2次元成層せん断流における渦および吹き出しの基本解^{*1}

Fundamental Solutions of Source and Vortex in a Two Dimensional Stratified Shear Flow

市川 明夫^{*2}・平野 公孝^{*3}

Akio ICHIKAWA, Kimitaka HIRANO

菊地 正憲^{*3}

and Masanori KIKUCHI

Key Words: Fluid Dynamics, Fundamental Solution, Stratified Shear Flow, Lee Wave

Abstract

Fundamental solutions of a point source and a point vortex in a two-dimensional stratified shear flow are presented. The flow has the velocity increasing exponentially with y and the density decreasing exponentially with y . The Euler equations are linearized for small disturbances to the flow, and the method of Fourier transform is used to derive the solutions. Two types of solutions are obtained according to the magnitude of buoyancy effect; one is wavy form solution for large buoyancy and the other is non-wavy one for small buoyancy. For appropriate combination of source and vortex in a large buoyancy, the solution shows streamlines like lee waves.

1. ま え が き

近年、電子計算機の発達に伴い、流れの数値シミュレーションが広く行われるようになってきた。この数値シミュレーションは、航空機や流体機械の、設計初期段階におけるパラメトリックスタディや、実験が困難な現象の解析に、その役割を果たしている。

流れの数値シミュレーションの手法としては、大きく分けて、差分法、有限要素法、特異点法(パネル法、または境界要素法)の三つがある。このうち、特異点法では、流れに接する境界のみを対象に計算が行われる。したがって、他の手法に比べて、未知数が格段に少なくすむほか、境界の形が複雑な場合や開領域の扱いが容易であるという利点を持っている。

この特異点法を用いる場合、解析すべき流れに対応した、基本解(Green関数)が必要である。一様流に対応した基本解は、古くから知られており¹⁾、それらを用いた特異点法によって、かなり複雑な形状をした物体回りの流れの解析も行われている²⁾。

一方、流体機械内部や地表付近の流れでは、主流はせん断を伴っているのが普通である。せん断流に対する基本解については、非圧縮流に関して、その誘導や詳しい検討がなされており³⁾、また、揚力面理論も試みられている⁴⁾。亜音速流に対しては、2次元に関する基本解が誘導され、それを用いた翼形特性の研究も行われている⁵⁾。

このように、特異点法の適用領域は広げられてきているが、解析対象として、海洋や高高度にわたる大気を考えると、せん断流に加えて、密度成層の効果も考慮に入れる必要がある。しかし、今までのところ、この成層せん断流を特異点法で扱った例はないように思われる。

したがって、本論では、特異点法の適用領域を拡張し、成層せん断流場をも扱えるようにする第一歩として、次を行う。

(1) 特異点法による解析には、流れ場の基本解が必要である。このため、微少擾乱の仮定のもとに、成層せん断流中に固定された、単一の渦と吹き出しによる擾乱速度や、擾乱圧力等の基本解を導く。また、それら擾乱源の持つ特異性を示す。

(2) 基本解に関する若干の数値計算を行う。このことによって、流れのパラメータによって、基本解の様子が変わることが、直観的に示される。

なお、大規模な成層せん断流中の興味ある現象の一つに、山越え気流の波動現象(lee wave)がある⁶⁾。こ

*1 平成2年8月2日原稿受理

*2 航空大学校

*3 宮崎大学工学部

の現象は、差分法などの手法によって扱われてきているが、本研究の結果を応用すれば、特異点法による扱いも可能となると思われる。

主 な 記 号

$C(x)$: Fresnel 積分, (75)式

$D: \bar{v}(y, a)$ に関する特性方程式の判別式, (21)式

g : 重力加速度, 9.8 m/s^2

I_{K0}, I_{K1} : 変形 Bessel 関数の半無限積分, (48), (49)式

I_{N0}, I_{N1} : 第2種 Bessel 関数の半無限積分, (50), (51)式

$I_{\text{①}} \sim I_{\text{⑥}}$: (69)~(74)式

K_0, K_1 : 第2種変形 Bessel 関数

m : 吹き出しの強さ

N : 浮力振動数, (9)式

N_0, N_1 : 第2種 Bessel 関数

$P(x, y), p(x, y)$: 圧力及び擾乱圧力

$R(x, y)$: 密度

r : 原点からの距離, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$

$S(x)$: Fresnel 積分, (75)式

$U(x, y), u(x, y)$: 速度の x 成分及び擾乱速度の x 成分

$V(x, y), v(x, y)$: 速度の y 成分及び擾乱速度の y 成分

$\bar{v}(y, a)$: Fourier 変換された v

x, y : 直交座標, x は主流の方向, y は主流に直角で上方が正

α : Fourier 変換のパラメータ, (7)式

γ : 渦の強さ

$\delta(x), \delta(y)$: Dirac のデルタ関数

κ : 主流速度のせん断パラメータ, (19)式

λ : 主流密度の成層パラメータ, (19)式

$\mu: \mu^2 = \lambda g / U_0^2 - \lambda^2 / 4 - \kappa(\kappa - \lambda)$, (41)式

$\nu: \nu^2 = \lambda^2 / 4 + \kappa(\kappa - \lambda) - \lambda g / U_0^2$, (28)式

$\zeta(x, y)$: 擾乱渦度

$\rho(x, y)$: 擾乱密度

$\phi(x, y)$: 擾乱流れ関数

添字等

() $_{\infty}$: 主流での値

() $_0$: 主流での, $y=0$ における値

() R : 正則部分

() $'$: x または y に関する微分

2. 線形化された基礎式

座標系を第1図のようにとる。流れは、2次元、非粘性、定常とする。すると、任意の点 (x, y) における速度 (U, V) , 圧力 P , 密度 R は、主流の諸量と、擾乱量との和として、次のように書くことができる。

$$\left. \begin{aligned} U(x, y) &= U_{\infty}(y) + u(x, y) \\ V(x, y) &= v(x, y) \\ P(x, y) &= p_{\infty}(y) + p(x, y) \\ R(x, y) &= \rho_{\infty}(y) + \rho(x, y) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

なお、 p_{∞} と ρ_{∞} は静水圧平衡 $dp_{\infty}/dy = -\rho_{\infty}g$ を満たしているとする。

擾乱量は、主流の諸量に比べて、小さいと仮定すると、

$$\frac{u}{U_{\infty}}, \frac{v}{U_{\infty}}, \frac{p}{p_{\infty}}, \frac{\rho}{\rho_{\infty}} \ll 1 \quad (2)$$

原点に固定された束縛渦 γ (以下、渦という) 及び、吹き出し m による、擾乱流れを支配する、線形化された Euler 式及び連続の式は、

$$\left. \begin{aligned} \rho_{\infty} U_{\infty} \frac{\partial u}{\partial x} + \rho_{\infty} U'_{\infty} v &= -\frac{\partial p}{\partial x} \\ \rho_{\infty} U_{\infty} \frac{\partial v}{\partial x} &= -\frac{\partial p}{\partial y} - \rho g - \rho_{\infty} U_{\infty} \gamma \delta(x) \delta(y) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = m \delta(x) \delta(y) \quad (4)$$

であり、さらに流線に沿って、密度は変化しないと仮定すると、この線形化された表示式は、

$$U_{\infty} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho'_{\infty} v = 0 \quad (5)$$

となる。

(3)~(5)式を組み合わせることによって、 v に関する、次の形の線形化された、支配方程式が得られ

第1図 座 標 系

る.

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\rho'_\infty}{\rho_\infty} \frac{\partial v}{\partial y} - \left[\frac{(\rho_\infty U'_\infty)' }{\rho_\infty U_\infty} + g \frac{\rho'_\infty}{\rho_\infty U_\infty^2} \right] v \\ & = -\gamma \delta'(x) \delta(y) + m \delta(x) \left[\delta'(y) \right. \\ & \quad \left. + \frac{(\rho_\infty U'_\infty)' }{\rho_\infty U_\infty} \delta(y) \right] \end{aligned} \quad (6)$$

上式を偏微分方程式のままで解くことは困難であるので、両辺を Fourier 変換し、変数分離をはかる。

$v(x, y)$ の Fourier 積分表示式は、

$$v(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{v}(x, \alpha) e^{i\alpha y} d\alpha \quad (7)$$

であり、同じく $\delta(x)$ も Fourier 積分表示式で表す。すると、(6)式は次となる。

$$\begin{aligned} & \bar{v}'' + \frac{\rho'_\infty}{\rho_\infty} \bar{v}' - \left[\alpha^2 + \frac{(\rho_\infty U'_\infty)' }{\rho_\infty U_\infty} - \frac{N^2}{U_\infty^2} \right] \bar{v} \\ & = -i\alpha \delta(y) + m \left[\delta'(y) + \frac{(\rho_\infty U'_\infty)' }{\rho_\infty U_\infty} \delta(y) \right] \end{aligned} \quad (8)$$

以下、 $\bar{v}(y, \alpha) = \bar{v}$ と略記し、浮力振動数 N は、

$$N^2 = -g \frac{\rho'_\infty}{\rho_\infty} \quad (9)$$

である。

(8)式の右辺は、 $y \neq 0$ において 0 であり、よって (8)式は、

$$\bar{v}'' + \frac{\rho'_\infty}{\rho_\infty} \bar{v}' - \left[\alpha^2 + \frac{(\rho_\infty U'_\infty)' }{\rho_\infty U_\infty} - \frac{N^2}{U_\infty^2} \right] \bar{v} = 0 \quad (10)$$

となる。

さらに、渦または吹き出しの特異点の置かれた位置 ($y = \pm 0$) での条件は、(8)式の右辺の $\delta(y)$ の性質を利用して、次のように求められる。

(8)式を $y = -\varepsilon$ から $y = +\varepsilon$ まで積分をし、 $\varepsilon \rightarrow 0$ とすると、

$$\begin{aligned} & [\bar{v}'(+0) - \bar{v}'(-0)] + \frac{\rho'_\infty}{\rho_\infty}(0)[\bar{v}(+0) - \bar{v}(-0)] \\ & = -i\alpha\gamma + m \frac{(\rho_\infty U'_\infty)' }{\rho_\infty U_\infty}(0) \end{aligned} \quad (11)$$

さらにこの式を $y = -\varepsilon$ から $y = +\varepsilon$ まで積分し、 $\varepsilon \rightarrow 0$ とすると、

$$\bar{v}(+0) - \bar{v}(-0) = m \quad (12)$$

これを(11)式に用いると、(11)式は、

$$\bar{v}'(+0) - \bar{v}'(-0) = -i\alpha\gamma + m \frac{U'_\infty}{U_\infty}(0) \quad (13)$$

Fourier 変換された値 $\bar{v}(y, \alpha)$ に関する方程式(10)式が、流れ場を解析するための基礎式であり、(12)、(13)式が境界条件である。

これを解いて、求まった $\bar{v}(y, \alpha)$ を(7)式に代入することにより、 $v(x, y)$ を求めることができる。

また、(3)~(5)式を用いることにより、擾乱速度 $u(x, y)$ 、擾乱圧力 $p(x, y)$ 、擾乱渦度 $\zeta(x, y)$ 、擾乱

流れ関数 $\phi(x, y)$ 、擾乱密度 $\rho(x, y)$ が $\bar{v}$ より、次のように求めることができる。

$$u(x, y) = \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\alpha} \bar{v}' e^{i\alpha x} d\alpha \quad (14)$$

$$\frac{p}{\rho_\infty U_\infty}(x, y) = -\frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\alpha} \left[\bar{v}' - \frac{U'_\infty}{U_\infty} \bar{v} \right] e^{i\alpha x} d\alpha \quad (15)$$

$$\zeta(x, y) = \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\alpha \bar{v} - \frac{\bar{v}''}{\alpha} \right] e^{i\alpha x} d\alpha \quad (16)$$

$$\phi(x, y) = \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{v}}{\alpha} e^{i\alpha x} d\alpha \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \rho(x, y) &= \frac{\rho'_\infty}{U_\infty} \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{v}}{\alpha} e^{i\alpha x} d\alpha \\ &= \frac{\rho'_\infty}{U_\infty} \phi(x, y) \end{aligned} \quad (18)$$

3. 指数関数型成層せん断流の基本解

3.1 指数関数型成層せん断流の基礎式 主流の速度分布、及び密度分布は、次のように指数関数的に変化すると仮定する。

$$\begin{aligned} U_\infty(y) &= U_0 e^{\kappa y} & \kappa > 0 \\ \rho_\infty(y) &= \rho_0 e^{-\lambda y} & \lambda > 0 \end{aligned} \quad (19)$$

(9)式より、浮力振動数 N は定数となり、 $N = \sqrt{\lambda g}$ である。

さらに、 $\kappa y \ll 1$ を仮定することによって、 $1/U_\infty^2 \sim 1/U_0^2$ が成立し、(10)式は次の定数係数を持つ、2階常微分方程式となる。

$$\bar{v}''(y) - \lambda \bar{v}'(y) - \left[\alpha^2 + \kappa(\kappa - \lambda) - \frac{\lambda g}{U_0^2} \right] \bar{v}(y) = 0 \quad (20)$$

上式が、解くべき基礎式である。

3.2 判別式による解の分類 基礎式(20)に対する、特性方程式の判別式 D は、次のようである。

$$D = \alpha^2 - \frac{\lambda g}{U_0^2} + \frac{\lambda^2}{4} + \kappa^2 - \kappa\lambda \quad (21)$$

上式の右辺第1項は、擾乱流れの波数を表し、第2項が浮力効果を表す。第3、4項は、それぞれ、重力の影響を除いた成層効果（以下単に成層効果という）、せん断流効果を表し、第5項はこれらの干渉効果を表している。

基礎式(20)の一般解は、判別式 D の符号に従って、次のように分類される。

3.2.1 $\nu^2 = \lambda^2/4 + \kappa(\kappa - \lambda) - \lambda g/U_0^2 > 0$ の場合 この場合は、浮力効果が、成層・せん断流効果より小さいことを示し、波数 α のいかににかかわらず $D > 0$ であり、(20)式の一般解は、

$$\bar{v} = C_1 e^{\left(\frac{\lambda}{2} - \sqrt{D}\right)y} + C_2 e^{\left(\frac{\lambda}{2} + \sqrt{D}\right)y} \quad (22)$$

となる。

$y \geq 0$ の各領域に関する解を, $y \rightarrow \pm\infty$ の条件を考慮して, 次の形に仮定する.

$$\left. \begin{aligned} y > 0: \bar{v} &= C_1 e^{\left(\frac{\lambda}{2} - \sqrt{D}\right)y} \\ y < 0: \bar{v} &= C_2 e^{\left(\frac{\lambda}{2} + \sqrt{D}\right)y} \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

境界条件(12), (13)式を適用することにより, C_1, C_2 が定まり, その結果は次のようになる.

$$\left. \begin{aligned} y > 0: \bar{v} &= \left[\frac{\gamma i}{2} \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \nu^2}} + \frac{m}{2} \left(\frac{\lambda - 2\kappa}{2\sqrt{\alpha^2 + \nu^2}} + 1 \right) \right] e^{\left(\frac{\lambda}{2} - \sqrt{\alpha^2 + \nu^2}\right)y} \\ y < 0: \bar{v} &= \left[\frac{\gamma i}{2} \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \nu^2}} + \frac{m}{2} \left(\frac{\lambda - 2\kappa}{2\sqrt{\alpha^2 + \nu^2}} - 1 \right) \right] e^{\left(\frac{\lambda}{2} + \sqrt{\alpha^2 + \nu^2}\right)y} \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

3.2.2 $\mu^2 = \lambda g / U_0^2 - \lambda^2 / 4 - \kappa(\kappa - \lambda) > 0$ の場合
この場合は, 浮力効果が, 成層・せん断流効果より大きいことを示し, 波数 α により, 次のように D の符号が変化する.

① $|\alpha| > \mu$; 3.2.1 と同じく $D > 0$ であり, $\bar{v}$ は(24)式で与えられる.

② $|\alpha| < \mu$; $D < 0$ であり, (20)式の一般解は,

$$\bar{v} = C_1 e^{\left(\frac{\lambda}{2} - i\sqrt{|D|}\right)y} + C_2 e^{\left(\frac{\lambda}{2} + i\sqrt{|D|}\right)y} \quad (25)$$

となる.

$y \geq 0$ の各領域に関する解を, 波動の伝わる方向を考慮し, 次のように仮定する.

$$\left. \begin{aligned} y > 0: \bar{v} &= C_1 e^{\left(\frac{\lambda}{2} - \sqrt{\mu^2 - \alpha^2}i\right)y} \\ y < 0: \bar{v} &= C_2 e^{\left(\frac{\lambda}{2} + \sqrt{\mu^2 - \alpha^2}i\right)y} \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

境界条件(12), (13)式によって, C_1, C_2 を定めると,

$$\left. \begin{aligned} y > 0: \bar{v} &= \left[\frac{\gamma}{2} \frac{\alpha}{\sqrt{\mu^2 - \alpha^2}} + \frac{m}{2} \left(1 - \frac{i}{2} \frac{\lambda - 2\kappa}{\sqrt{\mu^2 - \alpha^2}} \right) \right] e^{\left(\frac{\lambda}{2} - \sqrt{\mu^2 - \alpha^2}i\right)y} \\ y < 0: \bar{v} &= \left[\frac{\gamma}{2} \frac{\alpha}{\sqrt{\mu^2 - \alpha^2}} - \frac{m}{2} \left(1 + \frac{i}{2} \frac{\lambda - 2\kappa}{\sqrt{\mu^2 - \alpha^2}} \right) \right] e^{\left(\frac{\lambda}{2} + \sqrt{\mu^2 - \alpha^2}i\right)y} \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

となる.

3.3 浮力効果が小さい場合の基本解 浮力効果が小さい場合, パラメータ ν は, 次式で与えられる.

$$\nu^2 = \frac{\lambda^2}{4} + \kappa(\kappa - \lambda) - \frac{\lambda g}{U_0^2} > 0 \quad (28)$$

(24)式を $y \geq 0$ について, 各々 Fourier 逆変換を行うと, v は次となる.

$$\begin{aligned} v(x, y) &= -\frac{\gamma}{2\pi} e^{\frac{\lambda}{2}y} \frac{\nu x}{r} K_1(\nu r) \\ &+ \frac{m}{2\pi} e^{\frac{\lambda}{2}y} \left[\frac{\nu y}{r} K_1(\nu r) + \frac{\lambda - 2\kappa}{2} K_0(\nu r) \right] \end{aligned} \quad (29)$$

ただし, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ であり, K_0, K_1 は第2種の変形 Bessel 関数である.

同様に, (14)~(18)式を用いると, 次のように, u, p, ζ, ϕ, ρ を求めることができる.

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \frac{\gamma}{2\pi} e^{\frac{\lambda}{2}y} \left[\nu \frac{y}{r} K_1(\nu r) - \frac{\lambda}{2} K_0(\nu r) \right] \\ &+ \frac{m}{2\pi} e^{\frac{\lambda}{2}y} \left[\nu \frac{x}{r} K_1(\nu r) - \left\{ \frac{\lambda g}{U_0^2} - \kappa \left(\kappa - \frac{\lambda}{2} \right) \right\} \int_{-\infty}^x K_0(\nu r) dx \right. \\ &\left. - \kappa \nu y \int_{-\infty}^x \frac{1}{r} K_1(\nu r) dx \right] \end{aligned} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} \frac{p}{\rho_\infty U_\infty}(x, y) &= \frac{\gamma}{2\pi} e^{\frac{\lambda}{2}y} \left[-\nu \frac{y}{r} K_1(\nu r) + \frac{\lambda - 2\kappa}{2} K_0(\nu r) \right] \\ &+ \frac{m}{2\pi} e^{\frac{\lambda}{2}y} \left[-\nu \frac{x}{r} K_1(\nu r) + \frac{\lambda g}{U_0^2} \int_{-\infty}^x K_0(\nu r) dx \right] \end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} \zeta(x, y) &= \frac{\gamma}{2\pi} e^{\frac{\lambda}{2}y} \left[-\lambda \nu \frac{y}{r} K_1(\nu r) + \left(\nu^2 + \frac{\lambda^2}{4} \right) K_0(\nu r) \right] \\ &+ \frac{m}{2\pi} e^{\frac{\lambda}{2}y} \left[-\lambda \nu \frac{x}{r} K_1(\nu r) - \nu \left(\frac{\lambda g}{U_0^2} - \kappa^2 \right) \int_{-\infty}^x \frac{y}{r} K_1(\nu r) dx \right. \\ &\left. + \left\{ \frac{\lambda}{2} \left[\frac{\lambda g}{U_0^2} - \kappa \left(\kappa - \frac{\lambda}{2} \right) \right] - \kappa \nu^2 \right\} \int_{-\infty}^x K_0(\nu r) dx \right] \end{aligned} \quad (32)$$

$$\begin{aligned} \phi(x, y) &= \frac{\gamma}{2\pi} e^{\frac{\lambda}{2}y} [-K_0(\nu r)] \\ &+ \frac{m}{2\pi} e^{\frac{\lambda}{2}y} \left[-\nu y \int_{-\infty}^x \frac{1}{r} K_1(\nu r) dx - \frac{\lambda - 2\kappa}{2} \int_{-\infty}^x K_0(\nu r) dx \right] \end{aligned} \quad (33)$$

$$\rho(x, y) = -\frac{\lambda \rho_0}{U_0} e^{-(\lambda + \kappa)y} \cdot \phi(x, y) \quad (34)$$

これらの解は, いずれも第2種の変形 Bessel 関数を含み, $r \rightarrow 0$ の特異性は次のようである.

$$v \sim -\frac{\gamma}{2\pi} \frac{x}{r^2} + \frac{m}{2\pi} \left[\frac{y}{r^2} - \frac{\lambda - 2\kappa}{2} \ln r \right] \quad (35)$$

$$u \sim \frac{\gamma}{2\pi} \left[\frac{y}{r^2} + \frac{\lambda}{2} \ln r \right] + \frac{m}{2\pi} \frac{x}{r^2} \quad (36)$$

$$\frac{p}{\rho_\infty U_\infty} \sim \frac{\gamma}{2\pi} \left[-\frac{y}{r^2} - \frac{\lambda - 2\kappa}{2} \ln r \right] - \frac{m}{2\pi} \frac{x}{r^2} \quad (37)$$

$$\zeta \sim \frac{\gamma}{2\pi} \left[-\frac{\lambda y}{r^2} - \left(\nu^2 + \frac{\lambda^2}{4} \right) \ln r \right] - \frac{m}{2\pi} \frac{\lambda x}{r^2} \quad (38)$$

$$\phi \sim \frac{\gamma}{2\pi} \ln r \quad (39)$$

$$\rho \sim -\frac{\lambda \rho_0}{U_0} \frac{\gamma}{2\pi} \ln r \quad (40)$$

これらの特異性は、一様流中と同じ特異点に加えて、成層または、せん断流効果による特異性が加わったもの（ただし、(39)式を除く）となっている。

一方、 $r \rightarrow \infty$ に対しては、単調に減衰するおだやかな解を持つ。ただし、線形の仮定により、 y はある値以下に制限される。

3.4 浮力効果が大きい場合の基本解 浮力効果が大きい場合、パラメータ μ は、次式で与えられる。

$$\mu^2 = \frac{\lambda g}{U_0^2} - \frac{\lambda^2}{4} - \kappa(\kappa - \lambda) > 0 \quad (41)$$

$\bar{v}$ の Fourier 逆変換は、 $y \geq 0$ について、

$$v(x, y) = \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\infty}^{-\mu} + \int_{\mu}^{\infty} \right) [(24) \text{ 式}] e^{i\alpha x} d\alpha \\ + \frac{1}{2\pi} \int_{-\mu}^{\mu} [(27) \text{ 式}] e^{i\alpha x} d\alpha$$

であり、 v は次の形となる。

$$v(x, y) = \frac{\gamma}{2\pi} e^{\frac{\lambda}{2} y} \left[\frac{\pi}{2} \mu \frac{x}{r} N_1(\mu r) \right] \\ + \frac{m}{2\pi} e^{\frac{\lambda}{2} y} \left[-\frac{\pi}{2} \mu \frac{y}{r} N_1(\mu r) \right. \\ \left. - \frac{\lambda - 2\kappa}{2} \frac{\pi}{2} N_0(\mu r) \right] \quad (42)$$

ただし、 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ であり、 N_0, N_1 は第 2 種 Bessel 関数である。

さらに、(14)～(18)式を用いることによって、 u, p, ζ, ϕ, ρ を次のように求めることができる。

$$u(x, y) = \frac{\gamma}{2\pi} e^{\frac{\lambda}{2} y} \left[-\frac{\pi}{2} \mu \frac{y}{r} N_1(\mu r) + \frac{\lambda}{2} \frac{\pi}{2} N_0(\mu r) \right] \\ + \frac{m}{2\pi} e^{\frac{\lambda}{2} y} \left[-\frac{\pi}{2} \mu \frac{x}{r} N_1(\mu r) \right. \\ \left. + \left\{ \frac{\lambda g}{U_0^2} - \kappa \left(\kappa - \frac{\lambda}{2} \right) \right\} \frac{\pi}{2} \int_{-\infty}^x N_0(\mu r) dx \right. \\ \left. + \frac{\pi \kappa \mu y}{2} \int_{-\infty}^x \frac{1}{r} N_1(\mu r) dx \right] \quad (43)$$

$$\frac{p}{\rho_\infty U_\infty}(x, y) = \frac{\gamma}{2\pi} e^{\frac{\lambda}{2} y} \left[\frac{\pi}{2} \mu \frac{y}{r} N_1(\mu r) \right. \\ \left. - \frac{\lambda - 2\kappa}{2} \frac{\pi}{2} N_0(\mu r) \right] \\ + \frac{m}{2\pi} e^{\frac{\lambda}{2} y} \left[\frac{\pi}{2} \mu \frac{x}{r} N_1(\mu r) \right.$$

$$\left. - \frac{\lambda g}{U_0^2} \frac{\pi}{2} \int_{-\infty}^x N_0(\mu r) dx \right] \quad (44)$$

$$\zeta(x, y) = \frac{\gamma}{2\pi} e^{\frac{\lambda}{2} y} \left[\frac{\pi \lambda \mu}{2} \frac{y}{r} N_1(\mu r) \right. \\ \left. - \frac{\pi}{2} \left(\frac{\lambda^2}{4} - \mu^2 \right) N_0(\mu r) \right] \\ + \frac{m}{2\pi} e^{\frac{\lambda}{2} y} \left[\frac{\pi \lambda \mu}{2} \frac{x}{r} N_1(\mu r) \right. \\ \left. + \frac{\pi}{2} \left(\frac{\lambda g}{U_0^2} - \kappa^2 \right) \mu \int_{-\infty}^x \frac{y}{r} N_1(\mu r) dx \right. \\ \left. - \frac{\pi}{2} \left[\frac{\lambda}{2} \left\{ \frac{\lambda g}{U_0^2} - \kappa \left(\kappa - \frac{\lambda}{2} \right) \right\} \right. \right. \\ \left. \left. + \kappa \mu^2 \right] \int_{-\infty}^x N_0(\mu r) dx \right] \quad (45)$$

$$\phi(x, y) = \frac{\gamma}{2\pi} e^{\frac{\lambda}{2} y} \left[\frac{\pi}{2} N_0(\mu r) \right] \\ + \frac{m}{2\pi} e^{\frac{\lambda}{2} y} \left[\frac{\pi \mu y}{2} \int_{-\infty}^x \frac{1}{r} N_1(\mu r) dx \right. \\ \left. + \frac{\pi}{2} \frac{\lambda - 2\kappa}{2} \int_{-\infty}^x N_0(\mu r) dx \right] \quad (46)$$

$$\rho(x, y) = -\frac{\lambda \rho_0}{U_0} e^{-(\lambda + \kappa)y} \cdot \phi(x, y) \quad (47)$$

これらの解は、第 2 種 Bessel 関数より成る。 $r \rightarrow 0$ の特異性は、浮力効果が小さい場合の特異性 (35)～(40) 式と同一となり、一般の r に対しては、減衰振動的な解となる（ただし、 y はある値に制限される）。

4. 数 値 計 算

4.1 Bessel 関数及び変形 Bessel 関数の半無限積分の扱い 前項で得られた、(29)～(34)式または (42)～(47)式を数値計算することにより、擾乱速度や擾乱圧力などを求めることができる。

上記の式に含まれる、Bessel 関数や変形 Bessel 関数の値については、高精度の近似式が容易に利用できる。しかし、それらの半無限積分は、パラメータの値によっては、特異積分となったり、あるいは、被積分関数の収束性が悪化したりするので、改めて考察する必要がある。

扱うべき半無限積分は次の四つである。

$$I_{K0} = \int_{-\infty}^x K_0(\nu r) dx, \quad I_{K1} = \int_{-\infty}^x \frac{1}{r} K_1(\nu r) dx \quad (48), (49)$$

$$I_{N0} = \int_{-\infty}^x N_0(\mu r) dx, \quad I_{N1} = \int_{-\infty}^x \frac{1}{r} N_1(\mu r) dx \quad (50), (51)$$

ただし、 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ であり、 ν, μ は (28) 式及び (41) 式で与えられる定数である。

4.1.1 $I_{K0} = \int_{-\infty}^x K_0(\nu r) dx$ の扱い

(1) $y = 0$ の場合

$$\int_{-\infty}^0 K_0(\nu|x|)dx = \int_0^{\infty} K_0(\nu x)dx = \frac{\pi}{2\nu} \quad (52)$$

を用いて,

$$I_{K_0} = \frac{\pi}{2\nu} + \int_0^x K_0(\nu|x|)dx \quad (53)$$

上式第2項の被積分関数 K_0 は, 積分範囲の下限で特異となる. したがって, この積分は, 特異項を差し引いて行い, 後に特異項を解析的に積分して加える, という操作を行う. その結果は,

$$I_{K_0} = \frac{\pi}{2\nu} + x(1 - \ln \nu|x|) + \int_0^x K_0^R(\nu|x|)dx \quad (54)$$

ただし,

$$K_0^R(\nu|x|) \equiv K_0(\nu|x|) + \ln \nu|x| \quad (55)$$

(2) $y \neq 0$ の場合

$$I_{K_0} = \frac{\pi}{2\nu} e^{-\nu y} + \int_0^x K_0(\nu r)dx \quad (56)$$

第2項は, K_0 の引数 $\nu r \neq 0$ であるので, 問題なく数値積分が可能である.

4.1.2 $I_{K_1} = \int_{-\infty}^x \frac{1}{r} K_1(\nu r)dx$ の扱い

(1) $y = 0$ の場合

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{x} K_1(\nu x)dx = \lim_{y \rightarrow 0} \int_0^{\infty} \frac{1}{r} K_1(\nu r)dx = -\frac{\pi}{2} \quad (57)$$

また, $K_1(\nu x)$ の $x \rightarrow 0$ での特異性を次のように分離して書き,

$$K_1(\nu x) = K_1^R(\nu x) + \frac{1}{\nu x} + \frac{\nu x}{2} \ln \nu x, \\ K_1^R(\nu x) = 0\{(\nu x)^2\} \quad (58)$$

$\int_0^x \dots dx$ の部分の積分を (54) 式のようにして行くと, I_{K_1} は次のようになる.

$$I_{K_1} = -\frac{\pi}{2} - \frac{1}{\nu|x|} + \frac{\nu|x|}{2} (\ln \nu|x| - 1) \\ + \int_0^x \frac{1}{|x|} K_1^R(\nu|x|)dx \quad (59)$$

被積分項は $0(x)$ であるので, 問題はない.

(2) $y \neq 0$ の場合

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{r} K_1(\nu r)dx = \frac{\pi}{2\nu y} e^{-\nu y} \quad (60)$$

を用いて,

$$I_{K_1} = \frac{\pi}{2\nu y} e^{-\nu y} + \int_0^x \frac{1}{r} K_1(\nu r)dx \quad (61)$$

第2項は $r \neq 0$ であるので, 問題はない

4.1.3 $I_{N_0} = \int_{-\infty}^x N_0(\mu r)dx$ の扱い

(1) $y = 0$ の場合

$$I_{N_0} = \int_0^{\infty} N_0(\mu x)dx + \int_0^x N_0(\mu|x|)dx \quad (62)$$

上式第1項は0である. また, 第2項は (54) 式の扱い

と同じ考えで行うと, 結果は次のようになる.

$$I_{N_0} = \frac{2x}{\pi} (\ln \mu|x| - 1) + \int_0^x N_0^R(\mu|x|)dx \quad (63)$$

ただし,

$$N_0^R(\mu x) = N_0(\mu x) - 2/\pi \cdot \ln \mu x \quad (64)$$

(2) $y \neq 0$ の場合

$$I_{N_0} = \int_0^{\infty} N_0(\mu r)dx + \int_0^x N_0(\mu r)dx \quad (65)$$

上式第2項は $r \rightarrow 0$ とはならないので, 直接に数値積分可能である. 問題は第1項の扱いである.

$N_0(x)$ の漸近形として, 次の形を用いる⁷⁾.

$$N_0(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left[\left(1 - \frac{9}{128x^2} \right) \sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right) \right. \\ \left. - \frac{1}{8x} \cos \left(x - \frac{\pi}{4} \right) \right] \quad (66)$$

すると, (65) 式第1項は次のように書ける.

$$\int_0^{\infty} N_0(\mu r)dx = \int_0^{\infty} \left\{ N_0(\mu r) - \sqrt{\frac{2}{\pi \mu r}} \left[\left(1 - \frac{9}{128\mu^2 r^2} \right) \sin \left(\mu r - \frac{\pi}{4} \right) \right. \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{8\mu r} \cos \left(\mu r - \frac{\pi}{4} \right) \right] \right\} dx + I_{ad}^0 \quad (67)$$

ただし,

$$I_{ad}^0 \equiv \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \left[\left(\frac{1}{\sqrt{\mu r}} - \frac{9}{128} \frac{1}{(\mu r)^{5/2}} \right) \sin \left(\mu r - \frac{\pi}{4} \right) - \frac{1}{8(\mu r)^{3/2}} \cos \left(\mu r - \frac{\pi}{4} \right) \right] dx \\ = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[I_{\textcircled{1}} - I_{\textcircled{2}} - \frac{1}{8} (I_{\textcircled{3}} + I_{\textcircled{4}}) - \frac{9}{128} (I_{\textcircled{5}} - I_{\textcircled{6}}) \right] \quad (68)$$

ここで (67) 式右辺第1項は, 被積分関数が $x \rightarrow \infty$ に対してすみやかに0に近づくので, 精度良く数値積分が可能である.

また, (68) 式の $I_{\textcircled{1}} \sim I_{\textcircled{6}}$ は次のように求められる. ただし, $\mu|y| = \eta$ とおく.

$$I_{\textcircled{1}} = \int_0^{\infty} \frac{\sin \mu r}{\sqrt{\mu r}} dx = \frac{1}{\mu} \int_{\eta}^{\infty} \sqrt{\frac{\tau}{\tau^2 - \eta^2}} \sin \tau d\tau \\ = \frac{1}{\mu} \int_{\eta}^{\infty} \left[\sqrt{\frac{\tau}{\tau^2 - \eta^2}} - \frac{1}{\sqrt{\tau}} - \frac{\eta^2}{2} \frac{1}{\tau^{5/2}} - \frac{3\eta^4}{8} \frac{1}{\tau^{9/2}} \right] \sin \tau d\tau \\ + \frac{1}{\mu} \left[\frac{185\sqrt{\eta} - 12\eta^{5/2}}{420} \sin \eta \right. \\ + \frac{149\eta^{3/2} - 12\eta^{7/2}}{210} \cos \eta + \left(1 - \frac{2}{3}\eta^2 \right. \\ \left. + \frac{2}{35}\eta^4 \right) \left(\sqrt{\frac{\pi}{2}} - S(\eta) \right) \left. \right] \quad (69)$$

$$\begin{aligned}
I_{\textcircled{2}} &= \int_0^\infty \frac{\cos \mu r}{\sqrt{\mu r}} dx = \frac{1}{\mu} \int_\eta^\infty \sqrt{\frac{\tau}{\tau^2 - \eta^2}} \cos \tau d\tau \\
&= \frac{1}{\mu} \int_\eta^\infty \left[\sqrt{\frac{\tau}{\tau^2 - \eta^2}} - \frac{1}{\sqrt{\tau}} - \frac{\eta^2}{2} \frac{1}{\tau^{5/2}} \right. \\
&\quad \left. - \frac{3\eta^4}{8} \frac{1}{\tau^{9/2}} \right] \cos \tau d\tau \\
&\quad + \frac{1}{\mu} \left[\frac{185\sqrt{\eta} - 12\eta^{5/2}}{420} \cos \eta \right. \\
&\quad \left. - \frac{149\eta^{3/2} - 12\eta^{7/2}}{210} \sin \eta \right. \\
&\quad \left. + \left(1 - \frac{2}{3}\eta^2 + \frac{2}{35}\eta^4 \right) \left(\sqrt{\frac{\pi}{2}} - C(\eta) \right) \right] \quad (70)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_{\textcircled{3}} &= \int_0^\infty \frac{\sin \mu r}{(\mu r)^{3/2}} dx = \frac{1}{\mu} \int_\eta^\infty \frac{\sin \tau}{\sqrt{\tau} \sqrt{\tau^2 - \eta^2}} d\tau \\
&= \frac{1}{\mu} \int_\eta^\infty \left[\frac{1}{\sqrt{\tau} \sqrt{\tau^2 - \eta^2}} - \frac{1}{\tau^{3/2}} \right. \\
&\quad \left. - \frac{\eta^2}{2} \frac{1}{\tau^{7/2}} \right] \sin \tau d\tau \\
&\quad + \frac{1}{\mu} \left[\frac{33 - 4\eta^2}{15\sqrt{\eta}} \sin \eta + \frac{2\sqrt{\eta}}{15} \cos \eta \right. \\
&\quad \left. - \frac{4\eta^2 - 30}{15} \left(\sqrt{\frac{\pi}{2}} - C(\eta) \right) \right] \quad (71)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_{\textcircled{4}} &= \int_0^\infty \frac{\cos \mu r}{(\mu r)^{3/2}} dx = \frac{1}{\mu} \int_\eta^\infty \frac{\cos \tau}{\sqrt{\tau} \sqrt{\tau^2 - \eta^2}} d\tau \\
&= \frac{1}{\mu} \int_\eta^\infty \left[\frac{1}{\sqrt{\tau} \sqrt{\tau^2 - \eta^2}} - \frac{1}{\tau^{3/2}} \right. \\
&\quad \left. - \frac{\eta^2}{2} \frac{1}{\tau^{7/2}} \right] \cos \tau d\tau \\
&\quad + \frac{1}{\mu} \left[\frac{33 - 4\eta^2}{15\sqrt{\eta}} \cos \eta - \frac{2\sqrt{\eta}}{15} \sin \eta \right. \\
&\quad \left. + \frac{4\eta^2 - 30}{15} \left(\sqrt{\frac{\pi}{2}} - S(\eta) \right) \right] \quad (72)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_{\textcircled{5}} &= \int_0^\infty \frac{\sin \mu r}{(\mu r)^{5/2}} dx = \frac{1}{\mu} \int_\eta^\infty \frac{\sin \tau}{\tau^{3/2} \sqrt{\tau^2 - \eta^2}} d\tau \\
&= \frac{1}{\mu} \int_\eta^\infty \left[\frac{1}{\tau^{3/2} \sqrt{\tau^2 - \eta^2}} - \frac{1}{\tau^{5/2}} \right] \sin \tau d\tau \\
&\quad + \frac{1}{\mu} \left[\frac{2}{3\eta^{3/2}} \sin \eta + \frac{4}{3\sqrt{\eta}} \cos \eta \right. \\
&\quad \left. - \frac{4}{3} \left(\sqrt{\frac{\pi}{2}} - S(\eta) \right) \right] \quad (73)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_{\textcircled{6}} &= \int_0^\infty \frac{\cos \mu r}{(\mu r)^{5/2}} dx = \frac{1}{\mu} \int_\eta^\infty \frac{\cos \tau}{\tau^{3/2} \sqrt{\tau^2 - \eta^2}} d\tau \\
&= \frac{1}{\mu} \int_\eta^\infty \left[\frac{1}{\tau^{3/2} \sqrt{\tau^2 - \eta^2}} - \frac{1}{\tau^{5/2}} \right] \cos \tau d\tau \\
&\quad + \frac{1}{\mu} \left[\frac{2}{3\eta^{3/2}} \cos \eta - \frac{4}{3\sqrt{\eta}} \sin \eta \right. \\
&\quad \left. - \frac{4}{3} \left(\sqrt{\frac{\pi}{2}} - C(\eta) \right) \right] \quad (74)
\end{aligned}$$

以上において、 S, C は次で定義される Fresnel 積分であり、近似式によって容易に計算される。

$$S(x) = \int_0^x \frac{\sin \tau}{\tau^{1/2}} d\tau, \quad C(x) = \int_0^x \frac{\cos \tau}{\tau^{1/2}} d\tau \quad (75)$$

(69)~(74)式によって計算される $I_{\textcircled{1}} \sim I_{\textcircled{6}}$ を (68)式に用い、それをさらに (67)式に用いることによって (65)式第1項が計算される。

4.1.4 $I_{N1} = \int_{-\infty}^x \frac{1}{r} N_1(\mu r) dx$ の扱い

(1) $y=0$ の場合

$$\begin{aligned}
I_{N1} &= \int_{-\infty}^x \frac{1}{|x|} N_1(\mu|x|) dx \\
&= \int_0^x \frac{1}{x} N_1(\mu x) dx + \int_0^x \frac{1}{|x|} N_1(\mu|x|) dx \quad (76)
\end{aligned}$$

上式右边第2項は、

$$\begin{aligned}
N_1(\mu|x|) &= N_1^R(\mu|x|) + \frac{\mu|x|}{\pi} \ln \mu|x| - \frac{2}{\pi\mu|x|}, \\
N_1^R(\mu|x|) &= 0(|x|) \quad (77)
\end{aligned}$$

と書いて、次のように計算される。

$$\begin{aligned}
\int_0^x \frac{1}{|x|} N_1(\mu|x|) dx &= \int_0^x \frac{1}{|x|} N_1^R(\mu|x|) dx \\
&\quad + \frac{\mu|x|}{\pi} (\ln \mu|x| - 1) + \frac{2}{\pi\mu|x|} \quad (78)
\end{aligned}$$

(76)式第1項は積分区間を、 $0 \sim l, l \sim \infty$ の二つに分け、前者の区間では、 $N_1(x)$ の原点近くの特異性を考慮し、後者の区間では、 $N_1(x)$ の漸近形を考慮することにより、次のようになる。

$$\int_0^\infty \frac{1}{x} N_1(\mu x) dx = I_{N1}^R + I_{N1}^S \quad (79)$$

$$\begin{aligned}
I_{N1}^R &\equiv \int_0^l \frac{1}{x} N_1(\mu x) dx \\
&= \int_0^l \frac{N_1^R(\mu x)}{x} dx + \frac{\mu l}{\pi} (\ln \mu l - 1) + \frac{2}{\pi\mu l} \quad (80)
\end{aligned}$$

$N_1(x)$ の漸近形として、次を用いて⁷⁾、

$$N_1(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left\{ \sin \left(x - \frac{3}{4}\pi \right) + \frac{3}{8x} \cos \left(x - \frac{3}{4}\pi \right) \right\} \quad (81)$$

すると、(79)式右边第2項は、

$$\begin{aligned}
I_{N1}^S &\equiv \int_l^\infty \frac{1}{x} N_1(\mu x) dx \\
&= \int_l^\infty \frac{1}{x} \left[N_1(\mu x) - \sqrt{\frac{2}{\pi \mu x}} \left\{ \sin \left(\mu x - \frac{3}{4}\pi \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{3}{8\mu x} \cos \left(\mu x - \frac{3}{4}\pi \right) \right\} \right] dx \\
&\quad - \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left[\left(3 + \frac{1}{2\mu l} \right) \frac{\cos \mu l}{\sqrt{\mu l}} \right. \\
&\quad \left. + \left(3 - \frac{1}{2\mu l} \right) \frac{\sin \mu l}{\sqrt{\mu l}} + 3(S(\mu l) - C(\mu l)) \right] \quad (82)
\end{aligned}$$

以上(78)~(82)式を(76)式に用いることにより、 y

$=0$ の場合の I_{N1} が計算される.

(2) $y \neq 0$ の場合

$$I_{N1} = \int_{-\infty}^x \frac{1}{r} N_1(\mu r) dx \\ = \int_0^{\infty} \frac{1}{r} N_1(\mu r) dx + \int_0^x \frac{1}{r} N_1(\mu r) dx \quad (83)$$

上式第2項は $r \rightarrow 0$ とはならないので, 直接に数値積分可能である.

上式第1項は, $N_1(x)$ の漸近形として, 再び(81)式の形を用い, $\cos \mu r / (\mu r)^{\frac{5}{2}}$, $\sin \mu r / (\mu r)^{\frac{5}{2}}$ の積分を, 4.1.3項と同様な扱いをすることによって, 次の形となる.

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{r} N_1(\mu r) dx = \int_0^{\infty} \frac{1}{r} \left[N_1(\mu r) - \sqrt{\frac{2}{\pi \mu r}} \left\{ \sin \left(\mu r - \frac{3}{4} \pi \right) + \frac{3}{8 \mu r} \cos \left(\mu r - \frac{3}{4} \pi \right) \right\} \right] dx + I_{ad} \quad (84)$$

$$I_{ad} = \sqrt{\frac{2}{\pi \mu}} \int_0^{\infty} \frac{1}{r^{\frac{3}{2}}} \left\{ \sin \left(\mu r - \frac{3}{4} \pi \right) + \frac{3}{8 \mu r} \cos \left(\mu r - \frac{3}{4} \pi \right) \right\} dx \\ = -\frac{\mu}{\sqrt{\pi}} \left[I_{\textcircled{3}} + I_{\textcircled{4}} - \frac{3}{8} (I_{\textcircled{5}} - I_{\textcircled{6}}) \right] \quad (85)$$

$I_{\textcircled{3}}, I_{\textcircled{4}}$ は(71), (72)式で与えられるものであり, $I_{\textcircled{5}}, I_{\textcircled{6}}$ は(73), (74)式で与えられるものである.

以上(84), (85)式及び, (71)~(74)式を(83)式に用いることによって, $y \neq 0$ の場合の I_{N1} を求めることができる.

4.2 若干の計算例 浮力効果が小さい場合 ($\nu^2 > 0$) 及び, 浮力効果が大きい場合 ($-\nu^2 = \mu^2 > 0$) について, 若干の計算結果を示す.

計算パラメータのスケールは任意にとることができるが, ここでは大気のスケールを意識し, 長さの単位を km ととる. したがって, 重力加速度の値は $g = 0.0098 \text{ km/s}^2$ となる. 他のパラメータは, $y=0$ の主流速度 $U_0 = 0.02 \text{ km/s}$, 主流速度のせん断パラメータ $\kappa = 0.1/\text{km}$ とし, 成層のパラメータは $\lambda = 0.1/\text{km}$ (成層が著しい場合) 及び, $\lambda = 0.0001/\text{km}$ (成層がわずかな場合) ととる. また, 吹き出しと渦の強さは, $m = 0.02 \text{ km}^2/\text{s}$ 及び $m = 0 \text{ km}^2/\text{s}$, $\gamma = -0.02 \text{ km}^2/\text{s}$ 及び $\gamma = 0 \text{ km}^2/\text{s}$ ととる.

第2図~第6図は, 浮力効果が小さい場合の結果である. 上記の g, U_0, κ に対しては, $\lambda < 0.000406$ に対して $\nu^2 > 0$ となり, 振動的でない結果が得られる. 同図は $\lambda = 0.0001$ と与えた結果であるが, $\lambda = 0$ でも $\lambda = 0.0004$ でも結果はあまり変わらない.

第2図 垂直速度 v の分布 ($U_0 = 0.02 \text{ km/s}$, $\kappa = 0.1/\text{km}$, $\lambda = 0.0001/\text{km}$, $m = 0.02 \text{ km}^2/\text{s}$, $\gamma = 0 \text{ km}^2/\text{s}$)

第3図 垂直速度 v の分布 ($U_0 = 0.02 \text{ km/s}$, $\kappa = 0.1/\text{km}$, $\lambda = 0.0001/\text{km}$, $m = 0 \text{ km}^2/\text{s}$, $\gamma = -0.02 \text{ km}^2/\text{s}$)

第2図~第4図は, 各々吹き出しのみ与えたもの, 渦のみ与えたもの, 吹き出しと渦の両方与えたものの, 垂直速度成分 v の分布である. 中心 ($x=0, y=0$) に吹き出し, または渦がおかれ, 周囲の1目盛りは1 kmを表す. また, v を示す曲線にほぼ重なっている細線は, v の基準を示している. 即ち, 細線より上に出た部分では v が正, 下に出た部分では v の負を表している. なお, v の大きさは, 目盛りに対して200倍されている.

これらの図の v の分布は, 直感と合う結果を与え

第4図 垂直速度 v の分布 ($U_0=0.02$ km/s, $\kappa=0.1$ /km, $\lambda=0.0001$ /km, $m=0.02$ km²/s, $\gamma=-0.02$ km²/s)

第6図 流線図 ($U_0=0.02$ km/s, $\kappa=0.1$ /km, $\lambda=0.0001$ /km, $m=0.02$ km²/s, $\gamma=-0.02$ km²/s)

第5図 流速ベクトルの分布 ($U_0=0.02$ km/s, $\kappa=0.1$ /km, $\lambda=0.0001$ /km, $m=0.02$ km²/s, $\gamma=-0.02$ km²/s)

第7図 垂直速度 v の分布 ($U_0=0.02$ km/s, $\kappa=0.1$ /km, $\lambda=0.1$ /km, $m=0.02$ km²/s, $\gamma=0$ km²/s)

ており、また、渦及び吹き出しの特異点の影響は、比較的特異点近傍に限られているのがわかる。

第5図は、第4図と同じ条件の結果を、流速ベクトルで示したものである(原点付近のみ)。流速の大きさは、目盛りに対して、 x 方向が25倍、 y 方向が100倍されている。したがって、流速ベクトルの傾きは、4倍に誇張されている。

これら流速ベクトルも、特異点近くで、渦の影響(反時計方向回転)及び吹き出しの影響を示していることが、よくわかる。

第6図は、第4、5図と同じ条件での流線を示したものである。流線が上方で密となっているのは、上方での流速が大きいことに対応している。また、原点に

おかれた特異点の影響は、原点より遠ざかるにつれて小さくなっているが、その小さくなり方は、上方でよりすみやかである、ということがわかる。

第7図～第11図は、浮力効果が大きい場合の結果であり、 $\lambda=0.1$ と与えられている。この λ は、地球上での等温大気を考えた場合のスケールハイト H と $\lambda=1/H$ の関係にあり、実際の場合($H \approx 8$ km, $\lambda = 0.12$ /km)に近い値⁶⁾である。

第7図～第9図は、各々吹き出し、渦、及び吹き出しと渦を中心においたときの、 v の分布を表している(v の大きさは、目盛りに対して200倍されている)。

第8図 垂直速度 v の分布 ($U_0=0.02$ km/s, $\kappa=0.1$ /km, $\lambda=0.1$ /km, $m=0$ km²/s, $\gamma=-0.02$ km²/s)

第9図 垂直速度 v の分布 ($U_0=0.02$ km/s, $\kappa=0.1$ /km, $\lambda=0.1$ /km, $m=0.02$ km²/s, $\gamma=-0.02$ km²/s)

これらの図において、いずれも v が振動的になっており、かつ、特異点の遠方まで影響が及んでいるのがわかる。特に第9図は、重ね合わせる吹き出しと渦の符号の組合せを適当に選べば、特異点の上方下流（及び下方上流）に、lee wave 状の波動を作り出せることを示している。したがって、 $y=0$ 上に地面及び山がある場合、そこでの境界条件を満たすように、適当な強さの吹き出し、及び渦を分布させることによって、山越え気流の lee wave が計算できるのではないかと、考えられる。

第10図は、第9図と同じものを、流速ベクトルで

第10図 流速ベクトルの分布 ($U_0=0.02$ km/s, $\kappa=0.1$ /km, $\lambda=0.1$ /km, $m=0.02$ km²/s, $\gamma=-0.02$ km²/s)

第11図 流線図 ($U_0=0.02$ km/s, $\kappa=0.1$ /km, $\lambda=0.1$ /km, $m=0.02$ km²/s, $\gamma=-0.02$ km²/s)

示したものである。流速の水平方向成分 u も含めた流れの振動的な様子が良くわかる。なおこの図においても、第5図と同じく流速の大きさは、目盛りに対して、 x 方向に25倍、 y 方向に100倍されている。

第11図は、第9、10図と同じ条件のものを、流線で示したものである。 $x>0$, $y>0$ 及び $x<0$, $y<0$ のいずれの領域でも、流線は振動的になっているが、 $x>0$, $y>0$ の領域では、特に y 方向にある間隔において、振幅がより大きくなる現象が現れていることがわかる。

また、解が振動的となるこれらにおいて、 y の絶対値の大きいところで、 x に関する波長が長くなっているが、これは、波長が特異点からの距離 r によって

いるからである ((42)式参照)。

5. 結 論

高度が高くなるに従って、主流速度が指数関数的に増加し、主流密度が指数関数的に減少する成層せん断流について、流れの中に、吹き出し及び渦がおかれたときの基本解の誘導を行った。得られた結論は以下のようである。

1) 渦及び吹き出しによる擾乱速度、擾乱圧力、擾乱渦度、擾乱流れ関数及び擾乱密度が得られた。

2) 上記諸量の特異点近傍の特異性が明らかとなった。それらの特異性は、いずれも、一様流に対する特異性に、成層及びせん断流の効果を含んだ特異性が加わった形をしていることがわかった。

3) 特異点からある程度離れたところにおいては、浮力効果が小さい場合は、単調に減衰するおだやかな解になり、浮力効果が大きい場合は、振動減衰する解となることがわかった。

4) 基本解に含まれる、Bessel 関数及び変形 Bessel 関数の半無限積分を数値計算するための、工夫が行われた。

5) 若干の計算結果が与えられた。それにより、浮力効果が小さい場合と大きい場合について、吹き出し、渦、及びそれらの組合せによって、どのような流

れになるかが示された。

6) 浮力効果が大きい場合、適当な吹き出しと渦の重ね合わせによって、lee wave に似た波動を作り出せることがわかった。

なお、本論の数値計算には、航空大学校のワークステーション EWS 4800/50 (NEC) を用いた。要した計算時間は、例えば、440 点での諸量を求めた第 10 図の計算の場合、約 1 分であった。

参考文献

- 1) 今井 功：流体力学(前編)，裳華房，東京，1973，pp.116-119.
- 2) 柳沢三憲：境界要素法による全機形状の空力特性の計算，日本航空宇宙学会誌，34 (1986)，pp.369-379.
- 3) Lighthill, M. J.: The Fundamental Solution for Small Steady Three-Dimensional Disturbances to a Two-Dimensional Parallel Shear Flow, J. Fluid Mech., 3 (1957), pp. 113-144.
- 4) Ventres, C. S.: Shear Flow Aerodynamics Lifting Surface Theory, AIAA J., 13 (1975), pp. 1183-1189.
- 5) 平野公孝，菊地正憲，佐藤秀雄：亜音速せん断流中の定常翼形特性，日本機械学会論文集(B)，54 (1988)，pp.3175-3180
- 6) Turner, J. S.: Buoyancy Effects in Fluids, Cambridge University Press, Cambridge, 1973, pp. 34-37.
- 7) 森口繁一，宇田川銑久，一松 信：数学公式 I，II，III，岩波書店，東京，1956，1957，1960.