光ファイバージャイロ^{*1}

高 橋 彦 至^{*2}・雑 賀 涼^{*2}

Key Words: Fiber Optic Gyro, Sagnac Effect, Regression Analysis

1. は じ め に

光ファイバージャイロの論文や記事は国内外を問わず、先進諸国の専門誌などに多く発表されているが、それらを読みこなすには光学、物性などに関する専門的基礎知識が必要である。筆者らはこの技術分野の専門家ではないが、ジャイロを利用する立場から光ファイバージャイロの技術に接する機会を得たので、その原理、各種方式及び取得データの解析例などについて概要を述べてみたい。

現在、航空機、船舶などが運航中、自らの姿勢の状態を知る手段としてジャイロスコープが使われている。このジャイロスコープと言う言葉は、フランスの天文学者兼数学者である Léon Foucault が 1852 年、地球の自転を実証するために作った回転機構と顕微鏡とからなる実験装置を“ジャイロスコープ

(Gyroscope)”と名付けたところから生まれた。彼の作ったものは現在、自由ジャイロ (free gyro) と言われているものと原理的に同じであり、3 個のジンバル構造から成っている。以来、ジャイロスコープは運航体の回転を知る航法用センサーとして発展してきた。これは、ジャイロセンサーに組み込んだ回転体によって生じる角運動量 (ジャイロモーメント) の保存の性質を利用して、回転を検知するものであり、機械式ジャイロと言われている。このような機械式ジャイロと加速度計を平板上に置き、サーボ機構を利用して運航体の回転量などを計る、いわゆるステープルプラットフォーム方式といわれる航法装置が、ジャイロと加速度計の精度の向上とともに発展してきた^{20,21)}。

近年、プラットフォーム方式に代わって、ジャイロセンサーを直接運航体に取り付け、運航体の回転量を計算機で座標変換することによって算出するストラップダウン方式が採用され始めた。この方式ではジャイロの検出精度の向上とともにダイナミックレンジの広いレート (角速度) 信号の検出能力が要求される。

さて、光ファイバージャイロは 1913 年フランスのサニャック (Sagnac) によって、閉じた光路が回転しているとき、その光路を回る左回り光、右回り光間に位相差が生じ、その位相差から角速度が検出できるという原理が発見されていたが、約 30 年程前のレーザの発明までは実用化の研究には手がけられなかった。近年、レーザ技術と光ファイバー技術の発展により、先進諸国では光ファイバージャイロの実用化への研究が急速に進められてきている。

光ファイバージャイロは従来の機械式ジャイロに比べて多くの利点を持つものと期待されており、現在、レーザ光源の安定性、光変調器の IC 化技術、光の偏波面保存技術などが温度変動、振動等に対する耐環境性の向上を図りながら実用化に向けて着々と成果を上げつつある。期待される光ファイバージャイロの特質を挙げると以下のようなものである。

① 構造面では重量が軽く、長寿命で、機械的な可

著 者 紹 介

高橋 彦至

昭和 10 年生。広島県出身。昭和 37 年電気通信大学電波通信学科卒業。同年防衛庁技術研究本部第 1 研究所入所。昭和 44 年東京都立大学大学院電気工学修士課程修了。現在、第 3 研究所第 3 部誘導第 6 研究室室長。誘導飛しょう体の姿勢制御に関する研究に従事。計測自動制御学会会員。

雑賀 涼 (正会員)

昭和 30 年生。東京都出身。昭和 55 年電気通信大学機械工学科卒業。昭和 57 年横浜国立大学大学院工学研究科機械工学専攻修士課程修了。同年防衛庁技術研究本部第 3 研究所入所。現在第 3 部誘導第 6 研究室室員。誘導飛しょう体の姿勢制御に関する研究に従事。日本機械学会会員。

^{*1} 平成 2 年 7 月 26 日原稿受理 Fiber Optic Gyros

^{*2} 防衛庁技術研究本部第 3 研究所 Hikoshi TAKAHASHI and Ryo SAIGA

動部分がなく、メンテナンスが容易。

- ② 製造技術面では量産性に優れ、製品形態の柔軟性があり、精密加工が不要。
- ③ 性能面では立ち上がり時間が速く、ダイナミックレンジが大きく、精度的には中精度(ドリフトは0.1~1 deg/h程度)以上。

また、経済的な面からは、部品点数が少なく量産性が高いため、高品質で低価格の製品が期待され、近い将来、中精度以下の機械式ジャイロにとって代わるものになることが予想される。

以下に、光ファイバージャイロによる角速度の検出に関する基本原理、各種構成例及び筆者らの行ったデータ解析例等について紹介しよう。

2. サニャック効果 (Sagnac Effect)

まず、サニャック効果を説明するため、光ファイバージャイロの骨組みである原理図を第1図に示す。レーザ光源から出た光は、ビームスプリッター (B.S.) で透過光と反射光の二つに分かれる。反射光はファイバーループを右回りに、また透過光は左回りに回る。その左右両回り光がファイバーループを伝播した後、再びB.S.で合成するような閉じた光路を考える。

この図で E_{cw} は右回り光、 E_{ccw} は左回り光である。このファイバーループが回転すると右回り光と左回り光との間に回転による光路長の差が生じ、そのため、合成点で両光の間に位相差 $\Delta\theta$ が生じる。この位相差は式(1)のようにファイバーループの回転角速度 Ω に比例することがサニャック効果として知られている。

$$\Delta\theta = \frac{4\pi LR}{c\lambda} \Omega \quad (1)$$

ここで、 $\Delta\theta$: サニャック位相差、 c : 真空中の光速、 λ : 光の波長、 L : ファイバーループの長さ、 R : ファイバーループの半径

である。光ファイバージャイロの原理は式(1)を利用して、ファイバーループの回転による左右両回り光間

の位相差を知ることである。この位相差 $\Delta\theta$ は具体的には右回り光と左回り光が合成されたときできる干渉光の強度の変化となって現れる。光ファイバージャイロはその干渉光の強度を測定することにより、ファイバーループの回転による左右両回り光間の位相差を知り、その位相差から逆に回転角速度を求めようとするものである。以下に基本式(1)の導出について述べる。

2.1 幾何学的な考察 まず初めに、幾何学的に考えてみよう。第2図に示すように光は光源から出てファイバーループの円形軌道に入るが、このときビームスプリッターによって二分され、左回りの光と右回りの光となる。各々の光はファイバーループの中を伝播した後、再び同じビームスプリッターに到達し検知器に至る。ここで重ね合わされてきた干渉光の強度が測定されるのであるが、この時この系全体が静止していれば、左右両回り光はまったく同じ光路長を通るので、合成点では両回り光の位相は同一である。ところが、この円形軌道が一方向に回転角速度 Ω で回転すると、左右両回り光間の位相にずれが生じる。

簡単のため、ファイバーループが一巻の円形状で、光の通るファイバーのコアの屈折率 n が $n=1$ の場合を考える。ファイバーの長さを L ($L=2\pi R$) とし、右回り光がB.S.で分岐されてから、再びB.S.に到達する時間を t_{cw} とすると、

$$ct_{cw} = L + R\Omega t_{cw} \quad (2)$$

一方、左回り光についても同様にして、B.S.までの到達時間を t_{ccw} とおくと、

$$ct_{ccw} = L - R\Omega t_{ccw} \quad (3)$$

と表される。したがって、左右両回り光の合成点における時間差 Δt は式(2)、式(3)より

$$\begin{aligned} \Delta t &= t_{cw} - t_{ccw} \\ &= L \left[\frac{1}{c - R\Omega} - \frac{1}{c + R\Omega} \right] \end{aligned}$$

第1図 光ファイバージャイロの原理図

第2図 サニャック効果の原理図

$$= \frac{2LR\Omega}{c^2 - R^2\Omega^2} \quad (4)$$

ここで、 $R^2\Omega^2 \ll c^2$ とすると、

$$\Delta t \approx 2LR\Omega/c^2 \quad (5)$$

となる。つまり、この左右両回り光のファイバーループの通過時間差が次式に示すように、左回り光と右回り光の位相差 $\Delta\theta$ になる。

$$\begin{aligned} \Delta\theta &= \omega\Delta t = (2\pi/\lambda)c\Delta t \\ &= \frac{4\pi LR}{c\lambda}\Omega \end{aligned}$$

ここで、 ω は光源の角周波数である。

この式は先に示した式(1)と等しい。以上、幾何学的考察による簡便な方法で、左回り光、右回り光の到達時間の差から、合成光の位相差がファイバーループの回転角速度に比例するというサニャック効果の基本式が示された。しかし、サニャック効果は、実際には観測者の系とファイバーループの系とが異なるのだから特殊相対論を考慮しなくては詳細な説明はできない。したがって、次に特殊相対論を考慮したサニャック効果について考えてみよう。

2.2 特殊相対論的な考察 以下の議論では、観測者の系を I、ファイバーループの系を I' とし、I 系の座標に対応する I' 系の座標にはすべて' を付けて区別する。本文で必要な特殊相対論の概要については付録 A、B 及び C にまとめた。

円形のファイバーループが回転しているとき、ファイバーループの線素の運動に着目すると、これは一次元空間の運動である。したがって、等速回転運動をしているファイバーループの系を等速並進運動系に置き換えて考えることができる。即ち、第3図に示すように、等速回転運動をしている系の線素 $R'd\theta'$ は、I 系に対して $v=R\Omega$ の速度をもって x 軸方向に等速並進運動をしている系の線素 dx' に対応付けることができるものとする(付録 C 参照)。なお、回転運動にお

第3図 回転系から並進運動系への対応

いて現れる中心方向の加速度については、等速回転運動系の各点を局所的に等速並進運動系と等価とみなしていることから、この考察では無視して差し支えない。

第4図に示すように、ファイバーループの系 I' に静止している光源(これを I' 系の原点とする)から出た光がファイバーループを左右それぞれ同じ長さ ($L=2\pi R$) だけ通過してファイバーループから出たとする。I' 系においては、光がファイバー内を通る時間 t' は右回り、左回りとも同じである。しかし、I' 系は I 系に対して $v=R\Omega$ の速度で x 軸の方向に並進運動をしているから、I' 系での光を I 系から眺めたとき、右回り光、左回り光がファイバーループを一周するのに要する時間は異なってくる。したがって右回り光のファイバーループ一周の所要時間 t_{cw} はローレンツ変換によって(付録 A の式(a6)参照)。

$$t_{cw} = \gamma \left(t' + \frac{v}{c^2} x' \right) \quad (6)$$

また、左回り光のファイバーループ一周の所要時間 t_{ccw} は同様にして、

$$t_{ccw} = \gamma \left(t' - \frac{v}{c^2} x' \right) \quad (7)$$

で与えられる。この2式から両回り光の時間差 Δt は

$$\Delta t = t_{cw} - t_{ccw} = \gamma \frac{2v}{c^2} x' \quad (8)$$

となる。ここで、 $\gamma = 1/\sqrt{1-(v/c)^2}$ 、 $v=R\Omega$ 、 $x'=L=2\pi R$ 、であるから結局

$$\Delta t = 2\gamma LR\Omega/c^2 \quad (9)$$

となる。これは $\gamma \approx 1$ とすると、先に幾何学的考察によって得られた式(5)と同じになる。

以上、ファイバーループの系(I'系)で起った時間 t' をローレンツ変換によって観測者の系(I系)に置き換えると t_{cw} 、 t_{ccw} となり、左右両回り光間に時間差が生じることを示した。

次に、ファイバーループを光が通過する時間は、ファイバーループの長さを光の速度で割ることによって

第4図 ファイバーループを並進系に置き換えた図

も求めることができるから、I'系のファイバーの長さや光速をI系から見たファイバーの長さや光速に変換して左右両回り光がファイバーループを通過するに要した時間を導いてみる。

まず、I系のx軸にそって速度vで運動するI'系があり、I'系における質点の速さu'をI系から見るとその速さuはEinsteinの速度合成の定理によって式(10)のように表される。

$$u = \frac{u' + v}{1 + u'v/c^2} \quad (10)$$

ここで、屈折率nのファイバー内を伝播するときの光の速度 $c' = c/n$ を式(10)の u' に代入し、 $nc \gg v$ として近似計算すると、つぎのFresnel-Fizeauの式、

$$u \approx c/n + (1 - 1/n^2)v \quad (11)$$

が自然に導かれる。

さて、I'系での光ファイバー内を右回りに伝播している光の速度 $c' = c/n$ をI系でみると、その速度 c_{cw} は式(10)によって

$$c_{cw} = \frac{c' + v}{1 + c'v/c^2} \quad (12)$$

また、I'系での左回り光の速度 $-c'$ をI系でみると、その速度 c_{ccw} は同様にして、

$$c_{ccw} = \frac{-c' + v}{1 - c'v/c^2} \quad (13)$$

となる。

次にファイバーループの長さはI'系でLとすると、I系ではローレンツ収縮によって L/γ のように観測される(付録Bの式(b1)参照)。したがって、第5図に示すように、右回り光についてはI系での時刻 $t = t_{cw}$ において、次式

$$c_{cw}t_{cw} - vt_{cw} = L/\gamma \quad (14)$$

が成り立つ。

また第6図に示すように、左回り光についても同様にして、I系での時刻 $t = t_{ccw}$ において、

$$c_{ccw}t_{ccw} - vt_{ccw} = -L/\gamma \quad (15)$$

が成り立つ。

したがって、時間差 Δt は式(14)、(15)より

$$\begin{aligned} \Delta t &= t_{cw} - t_{ccw} \\ &= \frac{L}{\gamma} \left[\frac{1}{c_{cw} - v} - \frac{-1}{c_{ccw} - v} \right] \end{aligned} \quad (16)$$

となる。これに式(12)、(13)を代入して整理すると

$$\Delta t = 2\gamma LR\Omega/c^2 \quad (17)$$

が得られる。これは先にI'系での左右両回り光のファイバー通過時間をローレンツ変換によって直接導いて求めた時間差、式(9)と同じになっており、当然の結果である。なお、時間差 Δt が光ファイバーの屈折率nによらないということも、これからわかる。

以上により、簡便な幾何学的考察と同様に、特殊相

第5図 I'系の右回り光をI系から見た図

第6図 I'系の左回り光をI系から見た図

対論的立場からの考察においても、位相差とファイバーループの回転角速度との間に比例関係を満たすサニャック効果の基本式(1)が導かれた。

また、ファイバーループが円形でなく任意の形の場合についても同様の結果が得られることが示されている¹⁻³⁾。

3. 光ファイバージャイロの方式

前述したサニャック効果の基本式(1)をもとに、位相差 $\Delta\theta$ を求めることによって、ファイバーループの回転角速度 Ω を得るのが光ファイバージャイロの基本であるが、実際に検知器で捕えられるのは右回り光と左回り光とによって生じる干渉光の強度変化である。

いま、光の合成点における右回り光を E_{cw} 、左回り光を E_{ccw} とすると、ファイバーループが静止しているときは、

$$E_{cw} = E_{ccw} = E \exp(i\omega t)$$

で表され、その合成光の強度は

$$I_p = |E_{cw} + E_{ccw}|^2 = 4E^2$$

として検知器で捕えられる。

さて、ここでファイバーループが回転角速度 Ω で回転を始めると、左右両回り光にファイバーループの回転による位相差が生じ、次のように表される。

$$E_{cw} = E \exp[i(\omega t - \Delta\theta/2)] \quad (18)$$

$$E_{ccw} = E \exp[i(\omega t + \Delta\theta/2)] \quad (19)$$

式(18)、式(19)で表される左右両回り光をそのまま合成すると、検知器で受光する干渉光の強度は

$$I_p = |E_{cw} + E_{ccw}|^2 = 2E^2(1 + \cos \Delta\theta) \quad (20)$$

となる。

式(20)から明らかなように、出力 I_p は $\Delta\theta$ すなわち、ファイバーループの回転角速度 Ω の余弦関数になっており、微少な回転に対して出力の変化が極めて緩慢になり、このままでは計測技術上適当ではない。また、周期性をもっているため、入力角速度 Ω の可測範囲（ダイナミックレンジ）が制限される。

光ファイバージャイロは上記の問題点を解決するために、今日まで、その感度の向上とダイナミックレンジの拡大をめざし、さまざまな方式が考察されてきた。以下にそれらの方式の構成を紹介していこう。考察されてきた方式はその光学系によって大別すると干渉型と共振型に分けられる。さらに、干渉型は同一周波数の光の干渉光を検知する光ホモダイン方式と、異なる周波数の光の干渉光を検知する光ヘテロダイン方式に分けられる。光ホモダイン方式には分解能の向上を実現した位相変調方式、さらにこの位相変調方式を基にダイナミックレンジの拡大を図った周波数変調方式、そしてこの周波数変調方式を発展させ、光導波路を使って銀歯状波による変調を行ったセラダイン方式等がある。下に各種方式の分類を示す

以下に、代表的ないくつかの方式について簡単に紹介していこう。

3.1 位相変調方式⁹⁻¹¹⁾ ダイナミックレンジは比較的狭いが、高分解能の光ファイバージャイロで位相変調方式を使ったものが最近、製品化されはじめている。第7図に位相変調方式の光学系についての基本構成例を示す。

ファイバーループを含む閉じた光学系の中に位相変

第7図 オールファイバー化した位相変調方式の構成例

調器として電歪振動子(PZT)を入れ、光に位相変調をかける。右回り光はファイバーループを回った後、PZTにより変調を受ける。左回り光はファイバーループに入る前に変調を受ける。この変調によって生じる両光の位相差が180度になるようにファイバーループの長さを調整する。

したがって、式(18)、(19)の位相項にPZTによる変調の効果 $m_p \sin(pt)$ を加えて合成点における右回り光を

$$E_{cw} = E \exp[i(\omega t + m_p \sin(pt + \pi/2) - \Delta\theta/2)] \quad (21)$$

とすると、左回り光はこれに対して位相差を π だけ遅らせて

$$E_{ccw} = E \exp[i(\omega t + m_p \sin(pt - \pi/2) + \Delta\theta/2)] \quad (22)$$

と表せる。

ここに、 m_p はPZTにかける変調電圧の大きさによって決まる量であり、いわゆる変調指数と言われるもので、変調の深さを表す量である。また、 p は変調波の角周波数である。

光源から出た左右両回り光がPZTで上述のような変調を受け、出力端で再び合成されて干渉光を作り、検知器で捕えられる。この干渉光の強度 I_p は

$$\begin{aligned} I_p &= |E_{cw} + E_{ccw}|^2 \\ &= |E \exp(i\omega t) \cdot [\exp\{i(m_p \cos pt - \Delta\theta/2)\} \\ &\quad + \exp\{-i(m_p \cos pt - \Delta\theta/2)\}]|^2 \\ &= 4E^2 \cos^2(m_p \cos pt - \Delta\theta/2) \\ &= 2E^2 [1 + \cos(2m_p \cos pt - \Delta\theta)] \end{aligned} \quad (23)$$

となる。

式(23)の右辺第2項を、ベッセル関数によって展開すると

$$\begin{aligned} I_p &= 2E^2 [1 + 2 \sin \Delta\theta \{J_1(2m_p) \cos pt \\ &\quad - J_3(2m_p) \cos 3pt \\ &\quad + J_5(2m_p) \cos 5pt - \dots\} \\ &\quad - 2 \cos \Delta\theta \{-J_0(2m_p)/2 \\ &\quad + J_2(2m_p) \cos 2pt \\ &\quad - J_4(2m_p) \cos 4pt \\ &\quad + J_6(2m_p) \cos 6pt - \dots\}] \end{aligned} \quad (24)$$

の形で分解して表すことができる。なお、 $J_1(2m_p)$ 、 $J_2(2m_p)$ 、 $\dots$ は第8図に示す第1種のベッセル関数である。

ここで、式(24)で表される合成光の J_1 項、 J_2 項に着目し、角周波数 p と $2p$ で同期検波することによって、サニャック位相差 $\Delta\theta$ を含む $\sin \Delta\theta$ と $\cos \Delta\theta$ を検出する。次に $\sin \Delta\theta$ 、 $\cos \Delta\theta$ の線形領域の部分を使い、逆関数演算によって $\Delta\theta$ を求める。以上がこの

第8図 第1種のベッセル関数

方式の原理である。この方式は $\sin \Delta\theta$, $\cos \Delta\theta$ の形で信号を検出するので、その周期性のためにダイナミックレンジが限られてしまうが、右回り光と左回り光が同一の光路を通るため分解能に優れるという利点がある。

3.2 周波数変調方式^{6,7)} 周波数変調方式は位相変調によって式(24)のように表された合成光から、同期検波によって周期関数の項を取り出し、線形で感度のよいところを使って $\Delta\theta$ を得るまでは位相変調方式と同様であるが、さらにダイナミックレンジを拡大するために左右両回り光間に周波数の差をつくり、これによって生じる位相差を使ってフィードバックループを形成したものである。

まず初めに、左右両回り光の間に周波数差がある場合、その周波数の差によって生じる位相差について説明しよう。第9図に示すように、光ファイバーループの両端に二つの周波数シフター FS_1 と FS_2 を置き、光源からの光(この角周波数は ω とする)をそれぞれ ω_1 , ω_2 の角周波数で励振する。右回り光 E_{cw} は FS_1 に入射し、 ω_1 の角周波数シフトを受け、角周波数 $\omega + \omega_1$ になった後ファイバーループを回り、さらに FS_2 で ω_2 の角周波数シフトを受け、角周波数 $\omega + \omega_1 + \omega_2$ となってビームスプリッタに戻る。また逆に、左回り光 E_{ccw} は、 FS_2 に入射し、 ω_2 の角周波数シフトを受け、角周波数 $\omega + \omega_2$ になった後ファイバーループを回り、さらに FS_1 で ω_1 の角周波数シフトを受け、 $\omega + \omega_1 + \omega_2$ になってビームスプリッタに戻る。したがってビームスプリッタで集光するとき、左右両回り光は同一の周波数となっているが、ファイバーループ通過中は左右両回り光は互いに周波数の異なる光であり、そのために出力端で左右両回り光の間に位相差が生じる。いま、 f_1, f_2 をそれぞれ FS_1, FS_2 によってシフトされる周波数とすると、

$$\omega_1 = 2\pi f_1, \quad \omega_2 = 2\pi f_2 \quad (25)$$

であるから、このファイバーループを通過した左右両回り光の周波数の違いによって生じる位相差 $\Delta\theta_i$ は次のようになる。

第9図 周波数シフターを入れた構成例

$$\begin{aligned} \Delta\theta_i &= \frac{2\pi nL}{c}(f_1 - f_2) \\ &= \frac{2\pi nL}{c}\Delta f \end{aligned} \quad (26)$$

ここで、 $\Delta f = f_1 - f_2$ である。

そこで、この光の周波数の違いによって生じる位相差 $\Delta\theta_i$ に着目し、周波数シフター FS_1 の f_1 、または FS_2 の f_2 の一方を制御して $\Delta\theta_i$ を可変にし、ファイバーループの回転によって生じる式(1)のサニャック位相差 $\Delta\theta$ を $\Delta\theta_i$ で相殺する。つまり、常に、

$$\Delta\theta = \Delta\theta_i \quad (27)$$

となるように周波数シフターにフィードバックをかける。このような方法を取り入れると、検知器で受光する干渉光のパワー I_p は次式のようにになる。

$$\begin{aligned} I_p &= |E_{cw} + E_{ccw}|^2 \\ &= 2E_0^2 [1 + 2 \sin(\Delta\theta - \Delta\theta_i) \{ J_1(2m_p) \cos pt \\ &\quad - J_3(2m_p) \cos 3pt \\ &\quad + J_5(2m_p) \cos 5pt \\ &\quad - \dots \} \\ &\quad - 2 \cos(\Delta\theta - \Delta\theta_i) \{ -J_0(2m_p)/2 \\ &\quad + J_2(2m_p) \cos 2pt \\ &\quad - J_4(2m_p) \cos 4pt \\ &\quad + J_6(2m_p) \cos 6pt \\ &\quad - \dots \} \}] \end{aligned} \quad (28)$$

位相変調方式で述べたと同様に同期検波によってベッセル関数の一つの項を取り出し、常に式(28)の $\Delta\theta - \Delta\theta_i$ が零になるように $\Delta\theta_i$ を Δf で制御する。そして Δf を測定することによって式(26)から $\Delta\theta_i$ を知ることができ、 $\Delta\theta_i$ と等しい $\Delta\theta$ を知ることができる。

このように、フィードバックによる零位法を採用することにより、本来周期性を持つために可測範囲が限られるという制限を取り除くことができ、ダイナミックレンジの拡大を図ることができる。

精度の向上とダイナミックレンジの拡大を考慮して、光回路部に周波数シフターとして AOM を、また位相変調器として PZT を用いた周波数変調方式の構成例を第10図に示す。この図において検知器で受

第10図 零位法による周波数変調方式の構成例

光される干渉光の強度は式(28)で与えられる。

周波数変調方式は位相変調によって分解能の向上を図るとともに、周波数変調を使ってフィードバックをかけた零位法によりダイナミックレンジの拡大も可能にしているが、この構成例ではAOMを使用しているため、光回路中に空気層の伝播路をなくすことができず、温度変化等の環境の変化を受けやすい欠点がある。しかし、この方式は次に述べるセロダイン方式と同様、出力信号はデジタル量で検出できるため、計算機との整合性を有する利点がある。

3.3 セロダイン*方式^{8,11~15)} セロダイン方式は、分解能向上のために位相変調を用い、さらにダイナミックレンジ拡大のために鋸歯状波による変調をかけ、サニャック位相差との間に生じる位相誤差が零になるようにフィードバック制御することによってクロズドループを構成したものである。その構成例を第11図に示す。光導波路型変調器は導波路内で光を二方向に分け、そこに電極を構成し、一方は分解能の向上のために正弦波による位相変調をかけ、もう一方はフィードバック位相差を発生させるために鋸歯状波を印加する。二方向に分かれた光導波路型変調器の片端に鋸歯状波 $\phi = \phi(t - nT)$ 、(ただしここで t は $nT \leq t < (n+1)T$ である) を印加すると、左回り光は第12図(a)の実線で示す鋸歯状波の位相シフトを受ける(式(29))。また、右回り光はファイバーループを回ってからこの鋸歯状波を印加した位相変調器を通るので、

第11図 セロダイン方式の構成例

第12図 光導波路型変調器に印加する鋸歯状波とそれによって変調を受けた光の位相差

* セロダイン方式のセロダイン (serradyne) という語は英語で saw または sawtooth ということ意味するラテン語の "serra" という語からつくられており、これはレーダーのパルス圧縮技術等で使われる変調法で、serrassoid modulation (線形 FM パルス圧縮) と原理的には同じものである。

第12図(a)の点線で示すようにファイバーループを回る時間 τ だけ遅れて同様の鋸歯状波の位相シフトを受ける(式(30))。

$$E_{ccw} = E \exp[i(\omega t + \phi t - \Delta\theta/2)] \quad (29)$$

$$E_{cw} = E \exp[i(\omega t + \phi(t-\tau) + \Delta\theta/2)] \quad (30)$$

したがって合成した両光の位相差は第12図(b)のようになる。ただし、ここで印加する鋸歯状波の振幅 Φ_0 を 2π にする必要がある。それは第12図(b)に示すように鋸歯状波の周期 T の切り換わりのとき、検知する位相差が $\phi\tau$ から $\phi\tau - \Phi_0$ に変わるが、 Φ_0 をちょうど 2π に設定することにより $\exp(i\phi\tau) = \exp[i(\phi\tau - \Phi_0)]$ となり、鋸歯状波による位相シフトの全領域にわたって光の強度が等しく検知できるからである。

以上のランプジェネレーターによる変調の他に、第11図に示すように、さらに光導波路型変調器のもう一方の片端に位相変調をかけているため、式(29)、(30)に $m_p \sin pt$ の変調項(式(21)、(22)参照)を加えると次式になる。

$$E_{ccw} = E \exp[i(\omega t + \phi t + m_p \sin pt - \Delta\theta/2)] \quad (31)$$

$$E_{cw} = E \exp[i(\omega t + \phi(t-\tau) + m_p \sin pt + \Delta\theta/2)] \quad (32)$$

したがって、これらを合成して作られる干渉光の強度 I_p は結局、次の展開式で表される。

$$\begin{aligned} I_p &= |E_{cw} + E_{ccw}|^2 \\ &= 2E^2 [1 + 2 \sin(\Delta\theta - \phi\tau) \{ J_1(2m_p) \cos pt \\ &\quad - J_3(2m_p) \cos 3pt \\ &\quad + J_5(2m_p) \cos 5pt \\ &\quad - \dots \} \\ &\quad - 2 \cos(\Delta\theta - \phi\tau) \{ -J_0(2m_p)/2 \\ &\quad + J_2(2m_p) \cos 2pt \\ &\quad - J_4(2m_p) \cos 4pt \\ &\quad + J_6(2m_p) \cos 6pt \\ &\quad - \dots \}] \quad (33) \end{aligned}$$

式(33)を前節と同様に同期検波し、ベッセル関数の一つの項を取り出す。以後は周波数変調方式と同様に、常に $\Delta\theta = \phi\tau$ となるように鋸歯状波の傾き、つまり鋸歯状波の周波数を制御する。したがって鋸歯状波の周波数を知ることによって常に $\Delta\theta$ を知ることができる。

このセロサイン方式は分解能の向上とダイナミックレンジの拡大の両方を実現した方式である。さらに光導波路型変調器を使ったことにより、光回路中に空気層の伝播路をなくことができ、環境の変化による影響を受けにくくなっている。なお、この構成例他にもデジタルセロサイン変調によって二重のフィードバックをかける方法などが研究されている。

3.4 共振型^{11,12,14,15)} この方式は光ファイバリングを共振器として使うもので、前節までに述べた干渉型とは大きく異なる。

この方式は装置が回転しているとき、共振器内を左右に伝播する光の共振周波数に差が生じることを利用して回転角速度を計測するという点でリングレーザージャイロとよく似ている。しかし、リングレーザージャイロは共振器内で光源を形成しているため、必然的に起るロックイン現象に対する措置をとらなくてはならない。これに対し、この共振型光ファイバージャイロは光源を共振器の外に置くことができるため、その必要のない点が同じ共振型としては有利な点である。

共振型光ファイバージャイロでは、リング共振器を含む装置が角速度 Ω で回転すると、左右両回り光間に光路長差 ΔL が生じ、共振器からの左右の出力が異なってくる。これは左右両回り光の共振周波数に差が生じたためであり、この周波数差 Δf は式(34)で与えられる。ここで、 A はリング共振器が囲む面積、 λ は光源の波長、 L はリング共振器長である。

$$\Delta f = \frac{4A}{\lambda L} \Omega \quad (34)$$

第13図にこの原理を利用した構成例(ファブリ・ペロー共振器型)を示す。光源から出た光はカプラーによって2方向に分けられ、次にカプラーC1を通してリング共振器に互いに逆向きに入射する。リング共振器を通った光はさらにカプラーC2によってそれぞれ検知器へと導かれる。ここで使用されるカプラーは共振特性をシャープにするため高分岐比のものが要求される。

さて、カプラーC2で分岐し検知器を通った左回り光の出力は、光源の変調波 ω_m でロックインアンプにより同期検波されて、共振特性の微分波形として得られる。この微分波形の零点は共振波形のピーク値を示している。そこでロックインアンプの出力を周波数コントローラーを通して光源の周波数にフィードバックをかけることによって、常にリング共振器内の左回り光を共振状態に保つことが可能となる。このときの右回り光の検知器の出力を同様に ω_m で同期検波すると、回転角速度が加わったとき、同期検波出力は零点近傍の線形領域内において両回り光の周波数差 Δf に比例した信号として得られるので、結局、式(34)によ

第13図 共振型光ファイバージャイロの構成例

ってジャイロの回転角速度が検出されることになる。

この方式は干渉型のようにファイバーの長さを必要としない等の利点はあるが、スペクトル幅の非常に狭い光源や低損失のカプラーが必要であることなどの問題点が残されている。現在は実験室レベルの研究段階であるが、理論的には分解能、ダイナミックレンジとも高くできる可能性が示されており、上述の例以外にも各種の方式が考案され実験が行われている。将来は光源、カプラー、共振器、検知器等、すべてを一つの光 IC として生産できることが期待されており、そのときには量産によるコストの低下、耐久性、小型化など多くの面でこの共振型は優れたジャイロになることであろう。

4. データ解析例

以上、光ファイバージャイロの各種構成の概要を述べたが、次に筆者らが昭和 60 年から携わってきた位相変調方式と周波数変調方式に関して行った解析例をいくつか紹介しよう。実験で使用したジャイロの仕様は、位相変調方式では光源の波長： $1.3\ \mu\text{m}$ 、ファイバー長： $466\ \text{m}$ であり、周波数変調方式では光源の波長： $0.83\ \mu\text{m}$ 、ファイバー長： $450\ \text{m}$ である。また、両方式とも外径は約 $70\ \text{mm}$ である。

4.1 最大入力角速度、直線性 はじめに、周波数変調方式を例に $\pm 300\ \text{deg/sec}$ の最大入力角速度と直線性を調べ、その結果得た回帰直線を第 14 図に示す。この例ではサンプリング間隔は $0.1\ \text{sec}$ である。 $50\ \text{deg/sec}$ ごとに变化させた入力において、計算に使用したデータ数は各 200 個である。回帰直線はそのままでは精度の検討はできない。そこでその回帰直線を評価するのに統計的手法である回帰直線の 95% 信頼幅について検討した (付録 D 参照)。第 14 図の回帰直線を中心線にしてデータの分布を拡大してみると第 15 図のようになる。この図で、横軸の中心線が回帰直線であり、 $\odot$ で示したのが各ステップにおけるデータの平均値、 $\odot$ からのびる縦の直線がそのデータの標準偏差である。そして点線で示した曲線がこの回帰直線の 95% 信頼幅を表わしている。この 95% 信頼幅は、回帰直線 $Y = bX + a$ の Y の不偏分散と t 分布から求めた曲線で、回帰直線に対してデータのバラツキが大きいほど、その信頼幅は広がる。したがって信頼幅を表す二つの曲線の間が狭いほどその回帰直線の精度が良いということになる。筆者らは、このような方法で光ファイバージャイロの直線性について解析評価した。

4.2 分解能 次に分解能を調べる実験の一例として、位相変調方式のジャイロを使い、地球の自転を測

第 14 図 最大入力角速度、直線性試験の回帰直線

第 15 図 回帰直線からの出力誤差

定したのでそれを紹介しよう。

実験場所は北緯 35.7° に位置する。したがってジャイロを北に向けたとき、そこでは

$$\begin{aligned} & \text{地球の自転} \times \cos 35.7^\circ \\ &= 360 \div (24 \times 60 \times 60) \times \cos 35.7^\circ \\ &= 0.0034\ \text{deg/sec} \end{aligned}$$

の角速度をジャイロは受けるはずである (第 16 図)。

ターンテーブルの上にジャイロを横に向けて乗せ、東、南、西、北、東と順々に検知軸の方向を変えて静止させ、そのときのジャイロ出力を測定した。結果を第 17 図に示す。この図の点線は北緯 35.7° の地球の自転 ($0.0034\ \text{deg/sec}$) を表している。このデータからジャイロが地球の自転を検知していることは明らかであるが、統計的な手法による評価検討も行った。即ち平均値の差の検定と分散の比の検定である。東、南、

第16図 地球の自転とジャイロの設置関係

第17図 地球の自転の測定結果

西、北、東の各データの立ち上がりと終わりを除いた間のデータから平均と分散を求め、それぞれを比較した。まず平均値の差の検定では東と南、南と西というように、すべての組合せの場合について互いの平均値が等しいという仮説をたて、有意水準0.05に対してその仮説が棄却されるか、採択されるかを判定した。平均値の差の検定では、東と西の相互関係を除いて、異なる方向相互間の平均値の間には有意な差が認められることが予想されるので、互いの平均値が等しいという仮説は棄却されることが期待される。また反対に東と西の比較のときは平均値が等しいことが予想されるので、前記の仮説が採択されることが期待される。以上のようにして各平均値の差から得た t 値を t 分布表で検定した。

次に分散の比の検定では、各データは同じ条件で計測したデータであるから、分散は皆等しいことが予想される。したがって東と南、東と西というように各データの分散を比較していくとき、互いの分散が等しいという仮説をたてると、その仮説が採択されることが期待される。各分散の比をとって有意水準0.05で F 分布表からその仮説が棄却されるか、採択されるかを判定した。

以上、平均値の差の検定、分散の比の検定の結果を

第1表 分解能のデータの評価

	東	南	西	北	東
東	0.10 0.82	棄○ 22.0	棄× 3.37	棄○ -14.48	棄× -2.95
南	採○ 1.18	-3.57 0.76	棄○ -19.9	棄○ -33.5	棄○ -22.7
西	採○ 1.28	採○ 1.08	-0.62 0.73	棄○ -17.9	棄× -6.10
北	採○ 0.58	棄× 0.48	棄× 0.45	2.89 1.09	棄○ 10.8
東	採○ 0.68	採○ 0.57	採○ 0.53	採○ 1.18	0.44 1.00

第1表にまとめた。この表で対角に二重線で囲まれた枠内の上段の数値が平均値、下段の数値が標準偏差を表していて、単位は 10^{-3} deg/sec である。また、この表で対角線の右上半分に平均値の差の検定の結果を、左下半分に分散の比の検定の結果を表した。前記の検定の結果、仮説が棄却されたものを棄、採択されたものを採と表に示し、期待どおりの良好な結果だったものには○、そうでないものには×で示した。また、表の○×の下にある数値で対角線右上半分のものは平均値の差から求めた t 値で t 分布表との比較に使った値であり、対角線左下半分のものは分散の比から求めた f 値で F 分布表との比較に使った値である。

第1表で対角線右上半分の平均値の差の検定で、東と西の平均値に有意差が認められる箇所があったが、これはジャイロの零点が時間とともにずれたことが原因と考えられる。また、対角線左下半分の分散の比の検定で、北のデータの分散により結果が得られなかったのは、第17図からもわかるように、ところどころにある大きなノイズもデータとして計算してしまったためと考えられる。

筆者らはこのような方法で、分解能の解析評価を行い、光ファイバージャイロが地球の自転を検知していることを確認した。

5. あとがき

光ファイバージャイロの原理であるサニャック効果

と、それによって角速度を検出する干渉型光ホモダイン方式及び共振型の代表的な構成例について概観し、筆者らの行ったジャイロの解析評価の一例を紹介した。

光ファイバージャイロの実用化に向けての技術的展開は光学部品の開発に負っているといっても過言ではないだろう。研究当初に利用したビームスプリット、偏光板などレンズ系の構成部品がノイズの低減と検知レベルの安定性向上などのため、ファイバー型のカプラー、ポラライザーなどに置き代わり、光学回路中に空気層を入れない方向で技術が進展した。この技術展開には、干渉型と共振型では必要とするレーザー光源の性質は異なるが、それぞれに応じて、安定度の高い高品質のレーザー発振器と偏波面保存ファイバーの実現が必須であった。また、角速度が零近傍における分解能の感度向上を図るためには、1/4波長板などを使う方法から電歪素子を使って光変調を行う方法へと代わり、さらに光ICによる変調法へと代わってきた。そして現在では、これら構成要素の温度変動等の環境変化に対する安定性の向上をめざしている⁵⁾

おわりに、光ファイバージャイロの各方式について、実用面からみてみよう。位相変調方式は、ダイナミックレンジが限られてしまうが、構成が簡易で分解能が高いため、ダイナミックレンジをそれほど必要としないロボットや自動車などの分野で今後使用されて行くようになるだろう。また、ダイナミックレンジが大きくとれるセロダイン方式は、高性能化をめざして開発されつつあり、今後は高運動性を有する運航体におけるストラップダウン方式の慣性センサーとして光ファイバージャイロの主流になっていくものと思われる。そして将来、光IC技術の発展により、薄型でコンパクトな共振型光ファイバージャイロが実用化される日が訪れるだろう。我国において約10年にわたる光ファイバージャイロの研究結果が実り、ようやく実用化へのスタートを切るに至った。今後もその性能の向上と発展が期待されており、従来の機械式ジャイロが時代の流れと共に、この先端技術である光ファイバージャイロにとって代わる日もそう遠くはないであろう。

付録 A 特殊相対論の座標変換^{16,17)}

特殊相対論は次の仮定に基づいて構成された体系である。

- (1) 慣性座標系は存在し、ある一つの慣性座標系に対して等速運動する座標系もまた慣性座標系である。
- (2) 自然法則の記述はすべての慣性座標系で同じ

であり、絶対静止系という特別な系を選び出すことはできない。

- (3) 真空中の光の速さは、どの慣性座標系についても等方的であって、一定の値 c を持つ。

ここで慣性座標系というのは、物体に力が働かないとき、その物体は等速直線運動をするという慣性の法則の成り立つ座標系をいう。

上の仮定で(2)を特殊相対性原理、(3)を光速一定の原理という。

ここでは、空間的に2次元平面上の慣性座標系について概観する。

いま、一つの慣性座標系 I (その座標を x, y , 時間を t とする。) からみて、 x 軸方向に一定速度 v の速さで並進運動をしている別の慣性座標系 I' (その座標を x', y' , 時間を t' とする。) があり、時刻 $t=t'=0$ において、この二つの座標系は原点を含め、重なっていたとする。

これら二つの慣性座標系 I, I' について、

$$s^2 \triangleq x^2 + y^2 - (ct)^2 \quad (a1)$$

$$s'^2 \triangleq x'^2 + y'^2 - (ct')^2 \quad (a2)$$

とおくと、上記(2)の相対性と(3)の光速一定の原理から

$$s^2 = s'^2 \quad (a3)$$

が成り立つ。

式(a3)を常に満たすような I 系と I' 系の座標の間の関係は次のローレンツ変換によって与えられる。

$$\left. \begin{aligned} x' &= \gamma(x - vt) \\ y' &= y \\ t' &= \gamma(t - (v/c^2)x) \end{aligned} \right\} \quad (a4)$$

ここに、

$$\gamma = 1/\sqrt{1 - (v/c)^2} \quad (a5)$$

と置いた。

式(a4)を逆に解くと

$$\left. \begin{aligned} x &= \gamma(x' - (-v)t') \\ y &= y' \\ t &= \gamma(t' - (-v/c^2)x') \end{aligned} \right\} \quad (a6)$$

を得る。式(a6)は I' 系の時空座標を I 系で表したものであり、式(a4)と相対速度の符号の違いを除けば、同じ表現になっている。即ち、変換の対称性を保っている。また、相対運動と直角方向に関しては、両系とも同じ値になることは変換式(a4)と(a6)の第2式から明らかである。変換式(a4)、(a6)の表現は時間と空間の微小な範囲、即ち無限小の変化量についてもそのまま成り立つ。両系における微小な変化量について、次の光速一定を表す一般式

$$(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 - c^2(\Delta t)^2$$

$$=(\Delta x')^2 + (\Delta y')^2 - c^2(\Delta t')^2 \quad (a7)$$

から

$$\left. \begin{aligned} \Delta x' &= \gamma(\Delta x - v\Delta t) \\ \Delta y' &= \Delta y \\ \Delta t' &= \gamma(\Delta t - (v/c^2)\Delta x) \end{aligned} \right\} \quad (a8)$$

が導かれる。

付録B ローレンツ収縮^{16,17)}

相対運動の運動方向については、I'系で測った長さが ξ' である線分の両端をI系で時刻 t を固定して測ると、式(a4)の第1式によって

$$\xi = \xi' / \gamma = \sqrt{1 - (v/c)^2} \xi' \quad (b1)$$

が得られる (第B1図①参照)。

逆に、I系で測った長さ ξ の線分をI'系からみると、式(a6)の第1式から次式が得られる (第B1図②参照)。

$$\xi' = \xi / \gamma = \sqrt{1 - (v/c)^2} \xi \quad (b2)$$

式(b1)、(b2)のことをローレンツ収縮という。

付録C 相対運動をする回転系^{16,17)}

I系(これを観測者のいる系とする。)の平面上で、半径 r の円を描き、その上に同じ大きさの透明な円板を重ねたものを考え、これをI'系とする。ここでこの円板は、I系の円の中心Oの回りに一定角速度 Ω で回転しているものとする。そしてI系の点を極座標表示で (r, θ) とし、この点に重なるI'系の点を同じく極座標表示で (r', θ') とする (第C1図参照)。

点 (r, θ) の近傍について、I'系の半径方向の線素 dr' は点 (r', θ') と $(r' + dr', \theta')$ との間の距離であり、この dr' はI系に対して運動してはいるが、点 (r, θ) におけるI'系の運動方向(円周に沿う方向)と直角になっているため、半径方向の速度成分は零であり、I系からみてローレンツ収縮は起らず

$$dr' = dr \quad (c1)$$

が成り立つ。そして、両系の原点が同じであることから $r' = 0 \Leftrightarrow r = 0$ であり、したがって

$$r' = r \quad (c2)$$

となる。

つぎにI'系で、半径方向と直角な回転の接線方向の線素 $r'd\theta'$ を考える。 $r'd\theta'$ は点 (r', θ') と $(r', \theta' + d\theta')$ との間の距離であり、I系に対して $v = r\Omega$ の速度をもって、点 (r, θ) におけるI'系の運動方向と一致しているため、ローレンツ収縮が起る。したがって、(b1)式により、

$$\sqrt{1 - (v/c)^2} r' d\theta' = r d\theta \quad (c3)$$

逆に、I系の線素 $r d\theta$ は、I'系に対して、回転運動の接線方向に $v = -r\Omega$ の速度をもって、

第C1図 相対運動をする回転系

$r d\theta$ をI'系で測ると、(b2)式により、

$$r' d\theta' = \sqrt{1 - (v/c)^2} r d\theta \quad (c4)$$

となる。

付録D 回帰直線の信頼幅の推定^{18,19)}

変量 X, Y についての回帰モデルを

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X \quad (d1)$$

とし、 n 組の観測値 $x_i, y_i, (i=1, 2, \dots, n)$ について、次の関係が成立するものとする。

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i \quad (d2)$$

ここに、 x_i は変量 X の、 y_i は変量 Y の実現値(測定値)である。

また、 ε_i は y_i に加法的に混入する観測ノイズであり、次の条件を満たすものと仮定する。

1° 不偏性により $E(\varepsilon_i) = 0$

2° 独立性により $Cov(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0 \ (i \neq j)$

3° 等分散性により $Var(\varepsilon_i) = \sigma^2$ (一定)

この線形回帰モデルの正規方程式は

$$\begin{bmatrix} n & \sum x_i \\ \sum x_i & \sum x_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\beta}_0 \\ \hat{\beta}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum y_i \\ \sum x_i y_i \end{bmatrix} \quad (d3)$$

で与えられる。記号 Σ は n 個のデータの和を表す。これより母数 β_0, β_1 の推定値 $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1$ が次のように求められる。

$$\hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x} \quad (d4)$$

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum (x_i - \bar{x})^2} \quad (d5)$$

$$\text{ただし, } \bar{x} = \sum x_i / n \quad (d6)$$

$$\bar{y} = \sum y_i / n \quad (d7)$$

である。また、 σ^2 の不偏推定量 $\hat{\sigma}^2$ は

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}^2 &= \frac{\sum \varepsilon_i^2}{n-2} = \frac{\sum (y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_i)^2}{n-2} \\ &= \frac{\sum (y_i - \bar{y}) - \hat{\beta}_1 \sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{n-2} \end{aligned} \quad (d8)$$

となる。分母が n でなく $n-2$ であるのは、母数が β_0, β_1 の 2 つあることから、

自由度 = (n 個の独立な関係式) - (母数の数)

となるからである。

さてここで、母数についての区間推定を行うためには、 Y の分布型についての仮定が必要である。そこで、

4° Y は正規分布に従う。

ことを仮定すると、 Y の推定量 $\hat{y}$ について $X=x$ のとき、 $\hat{y}$ の平均値 $E(\hat{y})$ は

$$E(\hat{y}) = \hat{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x \quad (d9)$$

となり、分散 $Var(\hat{y})$ は

$$\begin{aligned} Var(\hat{y}) &= Var(\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x) \\ &= Var(\hat{\beta}_0) + 2xCov(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1) + x^2 Var(\hat{\beta}_1) \end{aligned} \quad (d10)$$

ここで、 $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1$ の分散、共分散は次の行列で与えられる。

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} Var(\hat{\beta}_0) & Cov(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1) \\ Cov(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_0) & Var(\hat{\beta}_1) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} n & \sum x_i \\ \sum x_i & \sum x_i^2 \end{bmatrix}^{-1} \sigma^2 \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\sum x_i^2}{n \sum (x_i - \bar{x})^2} & \frac{-\bar{x}}{\sum (x_i - \bar{x})^2} \\ \frac{-\bar{x}}{\sum (x_i - \bar{x})^2} & \frac{1}{\sum (x_i - \bar{x})^2} \end{bmatrix} \sigma^2 \end{aligned} \quad (d11)$$

したがって、

$$Var(\hat{y}) = \left[\frac{1}{n} + \frac{(x - \bar{x})^2}{\sum (x_i - \bar{x})^2} \right] \sigma^2 \quad (d12)$$

となる。

式(d9)と(d12)により、誤差の分散 σ^2 が既知のときは正規分布表を利用して、 Y の信頼幅 (信頼区間) を作ることができるが、 σ^2 が未知のときには、式(d12)の σ^2 をその不偏推定値 $\hat{\sigma}^2$ に置き換える。そして、 $\hat{y}$ の分散の推定値

$$V\hat{a}r(\hat{y}) = \frac{\sum \varepsilon_i^2}{n-2} \left[\frac{1}{n} + \frac{(x - \bar{x})^2}{\sum (x_i - \bar{x})^2} \right] \quad (d13)$$

を用いて、自由度 $n-2$ の t 分布表を利用し、回帰直線 Y の各点における信頼幅が求められる。

ただし、 n が大きいとき t 分布は正規分布で近似できるから、このときは回帰直線 Y の 95% 信頼幅は、
 $\hat{y} - 1.96(V\hat{a}r(\hat{y}))^{1/2} < Y < \hat{y} + 1.96(V\hat{a}r(\hat{y}))^{1/2}$
 によって求められる。

参考文献

- 1) Post, E. J.: Sagnac Effect, Rev. Modern Phys., 39 (1967), pp. 475-493.
- 2) 保立和夫, 東口 實, 丹羽 登: レーザージャイロ-光ファイバレーザージャイロの研究動向-。計測と制御, 20 (1981), pp. 937-946.
- 3) 末松安晴 (監修): 光ファイバ応用技術集成, 日経技術図書, 1986, pp. 385-403.
- 4) 保立和夫, 大熊直彦, 吉田安徳, 東口 實: 光ファイバレーザージャイロについて, 信学技報 SANE 81-9 (1981), pp. 25-32.
- 5) 大越孝敬, 岡本勝就, 保立和夫: 光ファイバー, オーム社, 1984.
- 6) Cahill, R. F. and Udd, E.: Phase-nulling Fiber-optic Laser Gyro, OPTICS LETTERS, 4, 3 (1979), pp. 93-95.
- 7) Davis, J. L. and Ezekiel, S.: Closed-loop, Low-noise Fiber-optic Rotation Sensor, OPTICS LETTERS, 6, 10 (1981), pp. 505-507.
- 8) Ebberg, A. and Schiffner, G.: Closed-loop Fiber-optic Gyroscope with a Sawtooth Phase-modulated Feedback, OPTICS LETTERS, 10, 6 (1985), pp. 300-302.
- 9) Frigo, N. J.: An Amplitude Switched Fiber Optic Gyroscope, OFS'86, TOKYO (1986. 10. 7-9), 181-184.
- 10) Udd, Eric (Chair/Editor): Fiber Optic Gyros, 10th Anniversary Conference, Proc. SPIE, Vol. 719 (1986).
- 11) レーザー学会: レーザージャイロ, 第 148 回レーザー学会研究会報告(1989).
- 12) 保立和夫, 東口 實: 受動型光ジャイロの研究開発動向, 第 27 回飛行機シンポジウム講演集, 日本航空宇宙学会・日本航空技術協会, 1989, pp. 88-91.
- 13) 赤澤 優, 岡田健一: ファイバージャイロの現状, 第 5 回宇宙航空の誘導制御シンポジウム資料, 1988, pp. 51-56.
- 14) 保立和夫: 光ファイバージャイロ, 計測と制御, 29 (1990), pp. 68-74.
- 15) 保立和夫: 光ファイバージャイロ干渉方式ならびに共振方式の研究・開発状況-1, 信学誌, 73 (1990), pp. 149-160.
- 16) 後藤憲一: 相対論, 共立全書, 共立出版, 1972.
- 17) 石川孝夫 (訳): 工学のための基礎物理学(上), 丸善, 1969.
- 18) Mendel, Jerry M.: Discrete Techniques of Parameter Estimation, Control Theory, 1 (1973).
- 19) 国沢清典: 統計学初歩, 数学セミナーリーディングス, 日本評論社, 1974.
- 20) Richardson, K. I. T., M. A.: The Gyroscope Applied, Hutchinson's Scientific and Technical Publications, 1955.
- 21) 河田伸一: ジャイロとその応用, 精密機械, 49, 12 (1983), pp. 98-107.