最適射影法に基づいた能動フラッタ抑止系の低次元補償器の構成^{*1}A Synthesis of Reduced-Order Compensators for Active Flutter Suppression System
Based on the Optimal Projection Method藤 森 篤^{*2}
Atsushi FUJIMORI

Key Words: Active Flutter Suppression, Optimal Projection Method, Reduced-Order Compensator, LQG

Abstract

A synthesis of reduced-order compensators for active flutter suppression of a two-dimensional airfoil is studied using the optimal projection method. In the method, condition for minimizing a quadratic performance index is taken into consideration for a compensator whose the order is less than the order of the controlled plant. A reduced-order compensator is then constructed by satisfying the condition. In this paper, rough derivation of two modified Riccati equations and two modified Lyapunov equations as the condition are shown. Since these equations are coupled each other, it is not possible to solve them at one time. Therefore, iterative calculation methods are examined and an algorithm which improves a defect of the existing iterative method is proposed. Numerical simulations which are carried out using thirteenth-order active flutter suppression systems of a two-dimensional airfoil show that the optimal projection method can yield second-order compensators in all simulation cases, and compensators whose the order is six or more almost show the same control performance as the optimal observer, that is, Kalman filter.

1. 序 論

航空機に発生する空力弾性問題を、制御工学を用いて解決しようとする試みは20年程前から行われており¹⁾、なかでも能動フラッタ抑止 (AFS; Active Flutter Suppression) や突風荷重軽減 (GLA; Gust Load Alleviation) は、省エネルギー化、飛行性能の向上、耐疲労性向上に伴う航空機の寿命の延長などのメリットをもたらす技術として注目されている。これらの問題に関し、最近の制御システムの構成は二次形式ガウ

ス雑音問題 (LQG; Linear Quadratic Gaussian) に帰着した制御系設計が主流な方法となっている。このLQGでの制御系設計における問題の一つに、補償器の低次元化がある。一般に、空力弾性系の方程式は構造弾性モードと非定常空気力を含んだ偏微分方程式であるため、高次元系になりやすいという傾向がある一方、LQG理論から導かれる補償器は制御対象の次数と等しいものが要求され、このような高次元補償器はオンラインで制御するには非実用的である。それ故、低次元でしかも最適な補償器と同レベルの性能を持つ低次元補償器を構成することは実用上有意義なことである。この問題に著者らは以前、二次元翼のAFSシステムに対し、GHR (Generalized Hessenberg Representation) 法とNFA (Nyquist Frequency Approximation) 法の二つの低次元補償器構成法を提案した²⁾。GHR法は最適オブザーバ (Kalman フィルタ) を近似するように低次元化を行って低次元補償器を構成するため、二次形式評価コストを考慮した設計法である。しかし、補償器の十分な低次元化が可能でない場合や、系全体の安定余裕の不足する傾向がある。一方、NFA法は低次元でも安定余裕が十分な補償器が構成可能であるが、操舵量や評価コストの増大化を招き最適性に欠ける面がある。

本論文は、これらの問題点を改善するため、AFSシステムに対する低次元補償器の構成を最適射影法^{3,4)}によって検討する。最適射影法は、二次形式評価コストを最小化する条件をプラントの次数以下の補償器について考え、これを満足するように補償器を求める方法であり、GHR法のような近似ではない²⁾。ただ問題は、いかにしたらその条件式を満たすような解に辿り着けるかであり、計算方法がこの手法のポイントとなる。本論文では、最適射影法における低次元補償器構成に対し文献4に示されている計算方法に改良を加えた計算アルゴリズムを提案する。この方法を

^{*1} 平成2年1月10日原稿受理^{*2} 静岡大学工学部エネルギー機械工学科

文献2と同じ二次元翼の AFS システムに適用し、得られた制御系の性能を比較することにより本手法の有用性を検討する。

2. 制御対象と低次元補償器

制御対象は、前回²⁾と同様な第1図に示される二次元翼を考える。翼の自由度は、基準位置からの弾性軸 (e. a.) での曲げ変位 h , 振り角 α , それに後縁操舵面の舵角 β である。空気力は、翼の運動による成分と突風による成分があり、それらの非定常部分には有理関数近似表現を用いる。また、駆動系は2次系を、突風モデルは1次系を仮定すると、二次元翼の AFS システムの状態方程式は

$$\dot{x} = Ax + Bu + B_n w_1 \quad (1.1)$$

$$y = Cx + w_2 \quad (1.2)$$

$$x \in \mathbb{R}^{13}, \quad u \in \mathbb{R}^1, \quad w_1 \in \mathbb{R}^2$$

$$y, w_2 \in \mathbb{R}^1 \text{ or } \mathbb{R}^2$$

と書ける²⁾。 w_1, w_2 は互いに無相関な白色雑音である。出力 y は翼の曲げ変位とその加速度を考える。

(1)式で表される制御対象に対し、次数が $n_c (\leq n)$ の低次元補償器は、

$$\dot{x}_c = A_c x_c + B_c y \quad (2.1)$$

$$u = C_c x_c \quad (2.2)$$

$$x_c \in \mathbb{R}^{n_c}$$

と表される。ただし、 (A_c, B_c, C_c) は可制御、可観測であるとし、次の二次形式評価コストを最小化する補償器を求めることを考える。

$$J = E \left\{ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T (y^T R_1 y + u^T R_2 u) dt \right\} \quad (3)$$

$$R_1 \geq 0, \quad R_2 > 0$$

3. 最適射影法の必要条件式

GHR 法²⁾や Yousuff ら⁵⁾、宮沢⁶⁾の低次元補償器構成法は、最適オブザーバを、“近似”するという考え方であるが、最適射影法では(3)式の J を最小化す

第1図 二次元翼

る必要条件式を次数が $n_c (\leq n)$ の補償器に対し導出し、これを満たすことを考える。すなわち、ある次数の補償器を用いた場合の最適性を考えている。その条件式とは、二つの修正 Riccati 方程式と二つの修正 Lyapunov 方程式である。本章では、これらの方程式の大まかな誘導について述べる。なお、3.1 節にその誘導に必要となるいくつかの基礎知識について述べておく。

3.1 定義と補題

[定義1] 半単純 (semisimple)

行列 $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ が $\text{rank } A = r (\leq n)$ のとき、正則行列 $S, T \in \mathbb{C}^{n \times n}$ により

$$SAT = \text{diag} \{ \alpha_1 \cdots \alpha_r, 0 \cdots 0 \} \quad (4)$$

と対角化できるとき、 A は半単純行列 (semisimple matrix) であるという。とくに $\alpha_i > 0$ のとき、 A は正の半単純行列 (positive semisimple matrix) という。

□

半正定行列は、正の半単純行列である。なお、正定行列は正の単純行列 (positive simple matrix) である。

[定義2] 反傾変換 (contragredient transformation)

二つのエルミート行列 $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ をある正則な変換行列 $T \in \mathbb{C}^{n \times n}$ によって

$$T^{-1} A T^{-*} = A_A \quad (5)$$

$$T^* B T = A_B \quad (6)$$

と同時対角化することを反傾変換 (contragredient transformation) という。ただし、 T^* は T の共役転置行列を表し、 A_A, A_B は対角行列である。

□

[補題1] $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ がともに半正定行列であるとき、 AB または BA は正の半単純行列であり、反傾変換によって同時対角化できる。

□

[補題2] $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ がともに半正定行列であり、 $\text{rank } A = \text{rank } B = \text{rank } AB = r (\leq n)$ のとき、

$$AB = G^T M F \quad (7)$$

$$FG^T = I_r \quad (8)$$

を満たす行列 $G, F \in \mathbb{R}^{r \times n}$ と正の単純行列 $M \in \mathbb{R}^{r \times r}$ が存在する。

□

[補題3] 補題2の A, B, G, F において

$$\tau \triangleq G^T F \quad (\in \mathbb{R}^{n \times n}) \quad (9)$$

なる量は次式を満たす。

$$A = \tau A, \quad B = B \tau \quad (10)$$

□

[補題4] 半正定行列 $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ を

$$A \triangleq \begin{bmatrix} A_1 & A_{12} \\ A_{12}^* & A_2 \end{bmatrix} \quad (11)$$

と分割するとき、次式が成り立つ。

$$\begin{aligned} A_1 &\geq 0, \quad A_{12}^* A_1^* A_1 = A_{12}^*, \\ A_2 - A_{12}^* A_1^* A_{12} &\geq 0 \end{aligned} \quad (12.1)$$

$$\begin{aligned} A_2 &\geq 0, \quad A_{12} A_2^* A_2 = A_{12}, \\ A_1 - A_{12} A_2^* A_{12}^* &\geq 0 \end{aligned} \quad (12.2)$$

ただし, A_1^* は A_1 の擬似逆行列を表す. とくに, $\text{rank } A = \text{rank } A_1$ または $\text{rank } A = \text{rank } A_2$ のとき,

$$A_2 = A_{12}^* A_1^* A_{12} \quad (\text{rank } A = \text{rank } A_1) \quad (13.1)$$

$$A_1 = A_{12} A_2^* A_{12}^* \quad (\text{rank } A = \text{rank } A_2) \quad (13.2)$$

が成り立つ $\square$

補題 1~4 の証明は付録に示す.

3.2 修正 Riccati と修正 Lyapunov 方程式 制御対象と補償器の拡大系を考える. (1), (2) 式より次式が得られる.

$$\dot{\bar{x}} = \bar{A}\bar{x} + \bar{B}\bar{w} \quad (14)$$

$$\bar{x} \triangleq [x^T \ x_c^T]^T, \quad \bar{w} \triangleq [w_1^T \ w_2^T]^T$$

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} A & BC_c \\ B_c C & A_c \end{bmatrix}, \quad \bar{B} = \begin{bmatrix} B_n & 0 \\ 0 & B_c \end{bmatrix}$$

(3) 式の評価コスト J は

$$J = \left\{ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \bar{x}^T \bar{R} \bar{x} dt \right\} = \text{tr} \{ \bar{Q} \bar{R} \} \quad (15)$$

$$\bar{Q} = E\{\bar{x} \bar{x}^T\}, \quad \bar{R} = \begin{bmatrix} C^T R_1 C & 0 \\ 0 & C_c^T R_2 C_c \end{bmatrix}$$

となる. (2) 式の低次元補償器は $\bar{A}$ を安定行列にするものでなければならない. このとき $\bar{Q}$ は次の Lyapunov 方程式の解である.

$$\bar{A} \bar{Q} + \bar{Q} \bar{A}^T + \bar{W} = 0 \quad (16)$$

$$\bar{W} = \begin{bmatrix} B_n W_1 B_n^T & 0 \\ 0 & B_c W_2 B_c^T \end{bmatrix}$$

$$W_1 \triangleq E\{w_1 w_1^T\}, \quad W_2 \triangleq E\{w_2 w_2^T\}$$

さて, (16) 式の拘束条件下で J の最小化を静的最適化法で考える. ラグランジュ未定乗数を $\bar{P}$ ($\in \mathcal{R}^{(n+n_c) \times (n+n_c)}$) とし, 次のラグランジュ関数 L を定義する.

$$L \triangleq J + \text{tr} \{ \bar{P}^T [\bar{A} \bar{Q} + \bar{Q} \bar{A}^T + \bar{V}] \} \quad (17)$$

最適化の必要条件は $\partial L / \partial \bar{Q} = 0$ より

$$\bar{A}^T \bar{P} + \bar{P} \bar{A} + \bar{R} = 0 \quad (18)$$

また J は, A_c, B_c, C_c についても最適化を考える必要がある. そこで, $\bar{Q}, \bar{P}$ を

$$\bar{Q} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_1 & \bar{Q}_{12} \\ \bar{Q}_{12}^T & \bar{Q}_2 \end{bmatrix}, \quad \bar{P} = \begin{bmatrix} \bar{P}_1 & \bar{P}_2 \\ \bar{P}_2^T & \bar{P}_2 \end{bmatrix} \quad (19)$$

と分割して L を書き下し, A_c, B_c, C_c についての微分を行う.

$$\frac{1}{2} (\partial L / \partial A_c) = P_2^T Q_{12} + P_2 Q_2 = 0 \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (\partial L / \partial B_c) &= P_2 B_c W_2 + P_2^T Q_1 C^T \\ &\quad + P_2 Q_{12}^T C^T = 0 \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (\partial L / \partial C_c) &= R_2 C_c Q_2 + B^T P_1 Q_{12} \\ &\quad + B^T P_2 Q_2 = 0 \end{aligned} \quad (22)$$

修正 Riccati, 修正 Lyapunov 方程式は (16), (18) 式を元として, (19) 式の分割された行列成分を用いることにより導かれる. まず, Q_2, P_2 が正定であることを示す. (16) 式の (2,2) 成分は, 補題 4 の (12.2) 式の第 2 式の関係を使って整理すると

$$\begin{aligned} (A_c + B_c C Q_{12} Q_2^+) Q_2 + Q_2 (A_c \\ + B_c C Q_{12} Q_2^+)^T + B_c W_2 B_c^T = 0 \end{aligned} \quad (23)$$

と書ける. 仮定により (A_c, B_c) は可制御だから $(A_c + B_c C Q_{12} Q_2^+, B_c W_2^{1/2})$ も可制御. よって $Q_2 > 0$. 同様に (C_c, A_c) は可観測だから $P_2 > 0$. このことから (20) 式は

$$I_n = -P_2^{-1} P_2^T Q_{12} Q_2^{-1} \quad (24)$$

と変形できる. そこで補題 2, 3 を適用するために, $\bar{Q}, \bar{P}$ の各成分を次のようにおく.

$$\begin{aligned} G &\triangleq Q_2^{-1} Q_{12}^T, \quad F \triangleq -P_2^{-1} P_2^T, \quad M \triangleq Q_2 P_2 \\ \bar{Q} &\triangleq Q_{12} Q_2^{-1} Q_{12}^T, \quad \bar{P} \triangleq P_2 P_2^{-1} P_2^T \\ &\quad - Q_{12} Q_2^{-1} P_2^{-1} P_2^T \triangleq G^T F = \tau (\in \mathcal{R}^{n \times n}) \end{aligned} \quad (25)$$

これは明らかに

$$G^T M F = \bar{Q} \bar{P}$$

$$\tau \bar{Q} = \bar{Q}, \quad \bar{P} \tau = \bar{P} \quad (26)$$

を満たす. よって, $\bar{Q}$ と $\bar{P}$ は反傾変換によって同時対角化可能であり, $\text{rank } \bar{Q} \bar{P} = n_c$ である. さらに

$$Q \triangleq Q_1 - \bar{Q}, \quad P \triangleq P_1 - \bar{P} \quad (27)$$

を定義すると, (16), (18) 式から次の四つの方程式が導かれる^{3,4)}.

$$\begin{aligned} A Q + Q A^T + B_n W_1 B_n^T - Q \bar{\Sigma} Q \\ + \tau_1 Q \bar{\Sigma} Q \tau_1^T = 0 \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} A^T P + P A + C^T R_1 C - P \Sigma P \\ + \tau_1^T P \Sigma P \tau_1 = 0 \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} (A - \Sigma P) \bar{Q} + \bar{Q} (A - \Sigma P)^T \\ + Q \bar{\Sigma} Q - \tau_1 Q \bar{\Sigma} Q \tau_1^T = 0 \end{aligned} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} (A - Q \bar{\Sigma})^T \bar{P} + \bar{P} (A - Q \bar{\Sigma}) \\ + P \Sigma P + \tau_1^T P \Sigma P \tau_1 = 0 \end{aligned} \quad (31)$$

ただし,

$$\tau_1 = I_n - \tau \quad (32)$$

$$\bar{\Sigma} = C^T W_2^{-1} C, \quad \Sigma = B R_2^{-1} B^T$$

(28), (29) 式が修正 Riccati 方程式, (30), (31) 式が修正 Lyapunov 方程式である.

低次元補償器の各行列は, (21), (22), (24), (25) 式より

$$A_c = F(A - Q \bar{\Sigma} - \Sigma P) G^T$$

$$\begin{aligned} B_c &= FQC^TW_2^{-1} \\ C_c &= -R_2^{-1}B^TPG^T \end{aligned} \quad (33)$$

と求められる。

以上のことから、最適射影法による低次元補償器の構成は(28)～(31)式を満たす $P, Q, \bar{Q}, \bar{P}$ を求め、 $\bar{Q}, \bar{P}$ を反傾変換によって同時対角化する正則行列 T から(A.9), (33)式を使って A_c, B_c, C_c を求めることになる。 $n_c = n$ のとき、補題2, 3および(32)式から明らかなように $\tau_1 = 0$ であり、(28)～(31)式は非連成化する。このとき、(28), (29)式は通常のRiccati方程式、(30), (31)式は通常のLyapunov方程式となり、(33)式から計算される補償器は最適オブザーバと一致する。このように、(28)～(31)式は評価コスト J を最小化する条件を補償器の次数が n 以下に拡張したものともみなすことができる。

4. 最適射影法の計算方法

4.1 Hyland らの計算法の問題点とその対策 最適射影法による低次元補償器の構成で最も大きな問題は、如何にして修正Riccati, 修正Lyapunov方程式を解くかである。(28)～(31)式から明らかなように、修正Riccati, 修正Lyapunov方程式はすべて τ_1 を含んだ形で連成している。そのため、これらを同時に満たす解を一度の計算において求めることは不可能であり、繰り返し計算による方法を用いなければならない。

Hyland らはこの解法として、緩和法とホモトピー法をそれぞれ内ループと外ループに設定した繰返し法を提案している⁴⁾。これらの考え方は、 τ_1 の項を無視すれば四つの式は独立して解ける。そこで、徐々にこの項のウェイトを強めていくように調節しようというものである。緩和法は、 $\overline{QP}$ のランクを減らしていくように重み付けを考えているのに対し、ホモトピー法は τ_1 の項全体に1より十分小さい正数を掛け、それを徐々に1に近づける。また、 $P, Q, \bar{Q}, \bar{P}$ の初期値には $\tau_1 = 0$ として(28)～(31)式を独立に解いたものを用いている。

しかしながら、この計算アルゴリズムで用いている緩和法は修正Lyapunov方程式を解く際に定数項の半正定性を破壊することがあり、 $\bar{Q}, \bar{P}$ の反傾変換ができなくなり計算の中断を余儀なくされることが起こりうる。とくに n_c が小さく、大幅な $\overline{QP}$ のランクの低減を行うときほどその傾向が強い。このような問題を回避するために、本研究では緩和法における重み付けを定数項の半正定性が保たれるように改良した計算法を提案する。

いま、(28)～(31)式を満たす半正定行列 $\bar{Q}, \bar{P}$ が

求まっているとする。このとき

$$T^{-1}\overline{QP}T = \Lambda^2 \triangleq \text{diag}\{\lambda_1^2 \cdots \lambda_{n_c}^2 0 \cdots 0\} \quad (34)$$

と表される。このとき λ_i^2 は $\overline{QP}$ の零でない固有値と一致し、 λ_i は正である。反傾変換行列 T は

$$T^{-1}\bar{Q}T^{-T} = T^T\bar{P}T = \Lambda \quad (35)$$

となるようにバランス化されている。 T は $\overline{QP}$ の固有ベクトルを並べて構成されているのではないことに注意されたい。 T の構成法については文献7を参照されたい。(30)式の左から T^{-1} を、右から T^{-T} を掛けると

$$\begin{aligned} T^{-1}(A - \Sigma P)T\Lambda \\ + \Lambda\{T^{-1}(A - \Sigma P)T\}^T + \bar{\Phi} = 0 \end{aligned} \quad (36)$$

$$\bar{\Phi} \triangleq T^{-1}(Q\Sigma Q - \tau_1 Q\Sigma Q\tau_1^T)T^{-T} \quad (37)$$

ここで

$$T^{-1}Q\Sigma Q T^{-T} \triangleq \Phi = \begin{bmatrix} \Phi_1 & \Phi_{12} \\ \Phi_{12}^T & \Phi_2 \end{bmatrix} (\geq 0) \quad (38)$$

とおくと(37)式は

$$\bar{\Phi} = \begin{bmatrix} \Phi_1 & \Phi_{12} \\ \Phi_{12}^T & 0 \end{bmatrix} \quad (39)$$

となる。 $\Phi_{12} = 0$ ならば $\bar{\Phi}$ は半正定であるがこれは一般には成立しない。しかし、解 Λ は半正定であることから、 Φ_{12} は Φ_1 に比べて小さいと考えることができる。著者が文献4で述べられている緩和法によって作成した計算アルゴリズムでは、この傾向が観察されている。しかしながら、フルランクの $\bar{Q}, \bar{P}$ からランク $n_c (\leq n)$ へ低下させる繰返し計算過程において、(39)式の $\bar{\Phi}$ を用いたのでは解の半正定性が保たれる保証がない。そこで、 $\bar{\Phi}$ の代わりに次に示す $\hat{\Phi}$ を用いる。

$$\hat{\Phi} \triangleq \begin{bmatrix} I_{n_c} & 0 \\ 0 & \Lambda_w \end{bmatrix} \Phi \begin{bmatrix} I_{n_c} & 0 \\ 0 & \Lambda_w \end{bmatrix} \quad (40)$$

$$\Lambda_w \triangleq \text{diag}\{\delta_1 \cdots \delta_{n-n_c}\} \quad 0 \leq \delta_i \leq 1$$

δ_i は非負なので Λ_w は半正定、また Φ は半正定なので $\hat{\Phi}$ は常に半正定となる。(31)式に対しても同様なことがいえる。

$$T^TP\Sigma PT \triangleq \Psi = \begin{bmatrix} \Psi_1 & \Psi_{12} \\ \Psi_{12}^T & \Psi_2 \end{bmatrix} (\geq 0) \quad (41)$$

とすれば

$$\hat{\Psi} \triangleq \begin{bmatrix} I_{n_c} & 0 \\ 0 & \Lambda_w \end{bmatrix} \Psi \begin{bmatrix} I_{n_c} & 0 \\ 0 & \Lambda_w \end{bmatrix} \quad (42)$$

を(31)式の定数項として用いる。よって、修正Lyapunov方程式の解 $\bar{Q}, \bar{P}$ は常に半正定行列となる。なお、繰返し計算では、 $\delta_i = \lambda_{n_c+i}/\lambda_{n_c}$ とすることにより、徐々に0に近づける操作が施されている。このことにより、 $\bar{Q}, \bar{P}$ のランクをそれぞれ低減することができる。その具体的な計算アルゴリズムを次節で示す。

4.2 計算アルゴリズム 前節に述べた考え方に沿って、低次元補償器構成の計算アルゴリズムを示す。 k は繰返し回数を表し ε はランク判定の数値とする(ε 以下ならばランク落ちを意味する)。

Step 1: n_c を設定する。 $k=1$ 。ただし、 $\tau_1(1)=0$, $T(0)=I_n$ 。

Step 2: 修正 Riccati, 修正 Lyapunov 方程式を解く。

$$AQ(k) + Q(k)A^T + B_n W_1 B_n^T - Q(k)\bar{\Sigma}Q(k) + \tau_1(k)Q(k)\bar{\Sigma}Q(k)\tau_1(k)^T = 0 \quad (43)$$

$$A^T P(k) + P(k)A + C^T R_1 C - P(k)\Sigma P(k) + \tau_1(k)^T P(k)\Sigma P(k)\tau_1(k) = 0 \quad (44)$$

$$(A - \Sigma P(k))\bar{Q}(k) + \bar{Q}(k)(A - \Sigma P(k))^T + T(k-1)\bar{\Phi}(k)T(k-1)^T = 0 \quad (45)$$

$$(A - Q(k)\bar{\Sigma})^T \bar{P}(k) + \bar{P}(k)(A - Q(k)\bar{\Sigma}) + T(k-1)^T \bar{\Psi}(k)T(k-1)^{-1} = 0 \quad (46)$$

ただし、

$$\bar{\Phi}(1) = Q(1)\bar{\Sigma}Q(1), \quad \bar{\Psi}(1) = P(1)\Sigma P(1) \quad (47)$$

Step 3: 反傾変換行列 $T(k)$ を次のようにバランス化させて求める。

$$T(k)^{-1}\bar{Q}(k)T(k)^{-T} = T(k)^T \bar{P}(k)T(k) = \Lambda(k) = \text{diag}\{\lambda_1(k) \cdots \lambda_n(k)\} \quad (48)$$

$$\lambda_1(k) \geq \lambda_2(k) \geq \cdots \geq \lambda_n(k)$$

$$\tau_1(k) = T(k) \text{diag}\{0 \cdots 0 \ 1 \cdots 1\} T(k)^{-1}$$

Step 4: $k > 1$ のとき

$$\lambda_{n_c+1}(k)/\lambda_{n_c}(k) \leq \varepsilon \quad (50)$$

ならば Step 6 へ、それ以外は Step 5。

Step 5: $\bar{\Phi}(k)$, $\bar{\Psi}(k)$ を計算する。

$$\Lambda_w(k) = \text{diag}\{\delta_1(k) \cdots \delta_{n-n_c}(k)\}$$

$$\delta_i(k) = \lambda_{n_c+i}(k)/\lambda_{n_c}(k) \quad i=1, \dots, n-n_c$$

$$\bar{\Phi}(k+1) = \begin{bmatrix} I_{n_c} & 0 \\ 0 & \Lambda_w(k) \end{bmatrix} \bar{\Phi}(k) \begin{bmatrix} I_{n_c} & 0 \\ 0 & \Lambda_w(k) \end{bmatrix} \quad (51)$$

$$\bar{\Psi}(k+1) = \begin{bmatrix} I_{n_c} & 0 \\ 0 & \Lambda_w(k) \end{bmatrix} \bar{\Psi}(k) \begin{bmatrix} I_{n_c} & 0 \\ 0 & \Lambda_w(k) \end{bmatrix} \quad (52)$$

$k=k+1$ として、Step 2へ。

Step 6: 低次元補償器を求める。

$$G = [I_{n_c} \ 0] T(k)^T, \quad F = [I_{n_c} \ 0] T(k)^{-1} \quad (53)$$

$$A_c = F(A - Q(k)\bar{\Sigma} - \Sigma P(k))G^T$$

$$B_c = FQ(k)C^T W_2^{-1} \quad (54)$$

$$C_c = -R_2^{-1} B^T P(k) G^T$$

■■■

Step 2 の修正 Riccati 方程式は、Kleinman の方法⁸⁾を適用して解く。Step 3で行っているバランス化は、補償器の各モードの入出力量を同じレベルにするための操作である。またそれを大きい順に並べることにより、下位のモードほど入出力全体に寄与する割合が相対的に低いことを意味している。すなわち、可制

第1表 数値計算ケース

Case	Output y	R_1	R_2
1	h	1	1
2	$\dot{h}$	10^{-6}	1
3	$[h \ \dot{h}]^T$	$\text{diag}\{1 \ 10^{-6}\}$	1

第2図 自由流速の変化による二次元翼の特性根

御、可観測性が弱い Step 5では、これらのモードのうち $n-n_c$ 個を補償器から削除するように修正 Lyapunov 方程式の定数項に重み付けしている。

5. AFS システムの数値計算例

AFS システムのパラメータ値は文献2と同じ数値を用い、第1表に示す出力変数とそれに対応する評価コストの重みについて計算を行う。第1図に示されている二次元翼の無次元化した自由流速速度 $K \triangleq (U/b)$ の変化に対する特性根の挙動を、第2図に示す。フラッタ速度は $K_F = 297.13$ である。制御系設計の設計点は、1割程度のフラッタ速度の増加を目標にして約9.4%高い $K=325$ とする。

第3図に得られた低次元補償器によって構成される制御系の性能評価を示す。 $n_c=13$ は最適オブザーバを意味する。ゲイン余裕((d)図)、位相余裕((e)図)は系の安定性に関する尺度であり、これが大きいほどフラッタに対してロバストである。よって、これらの値はフラッタ速度の増加率((f)図)に強く影響している。なお、この制御対象は第2図に示されているように設計点では不安定であるので、安定余裕は+側と-側がある。

どのケースも2次以上の補償器が構成可能である。しかし、次数低減に伴うコストの変化((a)図)は5次以下の低次において必ずしも単調非減少でなく、局所的な最小解(local minimum)に収束してしまっ

第3図 最適射影法で構成した補償器による制御系性能

いると考えられる。翼の垂直変位を出力変数として低次元補償器の構成を考えたケース1において、 $n_c=2$ の補償器の性能は安定余裕、コストとも他の次数の補償器よりも悪化している。 $n_c=3$ では、コスト、操舵量が劣っている半面、安定余裕が大きいためフラッタ速度の増加率は全ての補償器の中で最高値を示している。 $n_c=4$ 以上では、コストおよびフラッタ速度の増

加率はほぼ最適値($n_c=13$)に等しく、 $n_c=6$ 以上で全ての性能値が最適値に収束している。垂直加速度を出力変数としたケース2および2出力の場合のケース3は、値の変動状況は異なるもののケース1と同様な傾向を示している。このことから、補償器の次数が5次以下では次数の不足による性能劣化が発生するが、6次以上であれば13次の最適オブザーバと同等の補償

第2表 GHR法で構成した補償器による制御系性能

Case	n_c	Gain M. (dB)	Phase M. (deg)	β_{rms} (deg) β_{rms} (deg/s)	Cost $J \times 10^3$
1	2	-6.224	-6.6	7.200	14.8586
		+1.219	+4.9	716.4	
	3	-6.690	-4.2	10.71	31.1874
		+0.3834	+2.0	930.2	
2	7	-3.024	-22.4	4.096	4.48779
		+6.069	+22.5	565.5	
	8	-9.591	-37.0	4.659	4.89225
		+1.559	+49.2	299.8	
3	9	-10.04	-20.4	3.322	4.26864
		+1.430	+50.0	275.5	
	7	-9.384	-2.6	16.12	22.9880
		+0.1587	+28.9	581.8	
3	8	-8.692	-14.9	5.811	6.68781
		+0.8509	+38.0	310.7	
	9	-8.993	-38.0	2.978	4.53036
		+3.022	+41.0	267.3	

* 低次元近似法 Case 1: トランケーション法, Case 2: ノルム最小化法, Case 3: 特異摂動法

第3表 NFA法で構成した補償器による制御系性能

Case	n_c	Gain M. (dB)	Phase M. (deg)	β_{rms} (deg) β_{rms} (deg/s)	Cost $J \times 10^3$	Increment rate of flutter velocity(%)
1	2	-7.601	-28.0	10.34	19.9090	32.90
		+5.120	+23.4	1688		
	4	-6.569	-44.4	21.66	90.5935	32.78
		+7.191	+36.8	867.4		
2	6	-7.959	-45.0	31.07	234.858	27.80
		+7.108	+36.0	8535		
	2	-5.345	-24.0	2.153	18.4421	25.88
		+6.716	+24.2	424.6		
3	2	-4.064	-27.1	8.475	14.7816	34.10
		+10.51	+25.8	2035		

器となるといえる。

出力変数についての比較をすると、ケース1のフラッタ速度の増加率はケース2、3よりも約10%高い。これは、ケース1はケース2、3に比べ操舵量が大きく、とくに β_{rms} が2倍になっているためである。また、ケース3はケース2と比べ、わずかな差ではあるが操舵量が少ないのにフラッタ速度の増加率が高く、2出力であることの優位性を示している。さらに、ケース1の位相余裕は+側、-側ともほぼ等しいのに対し、ケース2、3は+側が大きい。ゲイン余裕は、ケース1は+側が-側よりも大きいのに対しケース2、3では逆になっている。すなわち、周波数特性から見ると+側のゲイン余裕を大きくしたほうがフラッタに対してロバストになるといえる。このことは、NFA

法による低次元補償器の構成においても示されている²⁾

第2、3表に、文献2で示されているGHR法とNFA法の結果の一部を示す。GHR法では、ケース2、3で構成できる低次元補償器の最低次数はそれぞれ8次、7次、ケース1では2次の補償器が可能であるが大幅な性能の劣化が観察され、最適射影法のほうが優れた低次元補償器構成法であるといえる。

NFA法と比べると、安定余裕やフラッタ速度の増加率に関してはNFA法で構成された低次元補償器のほうが優れている。とくにケース2、3では、+側のゲイン余裕の増加を考慮した低次元補償器設計がなされ、フラッタ速度を高めている。しかし、NFA法は多入力系への適用が困難である。また、評価コストや操舵量への考慮がないため、安定余裕を増やした代償としてこれらの値の増大化を招く傾向がある。したがって、多入力系にも適用可能でかつ評価コストの最小化を考慮している最適射影法のほうが、より一般性の高い方法であると思われる。

6. 結 論

本論文は、能動フラッタ抑止(AFS)システムに対する低次元補償器の構成を最適射影法によって検討し、新しい計算アルゴリズムを提案するとともにGHR法、NFA法との比較を行った。その結果、以下のような結論が得られる。

(1) 最適射影法において誘導された四つの条件式、修正Riccati、修正Lyapunov方程式を満たす解を求めることにより、二次形式評価コストの最小化を考慮したプラントの次数以下の補償器が構成可能である。

(2) 本論文で提案された計算アルゴリズムは、修正Lyapunov方程式の解が常に半正定となることを保証するものであり、解のランクを削除する繰返し計算において有効な方法である。

(3) 最適射影法を使って構成された13次の二次元翼AFSシステムに対する補償器は、2次以上で系を安定化することが可能であり、6次以上で最適オブザーバと同等な制御性能を持つ補償器になる。

(4) 最適射影法は、最適オブザーバを近似して求めるGHR法よりも低次元で制御性能の良い補償器が構成可能である。また、制御精度や操舵量を設計仕様に盛り込んでいる点でNFA法よりも優れている。

最適射影法は、ここで扱ったAFSシステムの低次元補償器設計以外にも、高次元系となる制御対象には有用な設計法であると思われる。なお、今回考えた補償器は(2)式で示された動的補償器であったが、ダイ

レトリックを有する出力フィードバックを考慮した場合や、外除去や non-zero set point レギュレーション問題に対する低次元補償器の構成に関する計算アルゴリズムの構成、さらに大域的微小解 (global minimum) を得るための工夫などが今後の研究課題である。

最後に、有益な御助言を頂きました校閲者に心より感謝致します。

参考文献

- 1) 片山鉄太郎: ACT によるフラッタ対策の現状, 日本航空宇宙学会誌, 32 (1984), pp.383-393.
- 2) 藤森 篤, 太田裕文: 能動フラッタ制御に対する低次元コントローラの構成, 日本航空宇宙学会誌, 35 (1987), pp.353-362.
- 3) Hyland, D. C. and Bernstein, D. S.: The Optimal Projection Equations for Fixed-Order Dynamic Compensation, IEEE Trans. Automat. Control, AC-29 (1984), pp.1034-1037.
- 4) Greeley, S. W. and Hyland, D. C.: Reduced-Order Compensation: Linear-Quadratic Reduction Versus Optimal Projection, J. Guid. Control Dynam. 11 (1988), pp.328-335.
- 5) Yousuff, A. and Skelton, R. E.: Controller Reduction by Component Cost Analysis, IEEE Trans. Automat. Control, AC-29 (1984), pp.520-530.
- 6) 宮沢予和: 最低次数フィルタによるフィードバック制御と航空機の突風荷重軽減装置への応用, 計測自動制御学会論文集, 22 (1986), pp.652-658.
- 7) Rao, C. R. and Mitra, S. K.: Generalized Inverse of Matrices and Its Applications, John Wiley, New York, 1971.
- 8) Kleinman, D. C.: On an Iterative Technique for Riccati Equation Computation, IEEE Trans. Automat. Control, AC-13 (1968), pp.114-115.
- 9) 児玉慎三, 須田信英: システム制御のためのマトリクス理論, 計測自動制御学会, 1978.

付 録

(補題 1 の証明) A, B のランクを r_A, r_B とすると, 最大階数を持つ行列 $U \in \mathcal{R}^{n \times r_A}, V \in \mathcal{R}^{n \times r_B}$ によってそれぞれ

$$A = UU^T, \quad B = VV^T \quad (\text{A.1})$$

と分解できる。ここで $\text{rank } U^T V \triangleq r (\leq \min(r_A, r_B))$ とおくと, $U^T V V^T (=U^T B)$ のランクはシルベスタ

一の不等式より

$$r + r_B - r_B \leq \text{rank } U^T B \leq \min(r, r_B) = r$$

$$\therefore \text{rank } U^T B = r$$

さらに, $UU^T B (=AB)$ のランクは

$$r_A + r - r_A \leq \text{rank } AB \leq \min(r_A, r) = r$$

$$\therefore \text{rank } AB = r \quad (\text{A.2})$$

また, $\text{rank } V^T A V = \text{rank } (U^T V)^T U^T V = r$ であるから, $V V^T A V V^T (=BAB)$ のランクを上 の議論と同様に考えると, $\text{rank } BAB = r$ ゆえに,

$$\text{rank } AB = \text{rank } BAB \quad (\text{A.3})$$

これは文献 7 の定理 6.2.4 で示されている反傾変換可能条件であり, よって

$$T^{-1} A T^{-*} = \Lambda_A (\geq 0) \quad (\text{A.4.1})$$

$$T^* B T = \Lambda_B (\geq 0) \quad (\text{A.4.2})$$

上式より

$$\begin{aligned} \Lambda &\triangleq \Lambda_A \Lambda_B = T^{-1} A B T \\ &= \Lambda_B \Lambda_A = T^* B A T^{-*} (\geq 0) \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

となるから AB または BA は正の半単純行列である。 ■

(補題 2 の証明) 補題 1 の (A.4) 式より

$$A = T \Lambda_A T^T, \quad B = T^{-T} \Lambda_B T^{-1} \quad (\text{A.6})$$

ただし, Λ_A, Λ_B の対角要素において, 初めの r 個は 0 でない正数となるように分解する。

$$\Lambda_A \Lambda_B = \Lambda \triangleq \text{diag} \{ \bar{\Lambda} \quad 0 \} \quad (\text{A.7})$$

$$\bar{\Lambda} \in \mathcal{R}^{r \times r}, \quad \text{rank } \bar{\Lambda} = r$$

と表せるから

$$AB = T \Lambda_A \Lambda_B T^{-1} = T \begin{bmatrix} I_r \\ 0 \end{bmatrix} \bar{\Lambda} \begin{bmatrix} I_r & 0 \end{bmatrix} T^{-1} \quad (\text{A.8})$$

よって

$$\begin{aligned} G &\triangleq \begin{bmatrix} I_r & 0 \end{bmatrix} T^T, \quad F \triangleq \begin{bmatrix} I_r & 0 \end{bmatrix} T^{-1}, \\ M &\triangleq \bar{\Lambda} \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

とすると (7), (8) 式が満たされる。 ■

(補題 3 の証明) (A.6), (A.9) 式より明らか。

(補題 4 の証明) 文献 9, pp.328-329 において示されている。ただし, (12), (13) 式は疑似逆行列で表現している (疑似逆行列は一般化逆行列に属するので問題ない)。また, (12.1), (13.1) 式は (12.2), (13.2) 式と同様に証明できる。 ■