—技術ノート— TECHNICAL NOTE

ダクト・プロペラ性能の迅速自動計算法^{*1} A Quick Automatic Method for Computing Performance of Ducted-Propeller

安 東 茂 典^{*2}・加 藤 三 千 代^{*3}
Shigenori ANDO and Michiyo KATO

Key Words: Ducted-Propeller, Performance, Computation, Quick-Automatic

Abstract

A quick automatic method for computing aerodynamic performance of ducted propellers is presented. The thrust- and power-coefficients and propulsive efficiency are calculated and plotted against the advance ratio. The representative blade section is investigated. It is found that the most suitable section is one at 75% radius as the same as nonducted cases. Thrust coefficient is predicted satisfactorily. But propulsive efficiency is overestimated; the difference seems to be "blower efficiency" defined in a previous paper.

1. 序 論

ダクト・プロペラは、航空分野のみならず広く用いられている便利な tool である。しかし後述のようにその空力性能を評価する、利用可能な、簡便な方法——つまり大企業の研究あるいは設計室で用いられているようなものではなく——は、筆者には見当らない。

こういう状況は、ダクトなしのプロペラについても同じである。仕方なく第2次大戦かそれ以前の、チャート使用法に今だに頼っているようである。筆者は、文献1)～3)においてダクトなしプロペラの——しかもエンジンに結合された——空力性能の迅速自動計算法を提出して来た。これらは

ブレード間の相互干渉を含まず、

後流の回転を考慮に入らず、

75%半径位置の翼素性能のみ考慮する、

ものである。しかし、広く工学的目的——特に多くのパラメータの影響を簡単に把握する——には好適であると確信している。特に文献3)では、定速プロペラ

の特長を明白に示した。

さて、今回の目的は、ダクト・プロペラである。本研究の動機は水面飛行機用のスラスターである。水面飛行機の場合にダクト・プロペラが多用される主な理由は次の2つである。

i) プロペラ円板直径を大きくしないで、充分なる静止～低速推力を得たい。

ii) 安全のためのガードとなる。

ただ、ダクト・プロペラの欠点は、よく知られているように（例えば文献4)）を見よ、

静止～低速で望ましいダクト形状が高速でのそれと矛盾する、

ということである。すなわち静止～低速ではベルマウス型のものが良く、一方高速では薄くて低弦長、低キャンバーのものが好ましい。

以下、過去の文献中から筆者の印象に強く残ったものの要点を述べよう。

特に印象おかいものは、文献4)である。それは理論・実験の両面にわたっている。理論といっても物理現象の定性的把握に重点をおくもので、非常に面白い。さすがに NACA TM になっただけのことはある。

まず、(以下、原論文の記号のまま) F_∞/F はプロペラ推力荷重に殆んど依存しない*。従ってパワ・オフ状態で近似してよい。ただし F_∞ , F は夫々無限下流での後流断面積及び、プロペラ円板面積（ボスを含む）である。

次に推進効率を下記のように組み立てている：

$$\eta = \eta_m \times \eta_c \times \eta_{Ma} \times \eta_E \quad (1a)$$

ここで

$$\eta_m = \text{最大理論効率} \quad (1b)$$

*1 平成3年11月6日原稿受理

*2 徳島文理大学工学部

*3 名古屋大学工学部

* 序論中の、下線部は、本論文の定式化、及び計算結果の考察中で用いられる。

η_C = プロペラ効率

η_{Ma} = パワオフでのシュラウド効率

η_E = パワオンによるシュラウド効率変化

これらの中、 η_E は 1 に大そう近い。 η_E と η_{Ma} は、推力係数 C_s の変化に対して相反する変化をする。前者は低 C_s で大、後者は大 C_s で大きくなる。よって、 $\eta_m \eta_{Ma}$ はある C_s で最大になる。 $\eta_m \eta_{Ma} \eta_E$ の積の最大値は 0.8 を少し越える。プロペラ効率 η_C は、

$$\eta_C \equiv F_R \bar{v}_R \Delta p_0 / L_i \quad (2)$$

ただし、

F_R : プロペラ円板環状面の、面積

$\bar{v}_R$: " 通過平均流速

Δp_0 : " での圧力上昇

L_i : プロペラ軸馬力

である。 η_C の直接的評価法は文献 4) には記されていない。しかし、 η_C の存在のために η の最大値は 10~30% ぐらい低下する。かくして実験的に得られた全推進効率の最大値は、71% に留っている。これはダクトなしプロペラの η の 80~85% と比較するとずいぶん低い。 η_C を用いない、 $\eta_m \eta_{Ma}$ がダクトなしの場合に匹敵するようである。

文献 4) の物足りない点は、その理論解析のセクションにおいてもブレード断面の空力特性が全く関与しないことである。ゆえにこの論文の、ある実際の特定制用途のダクト・プロペラの諸元決定における、有用性は甚だ疑問であろう。

次に他の実験資料について述べる。ダクト・プロペラの実験資料は、1960~1970 年頃の VTOL 研究の最盛期に多数発表されている。しかし、それらはダクト迎角が 0°~90° 間で変化する場合に、関心を集中している。即ち、本論文で関心がある迎角ゼロに限定して詳細な情報を与えるものは少ない

文献 5), 6), 7) は、迎角 0° の場合の若干の実験資料を含む。これらの中の特に文献 5) の結果が本論文で提出される計算法と比較するために用いられる。文献 5) の最大推進効率もまた、約 0.6 であり、文献 4) と矛盾しない。一方本論の計算結果は、推力に関しては文献 5) の実験結果に近いが、推進効率は 80% ほどになり、文献 4), 5) の約 60% より大きい——つまり、パワを過少評価する。プロペラ効率⁴⁾を計上できないのである。だが、それを承知の上修正して用いれば実用的価値がある。

記号

A_1 : $\{(\pi/4)D_1^2\} - \{(\pi/4)D_0^2\}$ つまりプロペラ円板の環状部面積、ボス部を含まない

A : $(\pi/4)D_1^2$, ボス部を含む。プロペラ円板面積

C_* : プロペラ・ブレードの代表断面での弦長

C_{ti}, C_{to} : 内部流, 外部流のマサツ係数, ぬれ面積を規準とする

C_P : パフ係数 $P/\rho n^3 D_1^5$, 無次元

C_T : 推力係数 $T/\rho n^2 D_1^4$, 無次元

C_{l*}, C_{d*} : プロペラ・ブレードの代表断面での、揚力, 抗力係数 (2 次元翼として)

C_{s1}, C_{s2} : シュラウドおよび中央胴体の長さ

D_1, D_4, D_0 : 断面 1, 4, 及びボスの直径

J : $\pi \bar{J} = V_0 / n D_1$, 無次元

$\bar{J}$: V_0 / V_T , 無次元

K_T : $T / \frac{1}{2} \rho A V_T^2$, 無次元

K_P : $P / \frac{1}{2} \rho A V_T^3$, 無次元

n : プロペラの回転数

P : パワ

s : $V_4 / V_1 = (D_1^2 - D_0^2) / (D_1^2 - D_0^2)$, 無次元

T : 推力

V_0, V_1, V_4, V_∞ : 自由流, 断面 1, 4, 及び無限下流での流速

V_T : プロペラ先端の周速度

x_* : ブレード代表断面の半径位置 / $(D_1/2)$

z : 1 プロペラ中のブレード枚数

α_* : プロペラ・ブレードの、代表断面の迎角

β_* : プロペラ・ブレードの代表断面でのピッチ角

δ_P : 式 (8 b), (15) を見よ

δ_T : 式 (9 b), (15) を見よ

η : 推進効率, 無次元

η_C : プロペラ効率, 無次元

$\lambda = V_1 / V_T$, 無次元

ρ : 空気密度

σ_* : ソリディティ $z C_* / \pi D_1$, 無次元

$\phi_* = \beta_* - \alpha_*$

- [註] 1. 角度は、定式化中ではラジアン、数値計算中では度として用いることが多い。
2. 断面 1 はプロペラ面, 4 は、ダクト後縁でのそれを表わす。
3. “ダクト”という用語と“シュラウド”

ド”は同じぐらいの頻度で用いられている。

2. 定 式 化

基本的には文献1)～3)の方針を踏襲する。ただし文献1)は“推力整合方式”であり、文献2), 3)は“パワー整合方式”である。実はこの切り換えは後者のみがダクテッド・プロペラで有用とわかったので行われたのである。

2.1 外部的考慮 プロペラの詳細に立ち入らない考慮により、推力は

$$T = \rho A V_1 (V_\infty - V_0) - \frac{1}{2} \rho S_0 V_0^2 C_{D0} \quad (3)$$

ただし、第2項はダクトの外表面のマサツ抗力である。この式の成立理由については、Appendix Aを参照されたい。ダクト内面と中央物体(ボス)の抵抗は、この表現によれば、陽には現われない。

次にパワーを考える。Appendix Bに記述した理由により、

$$P_F = \rho A_1 V_1 \frac{1}{2} (V_\infty^2 - V_0^2) + \frac{1}{2} \rho S_0 V_0^3 C_{D0} + \frac{1}{2} \rho S_1 V_{\text{eff}}^3 C_{D1} \quad (4)$$

と書ける。ただし添字( )₀, ( )₁は夫々ダクトの外表面、ダクト内部(中央物体を含む)の寄与を表わす。これらの式において次のことを注意する:

i) V_∞ は無限下流におけるプロペラ後流流速である。しかし、これはダクト出口の流速とほぼ等しい。その理由は

- ・亜音速ダクト出口では等圧噴出である。よってダクト出口での静圧は、ほぼ大気静圧である。

- ・序論で引用した文献4)の指摘、

「 F_∞/F はプロペラパワーに依存しない」

による。

ii) $V_{\text{eff}} \equiv V_1$ としてよい。

理由は、文献4)において、「内部流損失がプロペラ荷重によって、ほとんど影響されない」と述べられているからである。

2.2 パワー整合関係

2.2.1 式(4)などの無次元化

$$P_F \equiv K_F \frac{1}{2} \rho A V_1^3 \quad (5)$$

とおく (4), (5)から容易に、次式をうる:

$$K_F = \left(\frac{V_1}{V_T} \right)^3 \left(\frac{V_4^2}{V_T^2} - \frac{V_0^2}{V_T^2} \right) + C_n \left(\frac{S_1}{A} \right) \left(\frac{V_1}{V_T} \right)^3 \left(1 + \frac{C_{D0} S_0}{C_n S_1} \frac{V_0^3}{V_T^3} \right) \quad (6)$$

すなわち

$$K_F = \lambda^3 (s^2 - \bar{f}^2 / \lambda^2 + \delta_F) \quad (7)$$

$$\left. \begin{aligned} \lambda &\equiv V_1 / V_T, \quad \bar{f} \equiv V_0 / V_T \\ \delta_F &\equiv \left(\frac{S_1}{A} \right) C_n \left(1 + \frac{C_{D0}}{C_n} \frac{S_0}{S_1} \frac{\bar{f}^3}{\lambda^3} \right) \\ s &\equiv V_4 / V_1 = A_1 / A_4 \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

一方推力係数 $K_T = T / \frac{1}{2} \rho A V_T^2$ は、式(3)より

$$K_T = 2\lambda^2 (s - \bar{f} / \lambda - \delta_T), \quad (9a)$$

$$\delta_T \equiv (C_{D0} / 2) (S_0 / A) \bar{f}^2 / \lambda^2 \quad (9b)$$

推進効率 η は、次式で求められる。

$$\eta = T V_0 / P_F = \bar{f} K_T / K_F \quad (10)$$

2.2.2 パワー整合関係式 式(7)だけでは、 K_F は求められない。もう一つの条件式が必要である。それは、文献1), 2), 3)でも使用したような「ある代表断面に重点をおいた、翼素理論である。ダクトなしの場合には、それは75%半径位置であったが、ダクテッド・プロペラの場合には必ずしも定説がない。よって、それを x_* 位置としておく。すると

$$K_{F*} = \sigma_* \left(\frac{1}{4} + \frac{\lambda_*^2}{2} \right) (C_l \sin \phi + C_d \cos \phi)_* \quad (11)$$

と書ける¹⁻³⁾。ここで

$$\left. \begin{aligned} C_l, C_d &\text{は、} x = x_* \text{での断面のもの} \\ \sigma_* &= z C_* / \pi D_1 \\ \lambda_* &= x_* \tan \phi_* \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

である。式(11)を(7)と等置する。

$$f(\alpha_*) = \sigma_* \left(\frac{1}{4} + \frac{\lambda_*^2}{2} \right) (C_l \sin \phi + C_d \cos \phi)_* - \lambda_*^3 (s^2 - \bar{f}^2 / \lambda_*^2 + \delta_F) = 0 \quad (13)$$

これを、文献1)～3)で述べたような方法で、数値的に解いて α_* を定める。

代表断面 x_* は数値実験により決定する。

2.3 δ_F, δ_T の意義 C_n, C_{D0} は $O(10^{-3})$ である。よって δ_F, δ_T は K_F, K_T 中の他の項に比して大そう小さく無視可能のように見える。しかし $\bar{f}/\lambda \rightarrow s$ となると急に存在意義が現われる。更に注意すべきは、これらの小さい項が K_F 中では加算、 K_T 中では減算として現われること。そのため $K_T=0, \eta=0$ が、 $K_F \approx 0$ となるより小さい $\bar{f}$ で、起こる。

よって、 δ_F, δ_T の存在は η vs. $\bar{f}$ カーブの全体的形状を支配する。値は小さくとも不可欠の存在である。

2.4 $x_{\max}$ と $x_{\min}$ ダクトなしのプロペラでは、ブレード・ルートと先端での推力ロスを計上するために、

$$x_{\max} = 0.95, \quad x_{\min} = 0.3$$

を用いた。しかし、ダクテッド・プロペラの場合には、

中央胴体がある一直径は $x=0.3$ 以上を与えることが多い。

ブレード先端は、ダクト内面と、僅かな隙間をなすよう角ばっている。

こういうことを考慮して、式(9a)中の K_T には、 $x_{\max}$ も $x_{\min}$ も含まれていない。後述の計算では、推力係数の予測は良好であり、この仮定は妥当であったと思う。

3. 数値計算法

3.1 検証計算の方針 以下においては、次のように単純化した。

$$\begin{aligned} C_{s1} &= C_{s2} = C_{s1} \\ C_n &= C_{n0} = C_t \end{aligned} \quad (14)$$

よって

$$\begin{aligned} \delta_T &= 2C(C_s/D)(\bar{J}^2/\lambda^2) \\ \delta_P &= 4C(C_s/D)(1+\bar{J}^3/\lambda^3) \end{aligned} \quad (15)$$

その時、計算法の流れ図は第1図のようになる。

▶文献5)の中、ダクト迎角0ケースを、本計算法を検証するために用いた。これは第2図のトップに引用されている。ダクト・プロペラの代表断面位置 x_* としてどこが適当か？ 自明とはいえないので、0.75, 0.80, 0.90, 1.00 の4ケースについて計算してみた。

第1表に入力値を示す。s, C_s/D などの値は、文献5)の Table I の値を用いて決めた。 $\Delta\beta_*$, C_* などは文献5)の Fig. 3 から読み取った。この C_* を用いて σ_* をきめた。ちなみにブレード数 $z=8$ である。なお本ダクト・プロペラは静翼をもっている。これによるエネルギー損失は δ_P 中に含まれていると仮定した。一方推力ゲインは、本論の定式化がもともと後流の回転を無視したものであるから、修正の要はない。▶実は文献7)についても計算してみたが、原論文に、パワ測定精度は怪しい旨書かれている。故に本論中に記載することは断念した。計算との比較に適当な実験データが基だ少いことを強調しておく。

3.2 計算結果およびその検討

(1) 第2図の中段は、 $\beta_T=15^\circ$ ケース、下段は $\beta_T=23^\circ$ ケースである。それぞれについて

C_T, C_P, η , vs. J

がプロットされている。 $C_t=0.003$ を用いた。どの x_* がふさわしいかの判定には、 C_T のみで充分と考えられる。両ケースとも $x_*=0.75$ が最良と判定した。 C_P と η については、もしも C_T が正しければ、この中のどちらか一つを考えればよい。次の表を見よ。

β_T	15°	23°
$\eta_{\max}$	0.6(0.85)	0.62(0.85)
J at $\eta_{\max}$	0.5(0.65)	0.6(0.8)

ただし、かつこ外は文献5)から、かつこ内は本計算の $x_*=0.75$ で得られたものを近似的に示す。 $\eta_{\max}$ もそれが起こる J 値の何れについても本計算値は著しく高すぎる。しかし $\eta_{\max} \approx 0.85$ は、ダクトなしのプロペラでは実験的にも充分達成できるものである。なぜダクト・プロペラの実験値 $\eta_{\max}$ がかくも低いのであろうか？

第1表 検証計算で用いられた入力値

	x_*			
	0.75	0.80	0.90	1.00
$\beta_T = \begin{cases} 15^\circ \\ 23^\circ \end{cases}$				
$\Delta\beta_*$	8°	6°	2.5°	0°
σ_*	0.1592	0.147	0.13	0.1167

文献5)の Table I, Fig. 3 を用いた

For all cases, $s=0.76$, $C_s/D=0.646$, $\beta_* = \beta_T + \Delta\beta_*$.

$\lambda_* = x_* \tan \phi_*$.

第1図 計算フローチャート

第2図 検証計算の結果

上段：文献5)のFig. 6の実験結果を引用した、

中段： $\beta_T = 15^\circ$ の場合、本計算結果、下段： $\beta_T = 23^\circ$ の場合 第3図 プロパー効率 η_c の例、文献4)から

序論でも述べたように、文献4)のそれも0.6~0.7で低い。従って、実験データとしては平均的な値である*。筆者らはこの点について次のように推論する：

本論の計算法では η_c 、“プロパー効率”⁴⁾を包含しえない。

因みに、このプロパー効率の解析的推論法は、文献⁴⁾

でも提出されていない。第3図に η_c の例を文献4)から引用した。

J at $\eta_{\max}$ 値は、 C_n , C_{n0} の入力値を変えれば改善で

* 文献6)に、 η が0.8に達しているカーブがある。しかし、これは実験によるものではないらしい、かつ、他の文献からの引用で、詳細不明である。

きるだろう。

いま1つ考えられる損失は、ブレード間相互干渉損失である。これは本計算中には含まれないが、もしもパワーに、係数

$$[1+0.03(z-1)], \quad z \text{ はブレード数}$$

を乗すべきであるとすれば、 $z=8^5)$ ではほぼ1.2となる。これは、上述の“プロアー効率”を与えうる。ただし、これは今のところ、単なる試算である。

(2) 補 記

i) 実験に使用された x_* は、0.75 以上である。ダクト・プロペラのブレード先端は、ダクトとの隙間を小さくするため、ぶつ切りにするのがふつうである。これは、ダクトなしの場合よりも、代表断面を外方へずらせるであろう。この推論に基いて、 $x_* < 0.75$ のケースは計算から除外した。

ii) プロアー効率について：第3図は、文献4)から引用したプロアー効率である。現筆者らは、これを見て次の見解をもつ：

文献4)のプロアー効率の値は、忠実に信用するほどの価値があるものではない。しかし、ほぼ0.8のオーダーのプロアー効率が存在することは認めねばなるまい。よって暫定的には、 $\eta_c \approx 0.8$ を用いてよからう。これを用いると、第2図に示される本計算の C_p は約1/0.8倍、 η は0.8倍になり、第2図最上に引用された文献5)の C_p 、 η に大そう近いものとなる。

4. 結 論

ダクト・プロペラの空力性能の迅速自動計算法を提出した。数値実験の結果から次のように結論できる。

- (i) 代表断面としては、75%半径位置を取るのが最適である。
- (ii) 推力係数 C_T vs. 進行率 J は、かなり良く予測できる。
- (iii) 推進効率 η (従って又パワ係数 C_P) vs. J は、実験値よりもかなり大き(小)い。この状況は、文献4)の“プロアー効率 η_c ”から生じているように思われる。
ただし、プロアー効率は、ほぼ0.8の値の存在を認めるのみで充分であり、文献4)の変動する値そのものを認めるのは疑問である。
- (iv) ダクトや中央胴体(ボスを含む)の抵抗は、 η vs. J 曲線の全体的形状を決めるので、重要である。しかし、 $\eta \leq \eta_{\max}$ の速度域での影響は

小さいだろう。

[追記] 本論文中の計算では、ブレード断面として NACA 4309 の資料を用いた。一部クラーク Y をも用いてみたがその差は無視可能であった。

参 考 文 献

- 1) 安東茂典, 加藤三千代: エンジンに結合されたプロペラ性能の迅速自動計算法, 日本航空宇宙会誌, 39 (1991), pp. 294-302.
- 2) 安東茂典, 加藤三千代: PAR-WIG の離水性能の予測法, 日本航空宇宙学会誌, 39 (1991), pp. 666-674.
- 3) 安東茂典, 加藤三千代: ダクトなし定速プロペラ性能の迅速自動計算法, 日本航空宇宙学会誌, 39 (1991), pp. 675-679.
- 4) Kruger, W.: On Wind Tunnel Tests and Computations Concerning the Problem of Shrouded Propellers, NACA TM No. 1202 (1949).
- 5) Mort, K. W. and Yaggy, P. F.: Aerodynamic Characteristics of a 4-Foot-Diameter Ducted Fan Mounted on the Tip of a Semispan Wing, NASA TN D-1301 (1962).
- 6) Grunwald, K. J. and Goodson, K. W.: Aerodynamic Loads on an Isolated Shrouded-Propeller Configuration for Angles of Attack from -10° to 110° , NASA TN D-995 (1962).
- 7) 大塚新太郎, 林 英志, 石山慎一, 杉川勝彦, 橋本孝明: Ducted Propeller の研究 (その1) Propeller 位置が性能に及ぼす影響, 日本航空宇宙学会誌, 17 (1969), pp. 287-293.

APPENDIX

A. 運動量関係式——式(3)について:

第4図に示すように、内部流領域[I], 外部流領域[O]に分ける。この各々について定常運動量の式を書くと、多くの流体力学テストにあるように

$$\Sigma \mathbf{F} = \int_{CS} \rho (\mathbf{V} \cdot d\mathbf{A}) \mathbf{V} \quad (\text{A } 1)$$

ただし CS は検査面、 $\mathbf{F}$ は検査面内部の流体に作用する力である。簡単のため、圧力は、大気静圧を0とする。今は x 方向の力成分に考慮を絞る。よって $\mathbf{F}$ を $-D$ と書く。BCDE, B'C'D'E'面に沿っては、右辺

第4図 運動量、エネルギー関係式を導びくための検査面

に寄与しない。また(0), (∞)面は左辺に寄与しない。よって

$$-\Sigma D = \int_{\infty} \rho V^2 dA - \int_0 \rho V_0^2 dA \quad (A 1')$$

である。また、図の上下を一括して表わすことにする。

[I] 領域

$$\begin{aligned} & -(D_{BC}^I + D_{CV}^I + D_P + D_{VE}^I) \\ & = [\int_{\infty} \rho V_{\infty}^2 dA - \int_0 \rho V_0^2 dA]^I \quad (A 2) \end{aligned}$$

$= \rho(V_{\infty}^2 A_{\infty} - V_0^2 A_0) = \rho(V_{\infty} - V_0) V_1 A_1$ (A 2')
 $-D_P - D_{CV}^I$ はダクト・プロペラの内部推力である：

$$T^I = \rho V_1, \quad A_1(V_{\infty} - V_0) + (D_{BC}^I + D_{VE}^I) \quad (A 3)$$

[O] 領域

この場合、(A 1')は、連続条件を用いると、

$$-(D_{BC}^O + D_{VE}^O) = [\int_{\infty} \rho V(V - V_0) dA]^O + D_{CD}^O \quad (A 4)$$

と書ける。作用反作用により

$$-D_{BC}^O = D_{BC}^I, \quad -D_{VE}^O = D_{VE}^I \quad (A 5)$$

である。よって(A 3)は

$$\begin{aligned} T^I &= \rho V_1 A_1 (V_{\infty} - V_0) + D_{CD}^O \\ &+ [\int_{\infty} \rho V(V - V_0) dA]^O \quad (A 6) \end{aligned}$$

ただし、

$$-D_{CD}^O \approx [\int_{\infty} \rho V(V - V_0) dA]^O \quad (A 7)$$

と仮定してよいだろう。よって

$$T^I = \rho V_1 A_1 (V_{\infty} - V_0) \quad (A 8)$$

は、ダクト・プロペラの

プロペラ、
 ダクト内面の圧力および表面マサツ }

を考慮しても成り立つ。式(3)は、

$$T = T^I - D_{CD}^O \quad (A 9)$$

という考えに基く。

B. エネルギー関係式——式(4)について：

エネルギー関係式は定常かつ熱伝導・重力・圧縮性を考えない場合、次のように書ける。

$$P = \int_{CS} (p + \frac{1}{2} \rho V^2) V \cdot dA \quad (B 1)$$

P は、検査面 CS 内の流体に供給されるパワーである。再び第4図に示されるように、[O], [I]領域に分ける。

[I] 領域

P への寄与は、プロペラ、及びダクト内面からだけ起こる。積分への寄与は(0), (∞)断面のみから起こるが、 P の寄与は連続条件により消える。よって

$$P_P^I + P_{Duct}^I = \frac{1}{2} \rho (V_{\infty}^3 A_{\infty} - V_0^3 A_0) \quad (B 2)$$

しかし

$$V_0 A_0 = V_{\infty} A_{\infty} = V_1 A_1$$

であり、かつ $P_{Duct}^I < 0$ であることを考慮して

$$P_P^I = \frac{1}{2} \rho V_1 A_1 (V_3^2 - V_0^2) + |P_{Duct}^I| \quad (B 2')$$

[O] 領域

$P_{Duct}^O < 0$ であることを考慮し、かつ外部流に関して連続の条件を適用すると

$$|P_{Duct}^O| = -[\int_{\infty} \frac{1}{2} \rho (V^2 - V_0^2) V dA]^O \quad (B 3)$$

プロペラの全必要パワー P_P^{total} は、

$$\begin{aligned} P_P^{total} &= P_P^I + |P_{Duct}^O| \\ &= \frac{1}{2} \rho V_1 A_1 (V_3^2 - V_0^2) + |P_{Duct}^I|^{I+O} \quad (B 4) \end{aligned}$$

これで

$$|P_{Duct}^I|^{I+O} = \frac{1}{2} \rho S_1 V_{leff}^3 C_{fi} + \frac{1}{2} \rho S_0 V_0^3 C_{fo} \quad (B 5)$$

と書けば

$$P_P^{total} = \text{本文(4)式の } P_P \quad (B 6)$$

であることがわかる。