宇宙機の最適なランデブに関する一覽書^{*1}

A Note on Optimal Spacecraft Rendezvous

石本真二^{*2}・加藤寛一郎^{*3}

Shinji ISHIMOTO and Kanichiro KATO

Key Words: Optimal Control Problems, Optimal Trajectory, Rendezvous, Numerical Methods

Abstract

This paper considers optimal rendezvous maneuvers to bring a spacecraft into close proximity of a target in circular orbit (typically a space station). The motion of the spacecraft relative to the target is described by linearized differential equations. Three optimal control problems are formulated using these equations. Optimal maneuvers minimizing energy, fuel, and time required for transfer are investigated and numerical solutions are shown employing SGRA (the sequential gradient-restoration algorithm).

1. はじめに

宇宙ステーションなどの軌道上の拠点を中心に行なわれる将来の宇宙開発を成功に導くためには、各種の宇宙機どうしのランデブ・ドッキングは欠かすことはできない。本稿では、ランデブを行なう二つの宇宙機がすでに十分に接近していると想定し、円軌道上にある目標に向かって宇宙機を移動させるための最適な制御を考察する。

このような問題に関しては、過去に複数のインパルスによる最適なランデブが多数研究されている(例えば文献1,2)。しかし、推力を連続量として扱う解析はほとんど行なわれていない。これは従来、最適制御問題を数値的に解くことが困難であったためと考えられる。

しかし、最近は二点境界値問題を解く優れたアルゴリズムが開発されてきた。例えば、MieleらのSGRAやMQAは数値解でありながらほとんど厳密解に近い精度で解を求めることができる。

本稿ではこのような数値解法を用い、推力を連続量として扱うランデブ問題を考察する。本稿の目的は、いくつかの典型的なランデブ軌道を最適制御問題の解

として示すことである。これによって評価関数とランデブ軌道の関係が明確に把握できる。また、このような解は実用的なランデブ軌道を評価する際の基準としても有用である。

本稿の構成は次のようになっている。第2節では、ランデブの目標の近傍にある宇宙機が従う運動方程式について述べる。目標に対する宇宙機の相対運動は、線形化された運動方程式によって近似することができる。第3節では無次元の変数を導入し、最適な軌道を定める問題を最適制御問題として定式化する。第4節では前節で定義された問題に対して最適解が満足すべき必要条件を述べ、宇宙機が移動する際に必要なエネルギー、燃料、時間という三種類の典型的な評価関数を最小にする最適な制御を示す。第5節ではSGRA(the sequential gradient-restoration algorithm)と呼ばれる数値解法によって得られた最適解の例を示す。第6節では本稿のまとめを簡単に述べている。

2. 運動方程式

ランデブを行なう宇宙機の運動を、第1図のような目標宇宙機の上に原点を持つ座標系 (x, y, z) で記述することにする³⁾。この座標系では、 x 軸は目標の速度ベクトル方向に、 z 軸は地球の中心方向に、 y 軸はこれらと右手系をなすようにとられている。ランデブを行なう宇宙機が目標の十分近傍にある場合、その運動は、引力項が目標のまわりに線形化された以下の線形微分方程式で近似することができる³⁾。

$$\ddot{x} = 2\omega_0 \dot{z} + f_x \quad (1)$$

$$\ddot{y} = -\omega_0^2 y + f_y \quad (2)$$

$$\ddot{z} = -2\omega_0 \dot{x} + 3\omega_0^2 z + f_z \quad (3)$$

ここで、 $\dot{}$ は時間に関する微分を表し、 ω_0 は目標の周回角速度、 f_x, f_y, f_z は外力による加速度の各軸方向成分である。この運動方程式は、Clohessy-Wiltshireの方程式⁴⁾あるいはHillの方程式として知られている。推力による加速度は、最適制御問題の要

*1 平成2年6月2日原稿受理

*2 東京大学大学院

*3 東京大学工学部航空学科

第1図 宇宙機の運動を記述するための座標系

請により区分的に連続な量で、その大きさが変化させられるものと仮定する。また、 xz 面すなわち軌道面内の運動とそれに垂直な y 軸方向の運動とは連成しないので、宇宙機はつねに目標となる宇宙機の軌道面内にあると仮定し、 y 軸方向の運動は考慮しない。

3. 問題の定義

簡潔な解析と安定した数値計算を行なうために、以下のような無次元の変数を導入する。

$$t = \omega_0 \tau \quad (4)$$

$$\mathbf{x} = [x_1, x_2, x_3, x_4]^T = \left[\frac{x}{l}, \frac{z}{l}, \frac{\dot{x}}{\omega_0 l}, \frac{\dot{z}}{\omega_0 l} \right]^T \quad (5)$$

$$\mathbf{u} = [u_1, u_2]^T = \left[\frac{f_x}{\omega_0^2 l}, \frac{f_z}{\omega_0^2 l} \right]^T \quad (6)$$

ここで、 τ は次元を持つ現実の時間、 l は無次元化を行なうための長さである。これら無次元の変数による宇宙機の運動方程式は次のようになる。

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \quad (7)$$

ただし、

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (8)$$

である。

上記の方程式によって運動が記述される宇宙機を時刻 $t=0$ から時刻 $t=t_f$ まで制御するとき、次の評価関数

$$J = \int_0^{t_f} f(\mathbf{u}) dt \quad (9)$$

を最小にするような制御入力 $\mathbf{u}$ を見いだすことを考

える。 $f(\mathbf{u})$ の具体的な形は後に与える。ただし、初期時刻における状態量 $\mathbf{x}(0)$ と終端時刻における状態量 $\mathbf{x}(t_f)$ は、いずれも、

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad \mathbf{x}(t_f) = \mathbf{x}_f \quad (10)$$

のように与えられていて、制御入力 $\mathbf{u}$ には、

$$|\mathbf{u}| \leq u_{\max} \quad (11)$$

という制限が加えられているものとする。 $u_{\max}$ は推力による加速度の上限を $\omega_0^2 l$ によって無次元化したものである。なお、推進剤の排出による宇宙機の質量の変化は考慮せず、飛行中に $u_{\max}$ は変化しないものと仮定する。

4. 最小原理による最適制御の導出

ポントリャーギン(Pontryagin)らの最小原理(Minimum Principle)によれば、前節の問題に対する最適な制御入力 $\mathbf{u}$ は、ハミルトニアン(Hamiltonian)と呼ばれるスカラー関数

$$H = f(\mathbf{u}) + \boldsymbol{\lambda}^T (\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}) \quad (12)$$

を各時刻において最小にする⁵⁾。具体的な最適制御 $\mathbf{u}$ の形は、後で問題ごとに与える。ここで、

$$\boldsymbol{\lambda} = [\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4]^T \quad (13)$$

は運動方程式(状態方程式)に対する乗数ベクトルで、随伴変数などと呼ばれる。評価関数(9)式が最小となるとき、随伴変数 $\boldsymbol{\lambda}$ は次の微分方程式

$$\frac{d\boldsymbol{\lambda}}{dt} = - \left(\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} \right)^T = - \mathbf{A}^T \boldsymbol{\lambda} \quad (14)$$

に従って変化する。ただし、状態変数の初期値・終端値が全て指定されているため、随伴変数の初期値・終端値は、あらかじめ知ることはできない。

最適な制御 $\mathbf{u}$ および最適な軌道 $\mathbf{x}$ を求めるためには、境界条件(10)式を満足するように、状態変数の微分方程式(7)式と随伴変数の微分方程式(14)式を連立して解かなければならない。これは一般に非線形微分方程式の二点境界値問題となるため、解析的に最適解を得ることは困難である。求解には繰り返し計算を含んだ数値解法によらなければならない。

以下では、評価関数(9)式の $f(\mathbf{u})$ に対して具体的な形を与え、各場合についての最適な制御を示す。

(i) $f = (1/2)|\mathbf{u}|^2$ のとき(ただし、終端時刻 t_f は指定する)：この評価関数を最小にする制御入力は最小エネルギー制御と呼ばれる。その最適な制御は次のように表される。

$$\mathbf{u} = \begin{cases} -\mathbf{p}, & |\mathbf{p}| \leq u_{\max} \text{ のとき} \\ -\frac{\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|} u_{\max}, & |\mathbf{p}| > u_{\max} \text{ のとき} \end{cases} \quad (15)$$

ただし、

$$\mathbf{p} = \mathbf{B}^T \boldsymbol{\lambda} = [\lambda_3, \lambda_4]^T \quad (16)$$

である。

(ii) $f=|u|$ のとき(ただし、終端時刻 t_f は指定する): この評価関数を最小にする制御入力是最小燃料制御と呼ばれる。その最適な制御は次のような不連続な関数となる。

$$u = \begin{cases} 0, & |p| < 1 \text{ のとき} \\ -\frac{p}{|p|} u_{\max}, & |p| > 1 \text{ のとき} \end{cases} \quad (17)$$

随伴変数は連続であるから $|p|$ もまた連続な関数である。したがって、最適な制御は推力を切ったコースティングと最大推力による加速の繰り返しになることがわかる。

(iii) $f=1$ のとき(t_f は不定とする): このとき評価関数は $J=t_f$ となる。この評価関数を最小にする制御入力は最短時間制御と呼ばれる。その最適な制御は次のように表される。

$$u = -\frac{p}{|p|} u_{\max} \quad (18)$$

すなわち、随伴変数ベクトルの方向に最大推力を加えるのが最適な制御である。この問題では終端時間が不定でハミルトニアン H に時間 t が陽に含まれないため、最適な軌道では全制御区間にわたって

$$H=0 \quad (19)$$

が成り立つ。

5. 数値解法による最適解

前節までに定義された最適制御問題の数値解法によ

る解を示す。用いた数値解法は、一般的な付帯条件つき変分問題の解を求めることができる SGRA (the sequential gradient-restoration algorithm)⁶⁾ と呼ばれるものである。最適制御問題を変分問題として数値的に解くと制御入力が本来不連続になるべき問題でも、制御入力が連続な関数として近似される。そのためいわゆる 1 次 (1st order) の計算法である SGRA では精度の高い解を得ることができない。ここではその難点を克服するために入力が不連続になると予想される問題に対しては時間軸折り返し法⁷⁾ と呼ばれる手法を用いた。これは制御区間を制御入力が連続になる複数の部分区間に分割し、全ての区間に対して同時に最適化計算を行なう方法である。

以下に数値計算における仮定を述べる。ランデブの目標は、高度 460 km 円軌道を周回しているものとする。このときの周回角速度は $\omega_0 = 1.117 \times 10^{-3}$ rad/s となる。宇宙機は初期時刻に目標の後方 1000 m に停止していて、飛行を行なった後に終端時刻に目標上に停止するものとする。無次元化を行なうための長さに 1000 m という値を採用すれば、無次元の状態量に関する境界条件は以下ようになる。

$$x(0) = [-1, 0, 0, 0]^T \quad x(t_f) = [0, 0, 0, 0]^T \quad (20)$$

終端時刻を指定する問題では、終端時刻に目標の軌道周期 $2\pi/\omega_0$ の 0.5 倍を与えた。このとき無次元化された終端時刻 t_f は、

$$t_f = \pi \quad (21)$$

となる。推力による加速度の制限値は $10^{-4} g \text{ m/s}^2$ と

第2図 最小エネルギー制御問題の最適解

第3図 最小エネルギー制御問題の最適軌道

第4図 最小燃料制御問題の最適解

する。このとき、(11)式は、

$$|u| \leq 0.786 \quad (22)$$

となる。重力加速度 g としては地球表面上の値 9.807 m/s^2 という値を用いた。

まず、最小エネルギー制御問題すなわち $f = (1/2)|u|^2$ の場合の最適解を第2図に示す。この計算例では、制御入力 u_1, u_2 は随伴変数 λ_3, λ_4 の符号を逆にしたものとなっている。第3図はこのときの最適軌道を示したものである。この図における宇宙機は、目標宇宙機の軌道

周期の0.05倍の時間ごとに描かれている。最適軌道は、宇宙機の進行方向に対して右向きに働くコリオリ力の影響で、大きく回り込むような軌道になる。

次に、最小燃料制御問題すなわち $f = |u|$ の場合の最適解を第4図に示す。最適制御は、出発した直後と目的地に到着する直前に最大推力を用い、その間では推力を切るという形になる。この解は時間軸折り返し法を用いて解いたものである。第5図に、この場合の最適軌道を示す。宇宙機に描かれている間隔は第3図と同じである。軌道制御の方法は最小エネルギー

第5図 最小燃料制御問題の最適軌道

第6図 最短時間制御問題の最適解

第7図 最短時間制御問題の最適軌道

制御とは大きく異なるが、その最適軌道は、ほとんど同じ形となる。楕円軌道をこのような座標系から見るとサイクロイド状の軌道になることが知られているが、推力を切っている部分はそのような楕円軌道の一部になっていると考えられる。

最後に、最短時間制御問題すなわち $f=1$ の場合の最適解を第6図に示す。前節で述べたように、最適な制御はつねに最大推力を用いながら推力の方向を変化させていくという形になる。数値計算の結果、最適な終端時刻は $t_f=2.289$ となった。実時間では、これは軌道周期の0.3643倍に相当する。第7図はこのときの最適軌道を示したものである。飛行時間を短くするために、前の二つの場合に比べて軌道の回り込みが小さくなってはいるが、本質的には類似の軌道といえる。

6. お わ り に

本稿では、円軌道上の目標にランデブを行なう宇宙機の軌道制御に最適制御理論を適用し、移動に必要なエネルギー、燃料、時間という三種類の典型的な評価関数を最小にする最適な制御を求めた。それぞれの問

題に対する最適な制御は、制御目的を反映して大きく異なったものになることが解析と数値解によって示された。

参 考 文 献

- 1) Eggleston, J. M.: A Study of the Optimum Velocity Change to Intercept and Rendezvous, NASA TN D-1029 (1962).
- 2) Jezewski, D. J. and Donaldson, J. D.: An Analytic Approach to Optimal Rendezvous Using Clohessy-Wiltshire Equations, J. Astronaut. Sci., 27 (1979), pp. 293-310.
- 3) Redding, D. C., Adams, N. J. and Kubiak, E. T.: Linear-Quadratic Stationkeeping for the STS Orbiter, J. of Guidance, Control and Dynamics, 12 (1989), pp. 248-255.
- 4) Clohessy, W. H. and Wiltshire, R. S.: Terminal Guidance System for Satellite Rendezvous, J. Aerospace Sci., 27 (1960), pp. 653-658 and 674.
- 5) Bryson, A. E. and Ho, Y. -C.: Applied Optimal Control, John Wiley & Sons, 1975.
- 6) Gonzalez, S. and Miele, A.: Sequential Gradient-Restoration Algorithm for Optimal Control Problems with General Boundary Conditions, J. of Optimization Theory and Applications, 26 (1978), pp. 395-425.
- 7) 加藤寛一郎: 工学的最適制御, 東京大学出版会, 1988.