最適制御における状態量不等式拘束に関する研究^{*1}

A Study on State Variable Inequality Constraints in Optimal Control

高 野 博 行^{*2}

Hiroyuki TAKANO

Key Words: Optimal Control, State Variable Inequality Constraint, Guidance and Control

Abstract

State variable inequality constraints are the last and the hardest problems in optimal control. So far in some methods we have had we cannot solve every problem, in the others we only obtain approximate solutions. In this paper a new formulation (Monotonous subarc method) for solving optimal control problems with state variable inequality constraints are presented, in which we can get accurate solutions of any state-bounded problems with ordinary two-point-boundary algorithms.

1. は じ め に

社会と産業の高度化に伴いあらゆるシステムにおいてより効率のよい制御, より最適な制御が望まれるようになってきた. その最適制御において, 状態量不等式拘束は最大の難点であり最後の障害である. 本研究は¹⁾この状態量不等式拘束を含む最適制御問題に新しい解法を示したものである.

この新解法(仮に「単調区間法」と呼ぶ)は状態量不等式拘束を満たし高精度の解を得ることを可能にしている. この方法の特徴は, 従来の解法では無拘束として定式化されていた区間に新たに状態量不等式拘束を元にした不等式拘束を課し, この不等式拘束に関して単調な区間の結合で状態量不等式拘束付きの問題を表現することにある. そしてこの不等式拘束を等式拘束に変形し, 多点境界値問題を二点境界値問題に変換することによって²⁾, 既存の二点境界値用の数値計算法一つで^{3,4)}様々な状態量不等式拘束問題を扱うことを可能にする. これが本研究の解法のあらましである.

本研究はこの解法を簡単な例題のみならず, AOTVの帰還^{10,11)}, 手投げ式滑空機の最長滞空^{12,13)}, スペースプレーンの打ち上げ^{10,14,15)}などの軌道決定問題に適用し, いずれの場合も高精度の数値解を得られることを示した.

本稿では, まず2章で最適制御問題を条件つき変分問題と見なし, これに基づいて状態量拘束つき最適制御問題の難点と, その従来の解法を示す. 次に3章でこれに対する従来の実際の解法定式と, その各々の問題点を概観する. そして4章で本研究の提案する解法を説明し, 5章では例題を収録する.

2. 状態量拘束の難点^{5,6)}

2.1 状態量等式拘束⁵⁾ 最適制御問題は, 一般的には運動方程式,

$$\dot{x} = f(x, u, t) \quad (t_0 \leq t \leq t_f) \quad (1)$$

で表される系において, 状態量 x の終端での指定または拘束,

$$\phi(x_f, t_f) = 0 \quad (2)$$

x の初期での拘束,

$$\omega(x_0, t_0) = 0 \quad (3)$$

そして等式拘束

$$C(x, u, t) = 0 \quad (t_0 \leq t \leq t_f) \quad (4)$$

などの拘束条件のもとに, 評価関数

$$I = \int_{t_0}^{t_f} L(x, u, t) dt + \varphi(x_f, t_f) + \eta(x_0, t_0) \quad (5)$$

を最小にする制御入力 u を(もし未知ならば終端時刻 t_f など)見出すことである. ただし x, u は時刻 t の関数で x, u, f, ϕ, ω, C はベクトル. 状態量等式拘束とは, 式(4)の等式拘束が制御入力を含まず状態量のみからなっている場合である.

この最適制御問題を付帯条件つき変分問題として, 変分法にしたがって導けば,

$$\dot{\lambda}^T = -\frac{\partial H}{\partial x} \quad (t_0 \leq t \leq t_f) \quad (6)$$

$$\dot{x} = f(x, u, t) \quad (t_0 \leq t \leq t_f) \quad (1)$$

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0 \quad (t_0 \leq t \leq t_f) \quad (7)$$

$$C(x, u, t) = 0 \quad (t_0 \leq t \leq t_f) \quad (4)$$

^{*1} 平成2年9月14日原稿受理

^{*2} 防衛大学校航空宇宙工学教室

第1図 従来の直接法による定式化

を両端の λ, x の境界条件のもとに解く二点境界値問題に帰着される²⁾。ただし、

$$H = H(x, u, \lambda, \rho, t) \\ = L + \lambda^T(t) \cdot f + \rho^T(t) \cdot C \quad (8)$$

$\lambda(t), \rho(t)$ はアジョイント(ラグランジュの未定乗数)であり f, C と同じ次元のベクトルである。

式(6)、式(1)は微分方程式であり、これを両端の λ, x の境界条件で解くことになる。従って、 λ, x の微分方程式中の u, ρ は、式(7)、式(4)を u, ρ について置き代入して消去せねばならない。式(7)、式(4)は u, ρ と同数あるので問題のないように見える。

しかし、もし等式拘束が式(4)のかわりに、

$$S(x, t) = 0 \quad (t_0 \leq t \leq t_f) \quad (9)$$

と状態量拘束であった場合、この式は制御入力を含まないで u, ρ を表す役に立たない。従って λ, x の微分方程式の u, ρ は消去し尽くせなくなる。 u, ρ を含んだままでは微分方程式は解けない。 u, ρ が決定できなくなった分の条件は x にかかり、運動方程式の $x, \dot{x}$ を制限することになる。

このような場合は式(9)を、制御入力の入った等式拘束になるまで微分と運動方程式の代入を繰り返し、

$$S^{(k)}(x, u, t) = 0 \quad (t_0 \leq t \leq t_f) \quad (10)$$

を等式拘束とし、微分の数分の積分定数の決定条件

$$N(x, t_3) = \begin{bmatrix} S(x, t_3) \\ S^{(1)}(x, t_3) \\ \vdots \\ S^{(k-1)}(x, t_3) \end{bmatrix} = 0 \quad (11)$$

を境界条件に含めれば前述した一般的な最適制御問題として解ける。ただし $S^{(k)}$ とは S を k 回 t で全微分したことを示す。 t_3 は $t_0 \leq t \leq t_f$ のどこか一点である。普通は t_0 または t_f にすればよい。

結局、状態量等式拘束は普通の最適制御問題と同じ二点境界値問題に変換して定式化できることになる。

2.2 状態量不等式拘束^{5,6)} 一般に不等式拘束は制限値にかからない間は、存在しないのと同じで求める u などには影響を及ぼさない。制限値にかかった部分、拘束区間において初めて等式拘束として働くのである。従って状態量不等式拘束も制限値にかかるとその拘束区間で状態量等式拘束になり状態量等式拘束と同じ問題を生ずる。つまり第1図の様に制限値にかかる区間 $t_1 \leq t \leq t_2$ ($t_0 \leq t_1 \leq t_2 \leq t_f$) においてのみ

$$S(x, t) = 0 \quad (t_1 \leq t \leq t_2) \quad (12)$$

という状態量等式拘束を受けるのと同じことになる。

しかし状態量等式拘束であればそれと同様の手法が可能ではないか、という発想が従来の代表的な解法、Bryson 等^{5,6)} の解法である。つまり式(12)に微分と運動方程式の代入を繰り返し制御入力を含む等式拘束と微分の数分の境界条件に直し

$$S^{(k)}(x, u, t) = 0 \quad (t_1 \leq t \leq t_2) \quad (13)$$

を等式拘束とし、境界条件は

$$N(x, t_3) = \begin{bmatrix} S(x, t_3) \\ S^{(1)}(x, t_3) \\ \vdots \\ S^{(k-1)}(x, t_3) \end{bmatrix} = 0 \quad (14)$$

となる。 t_3 は $t_1 \leq t \leq t_2$ のどこか一点である。

ただし等式拘束もその境界条件も、部分区間 $t_1 \leq t \leq t_2$ で要求される点が問題である。境界条件は、初期拘束でも終端拘束でもない内点拘束となりこの問題は多点境界問題となる。一般に t_1 や t_2 も未知であるし、内点拘束を要求される地点では横断性条件と同様の物が現れ、アジョイントやハミルトニア (H) が不連続になる。式(14)を $t = t_1$ で要求すれば、内点拘束は以下のとおり。

$$\left. \begin{aligned} x(t_1^-) &= x(t_1^+), \quad N(x, t_1) = 0 \\ H(t_1^-) &= H(t_1^+) - \sigma^T \frac{\partial N}{\partial t_1} \\ \lambda^T(t_1^-) &= \lambda^T(t_1^+) + \sigma^T \frac{\partial N}{\partial x(t_1)} \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

$$\left. \begin{aligned} x(t_2^-) &= x(t_2^+), H(t_2^-) = H(t_2^+) \\ \lambda^T(t_2^-) &= \lambda^T(t_2^+) \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

以上のような多点境界値問題の解析解を求めることはごく単純な例でないと不可能であるし、実際の問題では数値解を求めることすら容易ではない。

3. 状態量不等式拘束の従来の解法

状態量不等式拘束を含む最適制御問題の実際の数値解法は、前述した多点境界値問題の定式をそのまま解く直接法(direct method)と、別の定式や近似手法を用いる間接法(indirect method)とに大きく二つに分けることができる。本稿では前述の Bryson の直接法は「従来の直接法」と呼ぶこととし、新たに本研究が提案する直接法「単調区間法」と区別する。以下にいくつかの数値解法について述べる。

間接法には、ペナルティ関数法^{7,8)} スラック変数法⁹⁾ などがある。

ペナルティ関数法は、制限値に近づく乃至越える場合に評価関数を悪化させる項(=ペナルティ関数)を評価関数に加えるという方法で、不等式拘束は直接には使わない。原理が単純で理解しやすくプログラム化も容易なのが利点であり初期の最適制御解析にはしばしば用いられていた。しかし元の問題とは異なる問題を解いていることになり、解の精度が悪いのが欠点となる。

スラック変数法は状態量不等式拘束を状態量等式拘束に変換し、内点拘束にならないように定式化する方法である。(一階微分で制御入力が見れる)一次の状態量不等式拘束の場合、状態量不等式拘束 $S(x, t) \leq 0$ をダミーの状態量 x_s (=スラック変数)で

$$S(x, t) + \frac{1}{2} x_s^2 = 0 \quad (t_0 \leq t \leq t_f) \quad (17)$$

と状態量等式拘束に直す。 x_s は状態量であるから新しい制御入力 u_s を導入して

$$\dot{x}_s = u_s \quad (18)$$

と運動方程式も用意する。状態量等式拘束ならば式(17)を微分して式(18)を代入すれば

$$S'(x, u, t) + x_s \cdot u_s = 0 \quad (19)$$

と制御入力を含む等式拘束に直すことができる。境界条件は式(17)を初期拘束あるいは終端拘束として使えばよい。スラック変数法は近似手法を用いずに、状態量不等式拘束の制限値にかかる回数や順序に関係なく常に同一定式で解けるのが特長で、近年は論文等でも良く見受けられる。しかし 2nd-order の数値計算法⁴⁾ を使えない上に拘束の出入口が数値的に不安定なため、精密な解が得られないのが欠点である。

結局従来の解法のうち間接法は、部分区間(sub-

arc)が無くどのような問題にも同一定式、同一計算プログラムで臨めることが長所であるが、数値計算上難点があったり近似を用いていたりで解の精度が悪いことが短所である。

従来の直接法の長所は、原理に忠実に解いており拘束区間およびその出入口まで正確な解を得ることができる点であるが、問題によってあるいは同一の問題でも設定値を変更しただけで部分区間の数や並びがかわり定式やプログラム全体を作り直さねばならない。さらに拘束区間の前後は状態量不等式拘束を何等考慮していないため、問題によってはここで状態量の制限を破ってしまい正解が得られないことがある。

この直接法の二つの短所のうち、前者に対する改良が上野・加藤の時間軸折り返し法²⁾で、これはどのような部分区間の数・並びに対しても二点境界値用の数値計算法一つで対応できるように多点境界値問題を二点境界値問題に変換する定式である。しかし残るもう一方の短所については手付かずである。もし状態量の制限を越えた場合それまで重ねてきた努力は水泡に帰することになり、この問題点は直接法に対する信頼を危くするものであった。本研究が提案する解法はこの点の改善を企図した直接法である。

4. 単調区間法

従来の状態量不等式拘束付き最適制御問題の定式は、拘束区間の前後の無拘束区間で状態量不等式拘束の制限を侵す解を得る可能性がある。そこでこの方法は、従来の直接法がまず状態量不等式拘束を部分区間と状態量等式拘束で表し、その状態量等式拘束を制御入力を含む等式拘束に直すという手順を踏むのに対して、部分区間と状態量拘束の微係数の不等式拘束で直接表し、その不等式拘束を等式拘束に直すという定式化である。この結果得られる条件式は多点境界値問題になるが時間軸折り返し法²⁾で二点境界値問題に変換して数値計算する。

例えば第1図のように、一回だけ状態量拘束にかかる問題で考えてみよう。従来の直接法ではこの状態量不等式拘束 $S(x, t) \leq S_{\max}$ は、第二区間で状態量等式拘束 $S(x, t) = S_{\max}$ を受け、第一・第三区間では何も拘束を受けない状態と等しいと仮定して定式される。確かに得られた最適解はこの形で表せるが、この形の定式で解けば同じ最適解が得られるとは限らない。逆は必ずしも真ならずで、第2図のような無拘束区間で状態量拘束を破る解が出てくる可能性がある。従来の直接法の定式では、状態量不等式拘束を破る解であっても正しく満たす解より制御成績がよければ許されてしまうからである。

第2図 従来の直接法の問題点

第3図 単調区間法の定式 (一次の場合)

そこで本研究は無拘束区間にも、不等式拘束を与えることでこの問題に対した。例えば一階微分で u が現れる場合、

$$\text{第一区間に } S'(x, u, t) \geq 0 \quad (0 \leq t \leq t_1) \quad (20)$$

$$\text{第三区間に } S'(x, u, t) \leq 0 \quad (t_2 \leq t \leq t_f) \quad (21)$$

をかければ、第一区間は単調増加、第三区間は単調減少になり拘束のオーバーシュートのない厳密解が得られる。

さらに第二区間の $S'(x, u, t) = 0$ は式(20)や式(21)に元々含まれ内点拘束 $S(x, t_3) = S_{\max}$ は $t_1 \leq t_3 \leq t_2$ であればどこで要求してもよいのだから、第3図のように t_3 で区間を分けることにして、

$$\text{前半区間に } S'(x, u, t) \geq 0 \quad (0 \leq t \leq t_3) \quad (22)$$

$$\text{後半区間に } S'(x, u, t) \leq 0 \quad (t_3 \leq t \leq t_f) \quad (23)$$

と定式化すれば前半の広義の単調増加、後半も広義の単調減少になり式(20)や式(21)と同じ解を少ない折り返し回数で求められる。しかも一点でのみ状態量拘束に触れる場合も同じ定式で扱える利点もある。式(22)と式(23)はダミーの制御入力を用いれば

$$S'(x, u, t) - u_{d1}^2 = 0 \quad (0 \leq t \leq t_3) \quad (24)$$

$$S'(x, u, t) + u_{d2}^2 = 0 \quad (t_3 \leq t \leq t_f) \quad (25)$$

と容易に等式拘束に変形できる。ダミーの制御入力は一般の制御入力に含めて扱えばよい。

以上の多点境界値問題を元にこれを時間軸折り返し法²⁾を用いて二点境界値問題に変換すれば、状態量不等式拘束を含む最適制御問題の運動方程式、両端の境界条件、および等式拘束条件は次のようになる。ただ

し、 $T_1 = t_3$ 、 $T_2 = t_f - t_3$ であり、 T_1 、 T_2 は未知であり最適化せねばならない。またここでは新たに $x^T = \{x_1^T, x_2^T\}$ 、 $u^T = \{u_1^T, u_2^T\}$ とする。

$$\tau = \begin{cases} t/T_1 & (0 \leq t \leq t_3) \\ (-t + T_1 + T_2)/T_2 & (t_3 \leq t \leq t_f) \end{cases} \quad (26)$$

$$\frac{dx}{d\tau} = \tilde{f}(x, u, \pi, \tau) \\ = \begin{bmatrix} T_1 \cdot f(x_1, u_1, \pi, \tau) \\ -T_2 \cdot f(x_2, u_2, \pi, \tau) \end{bmatrix} \quad (0 \leq \tau \leq 1) \quad (27)$$

$$\Psi = \begin{bmatrix} x_1(\tau) - x_2(\tau) \\ S(x_1, \pi) - S_{\max} \end{bmatrix}_{\tau=1} = 0 \quad (28)$$

$$\Omega = \begin{bmatrix} \omega(x_1, \pi) \\ \phi(x_2, \pi) \end{bmatrix}_{\tau=0} = 0 \quad (29)$$

$$\tilde{C}(x, u, \pi, \tau) = \begin{bmatrix} S'(x_1, u_1, \pi, \tau) - u_{d1}^2 \\ S'(x_2, u_2, \pi, \tau) + u_{d2}^2 \end{bmatrix} \\ = 0 \quad (0 \leq \tau \leq 1) \quad (30)$$

なお折り返しにより後半区間は時間の向きが逆になり、運動方程式(27)の後半区間部分に負符号が付加される。またこれらの拘束条件を新しい評価関数

$$I = \int_0^1 \tilde{L}(x, u, \pi, \tau) d\tau + \tilde{\eta}(x_0, \pi) \\ = \int_0^1 \{ T_1 \cdot L(x_1, u_1, \pi, \tau) \\ + T_2 \cdot L(x_2, u_2, \pi, \tau) \} d\tau \\ + \{ \varphi(x_2, \pi) + \eta(x_1, \pi) \}_{\tau=0} \quad (31)$$

にアジョイントを用いて付帯すると以下のとおりである。

$$J = \int_0^1 [\tilde{L} + \lambda^T \cdot \{\tilde{f} - \dot{x}\} + \rho^T \cdot \tilde{C}] d\tau \\ + \{ \nu^T \Psi \}_{\tau=1} + \{ \tilde{\eta} + \mu^T \Omega \}_{\tau=0} \quad (32)$$

式(27)～式(31)は、最初に述べた一般的な最適制御問題式(1)～式(5)と、同様の二点境界値問題となる。ただし、最適化すべきパラメタとして $\pi^T = [T_1, T_2]$ を導入したために、最適性条件に $\partial J / \partial \pi = 0$ が加わる。後は普通の制御入力を含む等式拘束の問題と同様の手順で解けばよいわけである。未知パラメタを組み込んだ最適制御問題の定式化の詳細は文献2)を参照。

なお本研究の新解法は直接法であるため、拘束区間の数とその配列をあらかじめ仮定せねばならない。計算以前にこれが自明であれば問題はないが、不明の場合は間接法を補助的に用いる。間接法でおおよその解を得て、これを元に部分区間の設定を行えばよい。しかし間接法のみ解析は近似的な解を得るのみで、正解とどの程度隔たっているか不明でありこれによって現象を考察するのは危険と思われる。

以上の定式化では簡単のために拘束にかかるまで単調に増加し、拘束を離れてからも単調に減少する場合

第4図 単調区間法の定式 (二次の場合)

で説明した。しかし無拘束区間が終始単調でなくとも十分に区間を細分すれば、状態量拘束は連続であるので従来の無拘束区間も制御入力を含むまで微分された不等式拘束の単調区間に分割することが可能である。また状態量は連続であるから、状態量拘束が破られる恐れがあるのは拘束入口および拘束出口である。従って単調区間を要求するのは拘束出入口の適当な近傍のみでも十分である。拘束区間の直前および直後は、状態量が連続で状態量拘束が状態量のみからなるため各々必ず増加区間および減少区間となる。

さらにこの方法は一般の高次の状態量不等式拘束へ拡張することも可能である。例えば二階微分しないと u が現れない二次状態量不等式拘束の場合では、第4図のように S'' について単調な区間へ分割すればよい。高次の定式化の詳細は文献1)に示している。

5. 例 題

A点から距離1のB点へ最短時間で行き着くには、加速度をどう使ったらよいか。ただし、速度は $v_{\max}$ 以下に、加速度は ± 1 以内に制限されており、A点とB点では静止せねばならない。

x : 位置, v : 速度…状態量

a : 加速度…制御入力

λ : 微分方程式のアジョイント

◎ $v_{\max} \leq 1.0$ …速度制限にかかる区間が現れ状態量拘束になる。 t_f の他 t_1, t_2 も未知量である。

添え字 1: $v_{\max}$ 以前 ($0 \leq t \leq t_1$),

2: $v_{\max}$ 区間 ($t_1 \leq t \leq t_2$),

3: $v_{\max}$ 以降 ($t_2 \leq t \leq t_f$)

運動方程式

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = v_1 \\ \dot{v}_1 = a_1 \end{cases} \quad (33)$$

$$\begin{cases} \dot{x}_2 = v_2 \\ \dot{v}_2 = a_2 \end{cases} \quad (34)$$

$$\begin{cases} \dot{x}_3 = v_3 \\ \dot{v}_3 = a_3 \end{cases} \quad (35)$$

評価関数

$$I = \int_0^{t_1} 1 dt + \int_{t_1}^{t_2} 1 dt + \int_{t_2}^{t_f} 1 dt \quad (36)$$

初期拘束

$$x_1(0) = v_1(0) = 0 \quad (37)$$

終端拘束

$$x_3(t_f) = 1, \quad v_3(t_f) = 0 \quad (38)$$

等式拘束

$$a_2 = 0 \quad (t_1 \leq t \leq t_2) \quad (39)$$

$$a^2 + u_d^2 - 1 = 0 \quad (0 \leq t \leq t_f) \quad (40)$$

内点拘束(ただし $v_2 = v_{\max}$ を $t = t_1$ で要求した場合)

$$v_2(t_1) = v_{\max} \quad (41)$$

$$x_1(t_1) = x_2(t_1), \quad v_1(t_1) = v_2(t_1) \quad (42)$$

$$x_2(t_2) = x_3(t_2), \quad v_2(t_2) = v_3(t_2) \quad (43)$$

解析解.

$$x = \begin{cases} -\frac{v_{\max}^2}{2} + v_{\max}t + \frac{1}{2}(t - t_1)^2 & (0 \leq t \leq t_1) \\ -\frac{v_{\max}^2}{2} + v_{\max}t & (t_1 \leq t \leq t_2) \\ -\frac{v_{\max}^2}{2} + v_{\max}t - \frac{1}{2}(t - t_2)^2 & (t_2 \leq t \leq t_f) \end{cases} \quad (44)$$

$$v = \begin{cases} v_{\max} + (t - t_1) & (0 \leq t \leq t_1) \\ v_{\max} & (t_1 \leq t \leq t_2) \\ v_{\max} - (t - t_2) & (t_2 \leq t \leq t_f) \end{cases} \quad (45)$$

$$a = \begin{cases} 1 & (0 \leq t \leq t_1) \\ 0 & (t_1 \leq t \leq t_2) \\ -1 & (t_2 \leq t \leq t_f) \end{cases} \quad (46)$$

$$t_1 = v_{\max}, \quad t_2 = \frac{1}{v_{\max}}, \quad t_f = v_{\max} + \frac{1}{v_{\max}} \quad (47)$$

$$\lambda_x = -\frac{1}{v_{\max}} \quad (0 \leq t \leq t_f) \quad (48)$$

$$\lambda_v = \begin{cases} \frac{(t - t_1)}{v_{\max}} & (0 \leq t \leq t_1) \\ \frac{(t - t_2)}{v_{\max}} & (t_1 \leq t \leq t_f) \end{cases} \quad (49)$$

例題の数値解—速度 v , 加速度 a の時間履歴—を、第5図以下に示した。数値計算は SCGRA³⁾ および MQA⁴⁾ を使用した。

第5図は、例題の $v_{\max} = 0.5$ の場合を状態量不等式拘束を従来の直接法の定式で数値計算したものである。第5図(a)を見てのとおり拘束区間の前後で、 $v_{\max}$ を破っている。従来の定式では正解よりもこの解の方が、評価関数の t_f を小さくできるからである。

同じ問題に対して単調区間法で求めた数値解をプロットしたものが第6図である。これは式(22), (23)による定式で、時間軸折り返し一回で解いている。拘束条件・最適性条件とも0.01%以下の誤差で満たす解を得た。これらの数値解は解析解どおりで、状態量拘束

(a) 速度

(b) 加速度 (制御入力)

第5図 従来の直接法による例題の数値解

(a) 速度

(b) 加速度

第6図 単調区間法による例題の数値解

も遵守されている。

参考のためにこれをスラック変数法で計算したものを第7図に示した。速度、加速度の精度の悪さが目立つ。どうしてもこれ以上精度が上がらず、拘束の入口・出口の角が丸くなってしまふ。この原因としては

二つのことが挙げられる。一つはスラック変数法が、2nd-orderの数値計算法を使用できないために、1st-orderの数値計算法だけでは正解近傍のツメが甘くなることである。もう一つの原因はスラック変数自身の発散性である。

第7図 Slack 変数法による例題の数値解

6. 結 論

本研究は状態量不等式拘束を含む最適制御問題に新しい解法を示したものである。従来の Bryson 等の直接法は、状態量不等式拘束の制限値にかかるか否かで区間分割して制限値にかからなければ無拘束と同じと見なし、制限値にかかる間は状態量等式拘束に等しいとする定式化であった。これに対して本研究の解法は、無拘束とされていた部分でも状態量拘束の制御入力の現れた導関数の不等式拘束を加えるようにした方法である。従来の直接法では拘束区間の前後の無拘束の部分で状態量不等式拘束の制限値を破る場合がまま有ったが、このような場合にも対応可能となった。またこの新解法は基本的には直接法であるため、間接法と較べては精度よい数値解を求めうる特長がある。そして時間軸の折り返しによって複雑な多点境界値問題を一般の最適制御問題同様の二点境界値問題に変換し、現在ある計算ソフト一つで様々な状態量不等式拘束問題を扱う方法となっている。

参考文献

- 1) 高野博行：最適制御における状態量不等式拘束に関する研究，東京大学博士論文，1990。
- 2) 加藤寛一郎：工学的最適制御，東京大学出版会，東京，1988。
- 3) Wu, A. K., et al.: Sequential Conjugate Gradient-Restoration Algorithm for Optimal Control Problems with Nondifferential Constraints and General Boundary Conditions, Part 1, Optimal Control Applications & Methods, 1 (1979), pp. 69-88.
- 4) Gonzalez, S., et al.: Modified Quasilinearization Algorithm for Optimal Control Problems with Nondifferential Constraints & General Boundary Conditions, J. Optimization Theory & Applications, 50 (1986), pp. 109-128.
- 5) Bryson, A. E., Jr. and Ho, Y. C.: Applied Optimal Control, John Wiley & Sons, New York, 1975.
- 6) Bryson, A. E., Jr., et al.: Optimal Programming Problems with Inequality Constraints I: Necessary Conditions for Extremal Solutions, AIAA J., 1 (1963), pp. 2544-2550.
- 7) Kelley, H. J.: Method of Gradients, in Optimization Techniques, G. Leitman, Ed., Academic Press, New York, 1962.
- 8) Lasdon, L. S., et al.: An Interior Penalty Method for Inequality Constrained Optimal Control Problems, IEEE Trans. on Automatic Control, AC-12 (1967), pp. 388-395.
- 9) Jacobson, D. H., et al.: A Transformation Technique for Optimal Control Problems with a State Variable Inequality Constraint, IEEE Trans. on Automatic Control, AC-14 (1969), pp. 457-464.
- 10) 加藤寛一郎：スペースプレーン，東京大学出版会，東京，1989。
- 11) 加藤寛一郎，高野博行：AOTV 帰還の最適制御について，第 31 回宇宙科学技術連合講演会講演集，1987，pp. 766-767。
- 12) 加藤寛一郎，高野博行：最長滑空制御について，日本航空宇宙学会第 19 期年会講演会講演集，1988，pp. 77-78。
- 13) 高野博行，加藤寛一郎：ハンド・ランチの最長滑空制御について，日本航空宇宙学会第 20 期年会講演会講演集，1989，pp. 199-200。
- 14) 加藤寛一郎，高野博行：スペースプレーンの上昇飛行経路の最適化について，第 32 回宇宙科学技術連合講演会講演集，1988，pp. 206-207。
- 15) 高野博行，加藤寛一郎：スペースプレーンの最適上昇問題について，第 33 回宇宙科学技術連合講演会講演集，1989，pp. 234-235。