＝ 技 術 ノ ー ト ＝ TECHNICAL NOTE

複合材料積層板の有限要素法解析のための境界条件処理法*¹ Some Boundary Techniques for FEM Analysis of Composite Laminates

小 野 原 薫*²
Kaoru ONOHARA

Key Words: Composite Materials, Numerical Method, Finite Element Method, Boundary Condition

Abstract

This paper presents two boundary techniques which are useful for FEM analysis of composite laminates. One is a rotational symmetric boundary technique and the other is a quasi three-dimensional boundary technique. The use of the rotational symmetric boundary technique allows a smaller FEM model. With the use of the quasi three-dimensional boundary technique, quasi three-dimensional analysis of composite laminates can be performed on the conventional 3-D FEM program. These techniques can readily be adopted to FEM programs.

1. 序 論

複合材料積層板に関する多くの研究で有限要素法が用いられている。しかし通常の有限要素法プログラムには変位固定境界条件しか導入されていない。本稿では、複合材料積層板の有限要素法解析において有効な2種類の境界条件、すなわち回転対称境界条件と準3次元境界条件を有限要素法プログラムに導入する手法について述べる。

2. 回転対称境界条件

第1図(a)に示す off-axis 材が一軸引張荷重を受ける3次元問題を考える。有限要素法解析では問題の対称性を活用して解析領域を削減する手法が一般的に知られているが、この問題は材料特性が対称でないため、通常の有限要素法プログラムでは全体を解かなければ正解は得られない。

しかしこの問題は z 軸廻りに 180° 回転すると全く同じ問題になる。この性質を回転対称性と呼ぶ。回転対称性を活用すると解析領域を半分に削減することができる。

まず第1図(a)の1/2領域を第1図(b)に示すよ

うに zx 平面上の節点が回転対称な位置になるように要素分割する。この問題は有限要素法では次の連立方程式を解くことに帰着される。

$$\{P\} = \{F\} + \{R\} = [K]\{\delta\} \quad (1)$$

ただし、 $\{P\}$ は節点荷重ベクトル、 $\{F\}$ は外力荷重ベクトル、 $\{R\}$ は反力荷重ベクトル、 $[K]$ は全体の剛性マトリックス、 $\{\delta\}$ は節点変位ベクトルである。

$\{F\}$ は既知であるが $\{R\}$ は zx 平面上の節点での値が未知である。よってこのままではこの連立方程式を解くことはできない。ところが対応する節点、例えば節点 A と節点 B には次の回転対称境界条件が成り立つ。

$$\begin{cases} \delta_{Bx} = -\delta_{Ax} \\ \delta_{By} = -\delta_{Ay} \\ \delta_{Bz} = +\delta_{Az} \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} r_{Bx} = +r_{Ax} \\ r_{By} = +r_{Ay} \\ r_{Bz} = -r_{Az} \end{cases} \quad (3)$$

ただし、 δ_{Ax} : 節点 A の x 方向変位成分, etc.

r_{Ax} : 節点 A の x 方向反力成分, etc.

この境界条件は節点 B が節点 A に従属していることを示している。よって節点 A を独立節点、節点 B を従属節点と呼ぶ。 zx 平面上の他の節点も同様に独立節点と従属節点に分ける。第1図(b)では独立節点を黒丸で、従属節点を白丸で表している。

回転対称境界条件を用いて式(1)を変形する。例えば節点 A、B の x 方向成分に関しては次の手順で式(1)を変形する。

① 式(2)を利用して、節点 B の x 方向成分に対応する $[K]$ の列を、節点 A の x 方向成分に対応する $[K]$ の列から引く。

② 節点 B の x 方向成分に対応する $\{F\}$ 、 $\{R\}$ 、 $[K]$ の行を、それぞれ節点 A の x 方向成分に対応する行から引く。すると式(3)の関係より r_{Ax} と r_{Bx} が

*¹ 平成2年10月3日原稿受理

*² 九州大学大学院工学研究科

消去される。

③ 節点Bの x 方向成分に対応する $[K]$ の列と $\{F\}$, $\{R\}$, $[K]$, $\{\delta\}$ の行を除去する。

つまり式(1)を次のように変形して、節点Bの x 方向成分を除去する。

$$\begin{Bmatrix} \cdot \\ f_i - f_d \\ \cdot \\ f_d \\ \cdot \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \cdot \\ r_i - r_d \\ \cdot \\ r_d \\ \cdot \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \cdot \\ f_i - f_d \\ \cdot \\ f_d \\ \cdot \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \cdot \\ 0 \\ \cdot \\ r_d \\ \cdot \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & k_{ii} - k_{id} - k_{di} + k_{dd} & \cdot & k_{id} - k_{dd} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & k_{di} - k_{dd} & \cdot & k_{dd} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \cdot \\ \delta_i \\ \cdot \\ 0 \\ \cdot \end{Bmatrix} \quad (4)$$

ただし f , r , k , δ の添え字 i は節点Aの x 方向成分に対応する行あるいは列を表し、添え字 d は節点Bの x 方向成分に対応する行あるいは列を表す。

同様にして全ての従属節点の自由度を除去する。最

第1図 回転対称問題のモデル化
(a) 一軸引張荷重を受ける off-axis 材,
(b) 回転対称境界条件を採用した 1/2 モデル

終的に得られる連立方程式は $\{R\}$ の成分がすべて消去されているので解くことができる。

第1図(a)の問題を有限要素法で解析した結果を第2図に示す。(a)は1/1モデルで、(b)は不適切な対称境界条件を採用した1/2モデルで、(c)は回転対称境界条件を採用した1/2モデルで解析した結果である。(b)のモデルでは正解が得られず、(c)のモデルでは(a)のモデルと全く同じ結果を得ることができる。また(c)のモデルを用いると(a)のモデルと比較して計算時間と計算機に必要な記憶容量を共に半分に削減することができた。したがって3次元有限要素法解析などで、計算機の記憶容量に余裕が無い場合は、この手法は有効である。またこの手法は等方性材料の回転対称問題にも適用することができる。

3. 準3次元境界条件

複合材料積層板の自由縁問題に関する研究では準3次元解析¹⁾を行うことが多い。準3次元有限要素法は準3次元解析に広く用いられてきたが、特殊な定式化を必要とするため一般的にはあまり普及していない。そのため準3次元有限要素法によらずに準3次元解析を行う試みがWhitcombら²⁾によってなされた。しかし彼らの手法ではせん断歪の成分を零と仮定しているため一般的な積層板の解析に適用することはできない。ここでは3次元有限要素法を用いて準3次元解析を行う手法について述べる。

第3図(a)に示す無限に長い試験片が x 方向に一様伸び歪 ϵ_0 を受ける準3次元問題を考える。この問題を3次元有限要素法で解析するために、斜線部を第3図(b)に示すように有限要素でモデル化する。

この問題も式(1)を解くことに帰着される。しかしこの場合は x 断面に働く反力が未知である。すなわち $\{R\}$ が未知であるので、このままでは式(1)を解くことはできない。しかしこの問題は準3次元問題であるので、対応する節点、例えば節点Aと節点Bに

第2図 各モデルによる解析結果
(a) 1/1 モデル, (b) 間違った 1/2 モデル, (c) 適切な 1/2 モデル

第3図 準3次元問題のモデル化
(a) 準3次元問題, (b) 準3次元境界条件を
採用した FEM モデル

は次の準3次元境界条件が成り立つ。

$$\begin{cases} \delta_{Bx} = +\delta_{Ax} + \epsilon_0 \times L \\ \delta_{By} = +\delta_{Ay} \\ \delta_{Bz} = +\delta_{Az} \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{cases} \gamma_{Bx} = -\gamma_{Ax} \\ \gamma_{By} = -\gamma_{Ay} \\ \gamma_{Bz} = -\gamma_{Az} \end{cases} \quad (6)$$

ただし, δ_{Ax} : 節点 A の x 方向変位成分, etc.

γ_{Ax} : 節点 A の x 方向反力成分, etc.

ϵ_0 : x 方向の一様伸び歪

L : 要素の x 方向の長さ

この境界条件も節点 B が節点 A に従属していることを示している。

準3次元境界条件を用いて式(1)を変形する。例えば節点 A, B の x 方向成分に関しては次の手順で式(1)を変形する。まず最初に式(5)の $\epsilon_0 \times L$ を相対変位と考え, $\{F\}$ から $[K]$ の節点 B の x 方向成分に対応する列に $\epsilon_0 \times L$ を掛けたものを引く。後は2章で行ったのと同様に式(5), 式(6)の符号に注意して式(1)の行と列の変形と除去を行えばよい。

つまり式(1)を次のように変形して, 節点 B の x 方向成分を除去する。

$$\begin{Bmatrix} \cdot \\ f_i + f_d \\ \cdot \\ f_d \\ \cdot \end{Bmatrix} - \epsilon_0 \times L \begin{Bmatrix} \cdot \\ k_{id} + k_{dd} \\ \cdot \\ k_{dd} \\ \cdot \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \cdot \\ 0 \\ \cdot \\ r_d \\ \cdot \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & k_{ii} + k_{id} + k_{di} + k_{dd} & \cdot & k_{id} + k_{dd} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & k_{di} + k_{dd} & \cdot & k_{dd} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \cdot \\ \delta_i \\ \cdot \\ 0 \\ \cdot \end{Bmatrix} \quad (7)$$

この境界条件処理を x 断面の全ての節点について行えば, 最終的に $\{R\}$ の成分がすべて消去された連立方程式が得られる。この連立方程式を解くと準3次元解析を行うことができる。

4. 結 論

本稿では複合材料積層板の有限要素法解析で有用な2つの境界条件処理法について述べた。結論をまとめると以下ようになる。

1) 回転対称境界条件を有限要素法プログラムに導入すると, より小さな FEM モデルで解析することができ, 計算に必要な記憶容量と計算時間を大幅に削減することが可能となる。

2) 準3次元境界条件を3次元有限要素法プログラムに導入すると, 準3次元有限要素法プログラムを用いることなく準3次元解析を行うことができる。

これらの手法を既存の有限要素法プログラムに導入するには, 連立方程式を組替えるルーチンを追加するだけでよい。

参考文献

- 1) Pipes, R. B. and Pagano, N. J.: Interlaminar Stresses in Composite Laminates under Uniform Axial Extension, J. Compos. Mater., 4 (1970), pp. 538-548.
- 2) Whitcomb, J. D. and Raju, I. S.: Superposition Method for Analysis of Free-Edge Stresses, J. Compos. Mater., 17 (1983), pp. 492-507.