2次元流れにおける渦パネル法の誤差特性^{*1}

Error Characteristics of a Vortex Panel Method in Two-Dimensional Flow

市川明夫^{*2}

Akio ICHIKAWA

Key Words: Aerodynamics, Airfoil Section, Panel Method, Error Analysis

Abstract

Numerical investigation is performed on the error analysis of a vortex panel method in the two dimensional flow. The method uses step or linear vortex distributions on straight line elements. The airfoil is divided into a set of elements by three ways: semicircular-method, equispaced-method, and quartercircular-method. The following results are obtained: 1) The location of the optimum control point is the center of the elements for the step vortex distributions and the edge for the linear vortex distributions. 2) For dividing way of the airfoil, the semicircular-method is the best which is followed by the quartercircular-method and then by the equispaced-method. 3) When the airfoil is divided by the best way, the accuracy of the solution is first order in the elements size for the step vortex distributions and is second order for the linear vortex distributions. 4) For moderate number of elements ($N < 50$), the solution of the method with the step vortex distributions is more accurate than with the linear vortex distributions.

1. ま え が き

航空機の性能や飛行特性の予測,あるいは構造設計などにおいて,翼や胴体に働く空気力を見積ることは,まず第一に必要なことがらである.この空気力の見積りに関して,近年の計算機の発達にともなって,数値的に空気力を求める方法が発達しつつある.

こういった方法の一つにパネル法^{*)}がある.これはポテンシャル理論とグリーン関数を用いて,空気力を物体表面に関する積分方程式に帰着させて解く方法である.この方法は失速など剥離域を含む計算には適さないが,比較的計算量が少なくてすむので,小規模の計算機で計算が可能であるとか,CAD(計算機支援設計)に組み込みやすいとかの利点を持っている.

パネル法という名称については,積分方程式を離散化する際に,物体表面を矩形状のパネル(2次元物体の場合は線分)に分割することより来ている.他に表面特異点法(Surface Singularity Method),境界要素法(Boundary Element Method)という名称で呼ばれることもある.

本論ではこのパネル法のうち,定式化に表面渦要素と流れ関数を用いた方法²⁾の誤差特性を研究する.この方法は流れ関数を用いることから,適用範囲が2次元物体に限られる.しかし境界条件の与え方がきわめて単純であるとか,物体上の圧力係数が簡単に求まるなど,いくつかの興味ある利点を持っている(他の方法では境界条件を課すのに,流体の速度の方向を求めたり,また物体表面での速度ポテンシャルから圧力を求めるために,数値微分が必要である等の場合がある).

誤差特性を調査するには,基準となる厳密解が必要である.本論では,このために,物体形状として,Karman-Trefftz翼³⁾を選ぶ.この翼は円の等角写像によって得られるが,Joukowski翼と違うのは,後縁角が0ではなく,任意に与えられる点である.そのため,より実用に近い翼形が得られる.

本論で研究するパネル法の誤差特性は,

- (1) コントロール点(境界条件を合わせる点)位置の効果
- (2) 表面分割法の効果
- (3) 分割数増大の効果(収束性)
- (4) パネル上の特異性分布モデルの効果

などである.

なお,現在のところ,いろいろなパネル法が提案されており,ある種のパネル法については,収束性などが調べられている⁴⁾.本論はこういった中で,一つの興味あるパネル法をとりあげ,その性質を明らかにしようとするものである.

^{*1} 平成3年7月23日原稿受理

^{*2} 航空大学校

主 な 記 号

- A: 翼形に関する関数, 式(3)参照
 a, b : 翼形の厚み比とキャンパーを決定するパラメータ, 計算例では $a=b=0.1$
 C_p : 圧力係数, $C_p=(p-p_\infty)/\frac{1}{2}\rho U_\infty^2$
 CP : コントロール点のパネル上の位置
 E : 誤差評価指数, 式(18)参照
 N : 翼形の分割数 (上下面の総和), 偶数
 p : 圧力
 U : 流速
 α : 迎え角, 計算例では $\alpha=10^\circ$
 γ : 渦密度
 τ : 後縁角, 計算例では $\tau=10^\circ$
 ρ : 流体密度
 ψ : 流れ関数

略語

- SCM: 半円分割法, 第3図参照
 EQM: 等分割法, 第3図参照
 QCM: 1/4円分割法, 第3図参照

添字等

- ()_i: i 番目のパネルに関する値 (コントロール点を含むパネルに対して用いる)
 ()_j: j 番目のパネルに関する値
 ()_e: 厳密解
 ()_∞: 主流での値

2. 厳 密 解

Karman-Trefftz 翼は, $\zeta=re^{i\theta}$ で表される円を, 次の2段階の写像を行うことによって得られる.

$$\left. \begin{aligned} Z &= e^{-i\beta} \zeta + rm \\ m &= -a + bi, \beta = \tan^{-1} \{b/(a+c)\} \\ c &= \sqrt{1-b^2} - a \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{z-nrc}{z+nrc} &= \left(\frac{Z-rc}{Z+rc} \right)^n \\ n &= 2 - \tau/\pi \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

式(1)の写像によって, ζ 面での原点を中心とする半径 r の円は, Z 面における rm を中心とし, $X=rc$ を通る円に写像される. さらにこの Z 面の円は, 式(2)の写像によって, z 面における, 次の関数で表される翼形となる.

$$\left. \begin{aligned} z|_{\zeta=re^{i\theta}} &= nrc \left\{ \frac{(A+c)^n + (A-c)^n}{(A+c)^n - (A-c)^n} \right\} \\ A &= e^{i(\theta-\beta)} + m \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

この翼形の後縁角は τ である. a, b, τ をパラメータとして与え, $\theta=0 \sim 2\pi$ とすることによって, 様々

第1図 Karman-Trefftz 翼

な厚み比, キャンパー, 後縁角を持った翼形を作り出すことができる(第1図).

翼形周りの厳密な圧力分布は, やはり円の周りの流れを式(1), (2)の写像によって, 翼形周りの流れに写すことによって得られる.

ζ 面における $\xi=r$ を後方岐点とし, 迎え角が α_t , 主流速度が U_t である円の周りの複素速度ポテンシャルは,

$$F = U_t e^{-i\alpha_t} \zeta + \frac{U_t e^{i\alpha_t} r^2}{\zeta} + i U_t r 2 \sin \alpha_t \log \zeta \quad (4)$$

これを用いて, z 面での迎え角 α の Karman-Trefftz 翼上の圧力分布は次のようになる.

$$\begin{aligned} C_p &= 1 - \left| \frac{1}{U_\infty} \frac{dF}{dz} \right|^2 \\ &= 1 - 4 \{ \sin(\theta - \alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta) \}^2 \\ &\quad \times \frac{1}{(2nc)^4} (A^2 - c^2) \left(\frac{A+c}{A-c} \right)^n \\ &\quad \left[\left(\frac{A-c}{A+c} \right)^n - 1 \right]^{2/2} \end{aligned} \quad (5)$$

ただし, 無限遠での速度の比較により, $U_t = U$, $\alpha_t = \alpha + \beta$ である.

式(5)は, 式(3)において翼形を定めるのに用いたパラメータ a, b に加えて, 迎え角 α を与えることに

より、翼形上の任意の位置(θ の関数として)での圧力係数を与えている。

以上のようにして、翼形及びそれに対応する厳密な圧力分布をまず求めておく。次に同じ翼形についてパネル法を用いて数値解を求め、厳密解と比較して、誤差の検討を行うわけである。

なお、パラメータ a, b の値によって、得られる翼形のコード長は変わって来るが、本論では、これをすべてコード長 1 に変換して用いる。

3. 流れ関数を用いた渦パネル法

3.1 基本定式化 通常のポテンシャル理論においては、速度ポテンシャルに関するラプラスの方程式を出発点とする。しかし、この方法は「1. まえがき」でも述べたように、境界条件を合わせることに、及び圧力を求めることに若干の手続きを必要とし、そのための誤差が入り込む可能性が大きい。特に速度ポテンシャルから、圧力を求める際の、数値微分には特別の注意を要する。

一方、流れが2次元で、非圧縮であると言う条件を課すと、流れ関数 ψ が存在し、この ψ もラプラスの方程式を満たす。従って、 ψ に関しても同様の手続きで、積分方程式を導くことができる。しかも、 ψ を用いることで、境界条件がきわめて簡単に記述される。すなわち、物体表面上で $\psi = \psi_0$ (一定値) を課すだけでよい。また、物体表面上の特異性として、渦を用いることにより、特別の工夫無しに圧力係数 C_p を求めることができる。

2次元物体 S 上に分布する渦 $\gamma(s')$ によって、空間の点 P に引き起こされる流れ関数 ψ_P の値は、 $r(P, s')$ を空間点 P と、物体 S 上の積分点 s' との距離として、次の式によって表される。

$$\psi_P = -\frac{1}{2\pi} \int_S \gamma(s') \log r(P, s') ds' \quad (6)$$

また、迎え角 α をもった主流の流れ関数は

$$\psi_\infty = y \cos \alpha - x \sin \alpha \quad (7)$$

従って、迎え角 α をもった主流の中に物体が置かれている場合の流れ関数は、式(6)と式(7)を加え合わせれば良い。さらに P 点として、物体表面上を選べば、得られる式は、

$$\psi_s = y_s \cos \alpha - x_s \sin \alpha - \frac{1}{2\pi} \int_S \gamma(s') \log r(P, s') ds' \quad (8)$$

ここで、 x_s, y_s は物体表面での座標を表し、 ψ_s は物体表面での流れ関数の値を表す。更に式(8)を計算機に乗る形にするため、物体表面上を N 個のパネル(直線要素)に分割し、同じく N 個のコントロール点 c_i (座標

x_i, y_i) で境界条件が満たされるとすると、次の式となる。

$$\left. \begin{aligned} \psi_s + \sum_{i=1}^N \frac{1}{2\pi} \int_{s_j} \gamma(s'_j) \log r(c_i, s'_j) ds'_j \\ = y_i \cos \alpha - x_i \sin \alpha \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

$$i=1, 2, \dots, N$$

ここで、パネル上での $\gamma(s')$ の関数形を適当に仮定すると(本論ではステップ型要素とリニア型要素を用いる)、積分が未知係数を含んだ形で実行でき、式は物体表面上での渦の強さを決定する連立方程式となる。 j 番目のパネルに関する渦密度 γ_j が決定されると、対応する圧力係数は次によって得られる。

$$C_{pi} = 1 - \gamma_j^2 \quad (10)$$

本定式化において、座標は、物体(翼形)のコード長で、速度は主流速度で、また流れ関数は[主流速度] $\times$ [コード長] で無次元化してある。

3.2 ステップ型渦要素による定式化 各パネル上での渦分布が、ステップ関数状であるとする。すなわち、 j 番目のパネルにおいて、

$$\gamma(s'_j) = \gamma_j \quad (11)$$

これを式に用いると、積分が実行できる。ただし、この場合式(9)において、未知数が ψ_s も含めて、 $N+1$ 個あるのに対し、式が N 個であって解くことができない。そのため、後縁より少し突きでた位置(後縁角の $1/2$ を延長する)に $N+1$ 番目のコントロール点を設け、そこでの $\psi = \psi_s$ であるという仮定を設ける。これは、物体表面を通過した流線が、後縁角の $1/2$ の方向に向かって流れ出すことを意味する。

以上の結果、式(9)は次の連立方程式となる。

$$\left. \begin{aligned} \psi_s + \sum_{j=1}^N \gamma_j K_{ij} &= y_i \cos \alpha - x_i \sin \alpha \\ i &= 1, 2, \dots, N+1 \\ K_{ij} &= \frac{1}{2\pi} \left[(l+\Delta) \log r_1 - (l-\Delta) \log r_2 \right. \\ &\quad \left. + d \left(\tan^{-1} \frac{l+\Delta}{d} - \tan^{-1} \frac{l-\Delta}{d} \right) - 2\Delta \right] \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

第2図 パネルとコントロール点

第3図 パネル分割法

d, l, Δ については、第2図参照(本図中 s'_j は式における積分変数を表す)。

3.3 リニア型渦要素⁵⁾による定式化 j 番目のパネル上の渦分布が次のような直線分布であるとする。

$$\gamma(s'_j) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{s'_j}{\Delta} \right) \gamma_j + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{s'_j}{\Delta} \right) \gamma_{j+1} \quad (13)$$

ここで、 γ_j 及び γ_{j+1} は j 番目パネルの端点における値を示す。式(13)を式(9)に用い Kutta の条件により、後縁点での $\gamma_1 = \gamma_{N+1} = 0$ を仮定すると、

$$\left. \begin{aligned} \psi_s + \sum_{j=1}^N \bar{K}_{ij} \gamma_j &= y_i \cos \alpha - x_i \sin \alpha \\ i &= 1, 2, \dots, N \\ \bar{K}_{ij} &= \bar{K}_{ij}^{(1)} + \bar{K}_{ij}^{(2)} \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

ここで、コントロール点がパネルの端点に一致しない場合は、

$$\left. \begin{aligned} \bar{K}_{ij}^{(1)} &= \frac{1}{4\pi} \left(I_{ij}^{(1)} - \frac{I_{ij}^{(2)}}{\Delta} \right), \quad \bar{K}_{ij}^{(2)} = \frac{1}{4\pi} \left(I_{ij}^{(1)} + \frac{I_{ij}^{(2)}}{\Delta} \right) \\ I_{ij}^{(1)} &= (l + \Delta) \log r_1 - (l - \Delta) \log r_2 \\ &\quad + d \left(\tan^{-1} \frac{l + \Delta}{d} - \tan^{-1} \frac{l - \Delta}{d} \right) - 2\Delta \\ I_{ij}^{(2)} &= (l^2 - \Delta^2 - d^2) / 2 \cdot (\log r_1 - \log r_2) \\ &\quad + dl \left(\tan^{-1} \frac{l + \Delta}{d} - \tan^{-1} \frac{l - \Delta}{d} \right) - l\Delta \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

コントロール点がパネル端点(j)に一致する場合は、

$$\left. \begin{aligned} \bar{K}_{ij}^{(1)} &= \Delta / 4\pi \cdot \{2 \log(2\Delta) - 3\} \\ \bar{K}_{ij}^{(2)} &= \Delta / 4\pi \cdot \{2 \log(2\Delta) - 1\} \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

また、コントロール点がパネル端点($j+1$)に一致する場合は、

$$\left. \begin{aligned} \bar{K}_{ij}^{(1)} &= \Delta / 4\pi \cdot \{2 \log(2\Delta) - 1\} \\ \bar{K}_{ij}^{(2)} &= \Delta / 4\pi \cdot \{2 \log(2\Delta) - 3\} \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

である。

3.4 パネル分割法 パネル法の影響を調べるため、次の3種の分割法を用いる。

(1) 半円分割法(SCM): この方法は、コードに立てた半円に対して角度等分割を行い、角度分割点から下ろした垂線で、翼形をパネルに分割するやり方である(第3図)。この分割法は、Doublet Lattice 法などにおいて、最も良い精度の解を与えた分割法⁶⁾である。

(2) 等分割法(EQM): この方法は、コードを均等に分割する方法である。第3図からも分かるように、前縁付近の形状近似が良くないことが予想される。

(3) 1/4 円分割法(QCM): この方法はコード長を半径とし、後縁を中心とする1/4円に対して角度等分割を行い、角度分割点から下ろした垂線で翼形をパネルに分割する方法である。前縁付近は、十分細かいパネルで近似される(第3図)。

4. 計算結果

4.1 誤差評価法 パネル法の数値解の誤差を見積るため、次の式で定義される誤差評価指数を用いる。

$$E = \frac{\sum_j h_j \cdot |C_{p,j} - C_{p,e}|}{\sum_j h_j \cdot |C_{p,e}|} \quad (18)$$

h_j : j 番目パネルの長さ

この種の誤差評価指数は、筆者らの以前の研究⁷⁾でも用いられたものである。

通常、数値解の精度の検討は、圧力分布の比較などで直観的に行われることが多い。しかし、解の収束性を調べたり、方法間の比較検討をシステムチックに行おうとする場合、誤差を1つの指数にまとめて置くことは、必須である。

なお、圧力分布の精度と、誤差評価指数との対応は、概ね次の通りである。

$E \geq 3 \times 10^{-1}$: 圧力分布はあっているとは言えない。

$E \sim 10^{-1}$: 圧力分布はだいたい合っている。

$E \sim 10^{-2}$: 圧力分布は良くあっている (厳密解との違いはごくわずか)。

$E \sim 10^{-3}$: 圧力分布はきわめて良くあっている。

実用上要求される精度は用途にもよるが、 $10^{-1} \sim 10^{-2}$ 位であろう。従って、計算手法としては、合理的な計算コストの範囲で 10^{-2} 程度の精度を達成す

る手法が望まれる。

なお、以下の計算例においては、翼形を決定するパラメータは $a=b=0.1$ とし、後縁角 τ も 10° と固定する。さらに迎え角 $\alpha=10^\circ$ とする。また分割数 N も、3.4 節から分かるように偶数のみを取り、翼形は上面、下面とも同数のパネルに分割する。

4.2 コントロール点位置の効果 コントロール点位置の効果をも第4図、第5図に示す。分割数は $N=20$ と固定してある。これらの図において、横軸 CP がコントロール点の位置を示す。 $CP=0$ は i 番目のパネルのコントロール点が、 $i-1$ 番目のパネルとの節点に一致していることを示し、 $CP=1.0$ は逆に $i+1$ 番目のパネルとの節点に一致していることを示す。 $CP=0.5$ は、コントロール点が i 番目のパネルの中央にあることを示す。

第4図は、ステップ型渦要素について、3種の分割法の結果を示したものである。分割法によって精度の差はあるものの、いずれも、 $CP=0.5$ 付近を最低値 (=精度最良) として、なだらかな変化を示す。 $CP=0$ あるいは $CP=1$ 付近 (パネルの端) では、精度はかなり悪化する。

本図は、従来ステップ型特異性を用いたパネル法では、コントロール点がパネル中央に置かれてきたことが、妥当であったことを示している。また、コントロール点の位置の変化には、精度はさほど敏感でないことも分かる。

以後の計算では、ステップ型渦要素に対しては、 $CP=0.5$ を用いる。

第5図は、リニア型渦要素に対する結果である。図から分かるように、この場合は、3種の分割法ともに

第4図 コントロール点の位置の効果 (ステップ型渦要素)

第5図 コントロール点の位置の効果 (リニア型渦要素)

第6図 圧力分布例1 (半円分割法)

第7図 圧力分布例2 (等分割法)

第8図 圧力分布例3 (1/4円分割法)

$CP=0$ が特異的に良い。 $CP=0$ を少しでもはずれると、解の誤差はきわめて大きくなり、その値も CP の変化に対して何等の系統性も示さない。

リニア型渦要素に対するこのような結果は、やや意外である。というのは、渦分布が厳密なものに近づくほど、翼上の境界条件は、至るところで満たされるようになるはずであり、その反映として、コントロール点の位置の変化に対して、解は鈍感になると期待されるからである (明らかに、ステップ型渦要素を用いた近似より、リニア型渦要素を用いた近似の方が厳密解に近い)。

筆者らの揚力面理論に関する以前の研究⁷⁾では、確

第9図 解の収束性 (ステップ型渦要素)

かにそのような傾向を示し、最もコントロール点の位置の変化に対して鈍感な渦要素は、リニア型渦要素であった。

パネルに関しては、逆にリニア型渦要素の方が、コントロール点位置の変化に対して、敏感になる理由は、現在のところ不明である。ただ第5図から言えることは、リニア型渦要素を用いた場合は、 $CP=0$ と選ばなければいけない。そこから少しでもずれたら、解は保証されないということである。

以後の計算では、リニア型渦要素に対しては $CP=0$ を用いる。

4.3 圧力分布例 圧力分布の一例を第6図～第8図に示す。いずれも、パネル上の渦要素はステップ型であり、相違点は分割法である。また、いずれにおいても、厳密解が後縁で下に伸びているのがみられるが、これは後縁で岐点 (すなわち $C_p=1$) を課しているためである。

第6図は、半円分割法によるもので、本論で用いた分割法の中では、最も良い精度を与えている。圧力分布も翼上面前端部でやや厳密解とずれているほか、全般に良くあっている。

ステップ型渦要素を用いた場合、後縁より少し突き出した位置にもコントロール点を設けているが、解のふるまいは、突き出る距離にはほとんど依存しない。本論の計算では、すべて突き出る長さは、最後部パネル長さの $1/200$ に固定してある。

第7図は、等分割法によるもので、3種の分割法の中では、最も精度が悪い。圧力分布も翼上面前縁近く

第10図 解の収束性 (リニア型渦要素)

第11図 解の収束性 (半円分割法)

での厳密解とのずれはかなり大きい。この傾向は分割数を増やしていても変わらず、その結果、分割数を増やしても、余り解の精度は向上しない。

第8図は1/4円分割法によるものである。翼形の形状変化の大きい前縁部分のみを細かく分割するというアイデアであるが、結果は半円分割法より悪い。前縁付近の解は改善されているが、他の部分の解が悪化している。特に、形状変化の少ないはずの後縁部分の解まで悪化していることに注意すべきである。

これは、後縁近くでは、渦が分布しているパネルが上下より接近すること、及び圧力分布の変化も比較的大きいことによると思われる。そのために、精度の良い解を得るには、後縁付近でも、細かい分割が必要とされるのではないかと考えられる。

なお、リニア型渦要素による圧力分布結果は示していないが、傾向的には、ここに示したステップ型渦要素と同じ結果を示す。

4.4 解の収束性 解の収束性は第9図～第11図に示される。第9図はステップ型渦要素を用いた結果であり、分割法による違いが示してある。精度的には半円分割法(SCM)が最も良く、次いで1/4円分割法(QCM)、等分割法(EQM)である。収束性は等分割法を除いては概ね $E \propto N^{-1}$ となっており、分割数 N を倍に増やすと、誤差は半減する関係になっている。

等分割法は例外で、 $N=20$ から $N=50$ にかけてほとんど誤差が減少していない。圧力分布を見ると4.3節でも述べたように、翼上面前縁近くでの解のずれが大きく、これが精度及び収束性の両方を損なっている。パネル法で翼の圧力分布を求める際、等分割法は用いるべきではないと言える。

第10図はリニア型渦要素を用いた結果である。分割法の優劣順位はステップ型の場合と同じであるが、この場合は、半円分割法のみが $E \propto N^{-2}$ の収束性を示している。他の分割法の収束性は、 $E \propto N^{-1}$ かそれよりもやや悪い。

渦要素の形としてより高次なものを用いるのは、精度及び収束性の向上を期待してであるが、分割法が悪いとその効果は発揮されないと言える。

第11図は最も良い半円分割法を用いて、ステップ型渦要素と、リニア型渦要素による解の収束性を比較したものである。収束性においては、リニア型渦要素の方が優れているのが分かる。しかし実用上の目標精度である $E \sim 10^{-2}$ より大きい E のところでは、むしろステップ型渦要素の方が誤差の絶対値は小さい。従って、実用的には低次要素であるステップ型渦要素で十分であると言える。

さらにこの図よりいずれの方法においても、 $E \sim 10^{-2}$ を実現するには、かなりの分割数 $N(50 \sim 60)$ を必要とすることが分かる。 $N=50 \sim 60$ は合理的に少ない数とは言えない。パネル法は、最終的には全機の圧力分布を求めるのが目標であるから、少なくとも2次元物体においては、現在の精度を1桁上回る計算手法が必要であるように思われる。

5. 結 論

流れ関数と、表面渦要素を用いて定式化されたパネル法 (渦パネル法) について、誤差特性の研究を行った。表面渦要素の型としては、ステップ型とリニア型を用いた。また、物体形状としては Karman-Trefftz 翼を用い、翼面の分割は半円分割法、等分割法、1/4 円分割法の3種を用いた。

本研究により、以下の事が明らかとなった。

(1) コントロール点の最適位置は、ステップ型渦要素については、パネルの中央付近、またリニア型については、パネルの端点であることが分かった。これらの位置は、従来の文献でも用いられている位置であるが、本研究によって、それらが体系的に調査された。また、コントロール点がずれたときの誤差の増大の様子が明らかとなった。

(2) 表面分割法としては、半円分割法が最適であることが分かった。他の分割法との比較の結果、翼形については、形状変化の大きい前縁のみならず、圧力係数がかかなり変化する後縁近くも、細かく分割する必要があることが分かった。等分割法は、最も悪い精度を与えた。

(3) 収束性については、最も良い半円分割法を用いた場合、ステップ型渦要素では $E \propto N^{-1}$ 、リニア型渦要素では $E \propto N^{-2}$ であり、リニア型渦要素の方が収束性が良いことが分かった。しかし、誤差の大きさ自身については、 $E \sim 10^{-2}$ 程度の実用的に十分な誤差の範囲では、むしろステップ型の方が誤差が小さいことが分かった。

(4) 渦要素の型については、実用的な精度の範囲 ($E = 10^{-1} \sim 10^{-2}$) においては、ステップ型の方が良いことが分かった。定式化もステップ型の方が簡単であり、特別の事情が無い限り、ステップ型渦要素を用いた方が良いことが明らかとなった。

(5) 精度については、最も良いステップ型渦要素及び半円分割法を用いても、 $E \sim 10^{-2}$ を実現するには、 $N = 50 \sim 60$ というかなり大きな分割数を要することが分かった。

なお、これらの数値計算の計算時間は、用いた渦要素の型には余り依存せず、リニア型の方が、ステップ型に比べて1割程度長いだけであった。

参考文献

- 1) 柳沢三憲：境界要素法による全機形状の空力特性の計算，日本航空宇宙学会誌，34 (1986)，pp. 369-379.
- 2) Kennedy, J. L. and Marsden, D. J.: Potential Flow Velocity Distributions on Multi-Component Airfoil Sections, Canadian Aeronaut. Space J., 22 (1976), pp. 248-256.
- 3) 今井 功：流体力学 (前編)，裳華房，東京，1978，pp. 132-146.
- 4) Oskam, B.: Asymptotic Convergence of Higher-Order Accurate Panel Methods, J. Aircraft, 23 (1986), pp. 126-130.
- 5) Soenne, E. and Laine, S.: An Inverse Boundary Element Method for Single Component Airfoil Design, J. Aircraft, 22 (1985), pp. 541-543.
- 6) 市川明夫，安東茂典：非定常揚力面の数値計算誤差，日本航空宇宙学会誌，28 (1980)，pp. 541-543.
- 7) 市川明夫，安東茂典，中島邦男：亜音速揚力面の数値計算誤差に関する賞書，日本航空宇宙学会誌，25 (1977)，pp. 575-581.