシュを2倍に増やすことによって，不安定領域が小さくおさまったが，前縁付近にはまだかなり残っている。これは周方向のメッシュを4倍にしてほぼ消失した。しかし，慣性項の中心差分近似を変えない限り，時間積分を続けると，前縁付近でのごくわずかな振動が計算領域全体にゆきわたる可能性がまだ十分ある。もう一つに，周方向のメッシュを増やした結果，剝離領域の細かいパターンが変わった。これは解像度の問題で，当然のこととも言えるが，物体から離れる方向だけでなく，物体に沿う方向にもかなりのメッシュを入れないと，より現実に近い解が得られないことがよくわかる。

慣性項にGQ法を適用した結果を第3図に示す。第3図(a)と(b)はそれぞれレイノルズ数が 10^4 と 10^5 で，40×50のメッシュで得られた結果である。なお，無次元化時間は中心差分の場合と同じで， $T=5$ になっている。GQ法を用いることにより，中心差分近似で見られる計算の不安定性が完全になくなった。レイノルズ数が 10^4 の場合，GQ法で計算した結果は細かい格子での中心差分近似による結果とよく似ている。流れのレイノルズ数についての変化を見ると，レイノルズ数が大きくなるにつれ，流れの剝離領域が小さくなり，合理的な流れパターンとなっている。

次に，前縁をもつ平板上の流れを中心差分スキームとGQ法で計算した結果を示す。第4図(a)と(b)はそれぞれレイノルズ数が 10^4 と 10^5 の場合を中心差分近似で計算した結果(速度分布，摩擦応力，境界層厚さ)である。実線はBlasiusの解析解を，破線は計算結果を表している。前縁付近に摩擦応力の激しい勾配があるにもかかわらず，両者がよく一致していることがわかる。このケースにおいて，平板上のほとんどの

(a)

(b)

第4図 前縁をもつ平板上の流れ：中心差分スキーム，
121×61 メッシュ
(a) $Re=10^4$ ，(b) $Re=10^5$

(a)

(b)

第5図 前縁をもつ平板上の流れ：GQ法，121×61 メッシュ
(a) $Re=10^4$ ，(b) $Re=10^5$

領域で圧力勾配が小さいためか，レイノルズ数が 10^5 になっても中心差分による不安定性が全く現れていない。このことから，中心差分の不安定性は間接的に圧力勾配と深くかかわっていることが認識される。

第5図(a)と(b)は同じレイノルズ数の場合をGQ法で計算した結果を示す。計算結果は依然 Blasius の

(a)

(b)

第6図 円柱の表面圧力分布：GQ法で計算された速度分布から円柱表面積分により求めた。
(a) $Re=10^4$ ，(b) $Re=10^5$

(a)

(b)

第7図 圧力ポアソン方程式にSOR法を適用した時の相対残差の自乗ノルムと反復回数の関係： $Re=10^5$ ，中心差分スキームで得られた円柱まわりの速度分布から計算

(a) 反復回数1,000まで，(b) 反復回数5,000まで

解析解とよく一致している。

以下に，流れ場から圧力分布がどのように求められるかについて研究した結果を紹介する。まず，第6図はレイノルズ数が 10^4 と 10^5 で，GQ法で得られた円柱まわりの速度分布から，運動方程式を表面に沿って積分して得られた円柱の表面圧力分布である。速度分布は対称であるが，数値積分の誤差によって，求められた圧力分布が非対称になってしまう。

次に，ポアソン方程式を解いて圧力を求める方法について考える。レイノルズ数が 10^3 ，かつ中心差分スキームで求められた速度分布から圧力を求める。圧力に与えられた境界条件として，円柱表面はノイマン条件で，外側はディリクレ条件である。

第7図は，SOR法(最適緩和係数を使用)を用いた場合の相対残差の自乗ノルムと反復回数の関係を示す。ちなみに，縦座標は対数スケールである。この図

(a)

(b)

第8図 圧力ポアソン方程式のソース分布：等高線刻み幅 2.0

(a) 計算領域全体, (b) 円柱付近

から, r と r^* および $\Delta p_{\max}$ の間の二つの大きな相違があることがわかる. 一つに, 反復の初期段階で, r^* と $\Delta p_{\max}$ も反復回数とともに急激に下がるのに対し, r はあまり下がらない. これは, 初期の反復は主に外側付近の残差並びに最大残差を緩和しているが, 領域全体ではあまり改善されないことを意味し, この段階では, r^* または $\Delta p_{\max}$ を用いると収束性を正しく判定できない. 二つ目として, かなりの反復 (1,000 回以上) を終えた後, r , r^* および $\Delta p_{\max}$ の曲線がお互いに平行に, しかも直線になることである. この状態になると, どちらを収束の判定基準としてもよいが, オーダーの違いが常に存在するため, やはり r を用いたほうがよい. 実際の計算では, 反復回数をあまり大きくとれないから, r を用いるべきである.

次に, ポアソン方程式のソース分布と残差分布との関係を調べた結果について説明する. ポアソン方程式のソース分布を第8図に示す. 等高線の刻み幅は2.0で, 実線は正の値を, 破線は負の値を表している. ソースは円柱の表面近くと後流の部分に集中しており, 円柱から遠く離れたところではほとんどないことがわかる.

第9図に5,000回反復したときの計算領域中の残差

第9図 SOR法を用いた場合, 5,000回反復した時の計算領域中の残差分布

第10図 SOR法で得られた計算領域中の圧力分布
(a) 反復回数1,000, (b) 反復回数5,000

分布が示されている. 十分反復したときの残差分布がソース分布と全く無関係になるという意外な結果が得られた. これはノイマン条件をもつポアソン方程式を解くのに, SOR法を用いては残差を効率よく緩和できないことを示唆している.

SOR法で得られた計算領域中の圧力分布を第10図に示す. 第10図(a)と(b)はそれぞれ反復回数が1,000回と5,000回の結果である. 反復回数が5,000回になった段階で, ようやく圧力分布のパターンが変化しなくなった.

次に, PCR法を用いて上の問題を解いたときの相

第11図 圧力ポアソン方程式にPCR法を適用した時の
相対残差の自乗ノルムと反復回数の関係: $Re = 10^3$, 中心差分スキームで得られた円柱まわりの
速度分布から計算
(a) ソースにフィルターなし, (b) ソースにフィルター
あり

第12図 PCR法で得られた計算領域中の圧力分布
(a) ソースにフィルターなし, (b) ソースにフィルター
あり

対残差の自乗ノルムと反復回数の関係を第11図(a)に示す。 r と $(LU)^{-1}r$ とも最初, 反復回数とともに急激に下がり, ある値になると下がらなくなることがわかる。このとき, 偶然とはいえ, 圧力ポアソン方程

第13図 表面圧力分布と空力係数
(a) SOR法で5,000回反復
(b) PCR法, ソースにフィルターなし,
(c) PCR法, ソースにフィルターあり

式のソースに以下のフィルターを掛けると, 収束性がかなり改善されることを見出した。

$$D_{i,j}^{\text{new}} = \begin{cases} D_{i,j}, & |D_{i,j}| \geq \varepsilon \cdot |D_{\max} - D_{\min}| \\ 0, & |D_{i,j}| < \varepsilon \cdot |D_{\max} - D_{\min}| \end{cases} \quad (25)$$

ここで ε は微小な値(本ケースでは 10^{-5})をとる。このときの相対残差の自乗ノルムと反復回数の関係を第11図(b)に示す。収束性が改善される原因についてははっきりしないが, 計算された流れ場の精度を考えると, ここで取り除かれた微小ソースはノイズとしてしか作用しないことがわかる。共役残差法等の解法は要するに有限次元の線形空間内で適切な傾斜方向を探しだし, この方向に沿って残差ベクトルを緩和する方法である。ポアソン方程式のソースにノイズが多く含まれている場合, 傾斜方向を正確に決めることがきわめて困難である。ノイズを取り除くことにより, これが正確に行え, これは収束性改善の理由と考えられる。

第12図にはPCR法で得られた計算領域中の圧力分布が示されている。第12図(a)はフィルターを掛けていない場合で, (b)はフィルターを掛けた場合である。図形を描く精度の範囲内では, 両者が完全に一致している。また, SOR法(反復回数5,000)の結果とも完全に一致している。第13図は表面圧力分布と空力係数を示す。第13図(a)~(c)はそれぞれSOR法で5,000回反復して得られた結果と, PCR法でフィルターを掛けていない場合と掛けた場合の結果を示す。圧力分布も, 空力係数もほとんど同じになっていることがわかる。

本研究では基本的に, 計算領域を円柱直径の10倍の円にとって計算を行ってきたが, 流れ関数の値を外側境界で一様流に固定していることもあり, これが十分であるかどうかを調べる必要がある。われわれは η 方向のメッシュを増やし, 計算領域を円柱直径の30

第14図 計算領域を円柱直径の30倍に広げた時の計算結果： $Re=10^3$ ，中心差分スキーム

- (a) 速度分布，(b) 表面圧力分布：PCR法，ソースにフィルターあり，
 (c) 収束特性と場の中の圧力分布：PCR法，ソースにフィルターあり，
 (d) 収束特性と場の中の圧力分布：PCR法，ソースにフィルターなし

第15図 レイノルズ数が 10^4 での円柱まわりの圧力分布: PCR 法, ソースにフィルターあり
(a) 収束特性, (b) 計算領域中の圧力分布, (c) 表面圧力分布と空力係数

第16図 レイノルズ数が 10^5 での円柱まわりの圧力分布: PCR 法, ソースにフィルターあり
(a) 収束特性, (b) 計算領域中の圧力分布, (c) 表面圧力分布と空力係数

倍の円に拡げて, レイノルズ数が 10^3 の場合について, 中心差分スキームを用いて再計算した. このときの速度分布を第14図(a)に, PCR法で, フィルターを掛けて計算した表面圧力分布および場の中の圧力分布を(b), (c)に, フィルターを掛けずに計算した場の中の圧力分布を(d)に示す. 速度分布とフィルターを掛けて計算した圧力分布はいままでのものと同様であったが, フィルターを掛けないと, 圧力ポアソン方程式の収束解が得られなかった. ちなみに, SOR法で5,000回反復して得られた場の中の圧力分布はフィルターを掛けて計算されたものと同一であることが確認されている. 以上の比較により, フィルターの妥当性が証明される.

最後に, レイノルズ数が 10^4 と 10^5 で, GQ法で得

られた円柱まわりの速度分布から, 圧力分布を求めた結果(PCR法, フィルターあり)を第15図と第16図に示す. 第6図の積分法で求められた表面圧力分布と比較すると, 上面と下面に圧力分布が対称となり, 精度のよい解が得られたと言える. 流れのパターンとしては, レイノルズ数が高くなるにつれ, 圧力の等高線が物体近くに集まることがわかる.

5. 結 言

ϕ - ω を変数とする非圧縮性流れの数値計算法について研究を行い, 以下の結果が得られた.

1) 慣性項に中心差分を用いる近似はレイノルズ数が高くなる(10^4 程度)につれ, 不安定になる. この不安定性は圧力勾配と大いに関係があり, 円柱の場合,

これは圧力勾配のもっとも高い激点付近から始まる。周方向の計算格子を増やすことによって、不安定領域が小さく抑えられるが、完全に無くすることは難しい。

2) 慣性項にGQ法を適用することにより計算の不安定性が取り除かれる。本研究によって、 ψ - ω 表示のGQ法計算コードが開発された。このコードを用いれば、 ψ - ω 表示でも、比較的高いレイノルズ数での流れを計算することができる。

3) 中心差分近似とGQ法により、前縁をもつ平板上の流れを計算した。両者ともBlasiusの解析解とよく一致した。これにより、GQ法による数値粘性がかなり小さいことが実証される。

さらに、計算された速度分布から圧力のポアソン方程式を解くことにより、圧力を求める方法を検討した。用いられた反復法は、SOR法およびPCR法である。この研究により、次のことがわかった。

1) 圧力ポアソン方程式の境界条件にノイマン条件がある場合、SOR法を用いると収束性が非常に悪い。その理由の一つに十分反復した後の計算領域中の残差分布がポアソン方程式のソース分布と無関係になることが挙げられる。しかし、収束性が悪いにもかかわらず、反復を続けることにより残差を連続的に減らすことができる。

2) PCR法を用いた場合、流れ場から計算されたソースを直接使うと、残差がある程度しか減少しない。これはソースにノイズが多く含まれていることによると考えられる。

3) この場合、ソースにフィルターを掛けることにより収束性をかなり改善することができる。以上の操作は解に悪い影響を与えないことが確認された。

参考文献

- 1) Nakamura, Y. and Takemoto, Y.: Solutions of Incompressible Flows Using a Generalized Quick Method, in Numerical Proceedings of the International Symposium on Computational Fluid Dynamics—Tokyo, K. Oshima, ed., 1986, pp. 285-296.
- 2) Takemoto, Y. and Nakamura, Y.: Three-Dimensional Incompressible Flow Solver, in Lecture Notes in Physics, No. 264, Springer-Verlag, Berlin, 1986, pp. 594-599.
- 3) Yasuhara, M. and Nakamura, Y.: Numerical Simulation of Incompressible Flow around Three-Dimensional Wing, in Computational Fluid Dynamics, G. de Vahl Davis and C. Fletcher, ed., North-Holland, Amsterdam, 1988, pp. 785-792.
- 4) Nakamura, Y., Yasuhara, M., Kuwabara, K. and Jia, W.: Incompressible Flow through Multiple Passages, in Proceedings of 1st National Fluid Dynamics Congress, Part 3, Cincinnati, U.S.A., 1988, pp. 1693-1701.
- 5) 賈 為, 中村佳朗, 保原 充: 領域分割法による2次元非圧縮性流れの数値解析, 第2回数値流体力学シンポジウム講演論文集, 1988, pp. 607-610.
- 6) 賈 為, 中村佳朗, 保原 充, 桑原宏成: スラット・フラップ翼まわりの流れの計算, 日本航空宇宙学会誌, 37(1989), pp. 430-440.
- 7) Jia, W., Nakamura, Y., Yasuhara, M. and Kuwabara, K.: Numerical Simulation of Incompressible Flows, in Preprints of ISCFD-NAGOYA, 1989, pp. 683-688.
- 8) Roache, P. J. (高橋亮一ほか訳): コンピュータによる流体力学(上), 構造計画研究所, 1978.
- 9) Abdallah, S. and Dreyer, J.: Dirichlet and Neumann Boundary Conditions for the Pressure Poisson Equation of Incompressible Flow, Intern. J. Numer. Methods Fluids, 8(1988), pp. 1029-1036.
- 10) Roache, P. J. (高橋亮一ほか訳): コンピュータによる流体力学(下), 構造計画研究所, 1978.
- 11) Quartapelle, L.: Vorticity Conditioning in the Computation of Two-Dimensional Viscous Flows, J. Comput. Phys., 40(1981), pp. 453-477.
- 12) Anderson, C. R.: Vorticity Boundary Conditions and Boundary Vorticity Generation for Two-Dimensional Viscous Incompressible Flows, J. Comput. Phys., 80(1989), pp. 72-97.
- 13) Briley, W. R.: Numerical Method for Predicting Three-Dimensional Steady Viscous Flow in Ducts, J. Comput. Phys., 14(1974), pp. 8-28.
- 14) Ghia, U., Ramanurti, R. and Ghia, K. N.: Solution of the Neumann Pressure Problem in General Orthogonal Coordinates Using the Multigrid Technique, AIAA J., 26(1988), pp. 538-547.
- 15) Abdallah, S.: Numerical Solutions for the Pressure Poisson Equation with Neumann Boundary Conditions Using a Non-Staggered Grid, I, J. Comput. Phys., 70(1987), pp. 182-192.
- 16) Abdallah, S.: Numerical Solutions for the Incompressible Navier-Stokes Equations in Primitive Variables Using a Non-Staggered Grid, II, J. Comput. Phys., 70(1987), pp. 193-202.
- 17) 村田健郎, 小国 力, 唐木幸比古: スーパーコンピュータ(科学技術計算への適用), 丸善, 東京, 1985.
- 18) 藤野清次: 熱流体解析へのPCG法及びPCR法の適用, 数値解析 18-2, 1986, pp. 1-10.