片持ち回転はりの構造最適化^{*1}

Structural Optimization of a Cantilevered Rotating Beam

猫橋敏文^{*2}・井星正氣^{*2}
Toshifumi NEKOHASHI, Naohiro IBOSHI
長島知有^{*2}
and Tomoari NAGASHIMA

Key Words: Structural Optimization, Rotor Blade, Optimal Control, Minimum Deflection Problem

Abstract

A basic study concerning the structural optimization of a rotor blade subject to steady combined loadings is conducted. The combined loadings are assumed to be composed of distributed axial and lateral loadings which are simulating the centrifugal force and airloadings for a rotor blade in hover. To simplify the problem, the blade is modeled as a cantilevered rotating beam with the plane tapered cross section. The minimum deflection problem of the cantilevered rotating beam is formulated as an optimization problem involving inequality constraints and solved using optimal control methodology. Optimum area distributions are determined numerically for typical combinations of combined loadings and effects of the centrifugal force on the optimum solutions are discussed. Numerical results reveal clearly the important role of the axial loading on the optimum solution and inclusion of the centrifugal force to the structural optimization of the rotor blade should be essential.

記 号

R : はりの長さ
 x : はりの軸方向位置
 w : はりのたわみ
 v : dw/dx
 u : d^2w/dx^2
 h : はりの厚さ
 c : はりの幅
 W : はりの全重量
 ρ : はりの密度
 A : はりの断面積

E : はりのヤング率
 I_x : はりの断面 2 次モーメント
 α : I_x/A
 B : はりの曲げモーメント ($=EI_x d^2w/dx^2$)
 S : はりのせん断力 ($=dB/dx$)
 Ω : はりの回転数
 C_p : 無次元遠心力係数 (釣り合い方程式)
 K_p : 無次元遠心力係数 (応力制約条件)
 K_b : 無次元曲げモーメント係数
 σ_a : はりの許容応力
 p : 軸力
 q : 横方向分布荷重
 q_c : 一様横方向分布荷重
 g : 重力加速度
 I : 評価関数
 J : 拡張された評価関数
 $(\sim)$: 無次元化量
 $(\cdot)$: $d(\cdot)/d\bar{x}$
 $\bar{\eta}, \bar{\xi}$: スラック変数
 x : 状態変数ベクトル
 z : 状態変数ベクトル (固定端で未知)
 u : 設計変数ベクトル
 π : 未知パラメータベクトル
 ϕ : 微分形制約条件ベクトル
 S : 等式制約条件ベクトル
 ω : 境界条件ベクトル (固定端で z に関する)
 ψ : 境界条件ベクトル (自由端)
 $\lambda, \xi, \rho, \sigma, \mu$: ラグランジュ乗数ベクトル

1. ま え が き

最近, コンピュータによる空力, 構造解析技術や複合材料技術の急速な発展を背景に, ヘリコプタの振動レベルをロータ・ブレードの構造最適化により低減す

^{*1} 平成 2 年 10 月 7 日, 第 29 回飛行機シンポジウムで発表.
平成 4 年 2 月 26 日原稿受理

^{*2} 防衛大学校航空宇宙工学教室

る研究が注目され始めた。ロータ・ブレード断面の寸法を設計変数とし、ヘリコプタの主要な振動加振源であるロータ・ハブの変動荷重、モーメントを固有振動数の配置や慣性モーメントを拘束しながら最小化することを試みた Peters¹⁾ や Friedmann²⁾ の論文はその先駆的な研究である。

振動レベルのような空力弾性応答特性に対してロータ・ブレードの構造を最適化する設計技術は一般に空力弾性テラリングと呼ばれており、ロータ・ブレードに対する能動制御技術の応用と共に今後のヘリコプタの高性能化のキーテクノロジーと考えられている。しかし、構造最適化手法によるロータ・ブレードの防振設計法に関する研究には、既存の空力弾性特性解析ソフト³⁾ と汎用最適化ソフト⁴⁾ を用いた実用的な設計ツールを構築するための応用的研究が多く、ロータ・ブレードの持つ基本的な特性（例えば回転はりとしての）がその構造最適化に及ぼす影響を及ぼすかといった基礎的な研究は殆ど見あたらない。

本研究では、ロータ・ブレードの構造最適化の基礎研究として、定常荷重を受けるロータ・ブレードのたわみ最小化問題を取り上げ、これを応力レベルや設計変数に対する様々な制約条件を含む不等式制約条件付き最適化問題として定式化し、軸力（遠心力）がブレードの最適形状に及ぼす影響を明らかにすることを試みた。

ブレードの構造は厚さ一定で幅が可変のプレーン・テーパード・ビームとし、これを片持ち回転はりでモデル化する。設計変数ははりの断面積とする。負荷条件はホバリング時のロータを想定し、一様分布もしくは3次分布の横方向空力荷重と遠心力に対応する分布軸力の複合定常荷重を受けている場合を考える。

はりの構造最適化では釣り合い方程式がたわみの4階微係数を含む非線形微分方程式となるため高階の微係数を含む汎関数の変分問題を取り扱うことになるが、本解析ではたわみと共に傾斜、曲げモーメント、せん断力を状態変数とし、たわみの2階の微係数（本文中では $\ddot{w}$ ）を形式的な設計変数とすることで、これを連続系の最適制御問題として定式化した。この定式化には設計変数の関数となる軸力（遠心力）が状態変数の1つとして取り扱える利点がある。

最適解の数値的探索には、最適制御問題によく用いられている SCGRA 法⁵⁾ を用いた。これは1次の共役方向法の一つであり、この数値解法の航空機や飛翔体の飛行性能最適化への応用は加藤の著書^{6,7)} に詳しい。

2. 定 式 化

本研究では、ロータ・ブレードを片持ち回転はりでモデル化し、これが第1図に示すように横方向分布荷重 $q(x)$ と軸力 $p(x)$ を受ける場合のはりのたわみ $w(x)$ を最小にする構造最適化問題を考える。

座標系の原点ははりの固定端における中立軸位置とし、変形前の中立軸方向を X 軸、これに垂直の方向を Z 軸（上向き正）とする。

はりとは単純直線はりとし、厚さ h が一定で、幅 c が可変の矩形断面を持つプレーン・テーパード・ビームとする。材質は等方等質とする。はりの弾性変形はたわみ $w(x)$ のみを考慮し、軸方向伸び、面内曲げ変形やねじり変形は考えない。

プレーン・テーパード・ビームの断面2次モーメント I_z は、

$$I_z = \alpha A, \quad \alpha = \frac{h^2}{12} \quad (1)$$

で与えられる。また、ブレードの単位長さ当たりの質量も A に比例する。そのため、設計変数 A の変更は曲げ剛性分布と共に質量分布の変更を意味することに注意すべきである。

複合荷重を受ける片持ちはりに対する評価関数としては、はりの全たわみ量や自由端でのたわみ、はりの全重量あるいは固定端での応力レベル等が考えられるが、本解析では横方向の全たわみ量を評価関数とする。したがって、

$$I = \int_0^R w(x) dx \quad (2)$$

である。

横方向の分布荷重と軸力を受ける片持ちはりの釣り合い方程式は、

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(E \alpha A \frac{d^2 w}{dx^2} \right) - \frac{d}{dx} \left(p \frac{dw}{dx} \right) - q = 0 \quad (3)$$

と表すことができる⁸⁾。境界条件は、

$$\left. \begin{aligned} w &= 0 \\ \frac{dw}{dx} &= 0 \end{aligned} \right\} \text{at } x=0 \quad (4)$$

第1図 座標系と記号

$$\left. \begin{aligned} A \frac{d^2 w}{dx^2} &= 0 \\ \frac{d}{dx} \left(A \frac{d^2 w}{dx^2} \right) &= 0 \end{aligned} \right\} \text{at } x=R \quad (5)$$

である。ただし、軸力 $p(x)$ はロータ・ブレードの遠心力に相当する分布軸力とし、

$$p(x) = \int_x^R \rho x \Omega^2 A dx \quad (6)$$

で与えられるものとする。ここで ρ ははりの密度、 Ω はロータ回転数である。

本解析においては釣り合い方程式(3)は微分形で表された制約条件の1つと考えるが、構造設計における通常の意味での制約条件として、

$$\int_0^R \rho g A dx = W \quad (7)$$

$$\sigma_a \geq \frac{p}{A} + E \left| \frac{d^2 w}{dx^2} \right| \frac{h}{2} \quad (8)$$

$$A(x) \geq 0 \quad (9)$$

の3つの制約条件を課す。(7)ははりの全重量を一定とする等周制約条件、(8)は曲げ、引張り複合荷重を受けるはりの応力レベルに対する制約条件である。 σ_a は部材の許容応力を示す。曲げモーメントによるはりの応力を(8)式右辺の第2項のように表現するのは最適断面分布に対応するたわみ曲線が変曲点を有する可能性があるためである。ただし、安全率は1.0としている。(9)は設計変数 A に対する側面制約条件で、現実には工学的に可能な最小値が存在するが本解析ではこれを0とした。

構造最適化問題の数値解法においては適切な無次元化を行うことが精度の高い解を得るための鍵となることはよく知られている。ここでは試行錯誤の結果、次のような無次元化を行った。

$$\bar{x} = x/R \quad (10)$$

$$\bar{w} = w/(\rho g R^5 q_c / E \alpha W) \quad (11)$$

$$\bar{A} = A/(W/\rho g R) \quad (12)$$

$$\bar{p} = p/(R \Omega^2 W/g) \quad (13)$$

$$\bar{q} = q/q_c \quad (14)$$

$$\bar{I} = I/(\rho g R^6 q_c / E \alpha W) \quad (15)$$

$$C_p = \rho R^4 \Omega^2 / E \alpha \quad (16)$$

$$K_p = \rho R^2 \Omega^2 / \sigma_a \quad (17)$$

$$K_b = \rho g h R^3 q_c / 2 \alpha W \sigma_a \quad (18)$$

したがって、(2)から(9)の各式は、

$$\bar{I} = \int_0^1 \bar{w}(\bar{x}) d\bar{x} \quad (19)$$

$$\frac{d^2}{d\bar{x}^2} \left(\bar{A} \frac{d^2 \bar{w}}{d\bar{x}^2} \right) - \frac{d}{d\bar{x}} \left(C_p \bar{p} \frac{d\bar{w}}{d\bar{x}} \right) - \bar{q} = 0 \quad (20)$$

$$\bar{p} = \int_{\bar{x}}^1 \bar{x} \bar{A} d\bar{x} \quad (21)$$

$$\int_0^1 \bar{A} d\bar{x} = 1 \quad (22)$$

$$1 - K_p \frac{\bar{p}}{\bar{A}} - K_b \left| \frac{d^2 \bar{w}}{d\bar{x}^2} \right| \geq 0 \quad (23)$$

$$\bar{A} \geq 0 \quad (24)$$

$$\bar{w} = 0, \quad \frac{d\bar{w}}{d\bar{x}} = 0 \quad \text{at } \bar{x} = 0 \quad (25)$$

$$\bar{A} \frac{d^2 \bar{w}}{d\bar{x}^2} = 0, \quad \frac{d}{d\bar{x}} \left(\bar{A} \frac{d^2 \bar{w}}{d\bar{x}^2} \right) = 0 \quad \text{at } \bar{x} = 1 \quad (26)$$

となる。

これらの各式には $\bar{A}$ および $\bar{w}$ の高階の微係数が含まれているため新たに、

$$\bar{v} = \frac{d\bar{w}}{d\bar{x}} \quad (27)$$

$$\bar{u} = \frac{d\bar{v}}{d\bar{x}} \quad (28)$$

$$\bar{B} = \bar{A} \bar{u} \quad (29)$$

$$\bar{S} = \frac{d\bar{B}}{d\bar{x}} \quad (30)$$

$$\bar{Z} = \int_0^{\bar{x}} \bar{A} d\bar{x} \quad (31)$$

を導入し、さらにスラック変数を用いて(23)、(24)を等式化すると定常荷重を受ける片持ち回転はりのたわみ最小化問題は、状態変数を $\bar{w}, \bar{v}, \bar{B}, \bar{S}, \bar{Z}$ および $\bar{p}$ とし、設計変数を $\bar{A}, \bar{u}, \bar{\eta}, \bar{\xi}$ とする連続系の等式制約条件付き最適化問題として、次のように規定されることになる。

Minimize :

$$\bar{I} = \int_0^1 \bar{w}(\bar{x}) d\bar{x} \quad (32)$$

Subject to :

$$\frac{d\bar{w}}{d\bar{x}} = \bar{v} \quad (33)$$

$$\frac{d\bar{v}}{d\bar{x}} = \bar{u} \quad (34)$$

$$\frac{d\bar{B}}{d\bar{x}} = \bar{S} \quad (35)$$

$$\frac{d\bar{S}}{d\bar{x}} = -C_p \bar{x} \bar{A} \bar{v} + C_p \bar{p} \bar{u} + \bar{q} \quad (36)$$

$$\frac{d\bar{p}}{d\bar{x}} = -\bar{x} \bar{A} \quad (37)$$

$$\bar{B} - \bar{A} \bar{u} = 0 \quad (38)$$

$$\frac{d\bar{Z}}{d\bar{x}} = \bar{A} \quad (39)$$

$$\bar{A} - \bar{\xi}^2 = 0 \quad (40)$$

$$\left(1 - K_p \frac{\bar{p}}{\bar{A}} \right)^2 - (K_b \bar{u})^2 - \bar{\eta}^2 = 0 \quad (41)$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{Z} &= 0, \quad \bar{w} = 0, \quad \bar{v} = 0 \\ \bar{p} &= \pi_1, \quad \bar{B} = \pi_2, \quad \bar{S} = \pi_3 \end{aligned} \right\} \text{at } \bar{x} = 0 \quad (42)$$

$$\left. \begin{array}{l} \bar{Z}=1, \quad \bar{B}=0 \\ \bar{S}=0, \quad \bar{p}=0 \end{array} \right\} \text{at } \bar{x}=1 \quad (43)$$

ここで、(33)～(38)は1階の連立常微分方程式で表したはりの釣り合い方程式、(39)～(41)は等式化された制約条件式、(42)、(43)は境界条件である。 $\bar{B}$, $\bar{S}$ ははりの曲げモーメントとせん断力に相当する無次元変数で、 $\bar{\eta}$, $\bar{\xi}$ がスラック変数である。また、 π_1 , π_2 , π_3 は固定端での軸力、曲げモーメント、せん断力の大きさを示す未知パラメータである。(27)～(30)で定義される新変数の導入により軸力 $\bar{p}$ を状態変数の1つとして取り扱えることおよび(38), (40), (41)式が設計変数の陽な関数で与えられることは問題の解析を容易にする上で大きな利点となっている。なお、この定式化によりたわみの2階の微係数である $\bar{u}$ が $\bar{A}$ と共に設計変数となることに注意する必要がある。これは質点モデルによる航空機の最適制御問題で加速度が制御変数になることに類似している。

ラグランジュ乗数 $\lambda, \rho, \sigma, \mu$ を用いると拡張された汎関数は、

$$\begin{aligned} \bar{J} &= \int_0^1 \bar{w} d\bar{x} + \int_0^1 \lambda^T (\dot{\bar{x}} - \phi) d\bar{x} + \int_0^1 \rho^T S d\bar{x} \\ &\quad + \sigma^T \omega_0 + \mu^T \psi_1 \\ &= \int_0^1 (\bar{w} - \lambda^T \phi + \rho^T S - \dot{\lambda}^T \bar{x}) d\bar{x} \\ &\quad + (-\lambda^T \bar{x} + \sigma^T \omega_0) + (\lambda^T \bar{x} + \mu^T \psi_1) \end{aligned} \quad (44)$$

と表すことができる。ただし、

$$\bar{x} = [\bar{w} \quad \bar{v} \quad \bar{B} \quad \bar{S} \quad \bar{p} \quad \bar{Z}]^T \quad (45)$$

$$\begin{aligned} \phi &= [\bar{v} \quad \bar{u} \quad \bar{S} \quad (-C_p \bar{x} \bar{A} \bar{v} + C_p \bar{p} \bar{u} + \bar{q}) \\ &\quad - \bar{x} \bar{A} \quad \bar{A}]^T \end{aligned} \quad (46)$$

$$\begin{aligned} S &= [\bar{B} - \bar{A} \bar{u} \quad \bar{A} - \bar{\xi}^2 \quad \left\{ (1 - K_p \frac{\bar{p}}{\bar{A}})^2 - (K_s \bar{u})^2 \right. \\ &\quad \left. - \bar{\eta}^2 \right\}]^T \end{aligned} \quad (47)$$

$$\omega = [\bar{B} - \pi_1 \quad \bar{S} - \pi_2 \quad \bar{p} - \pi_3]^T \quad (48)$$

$$\psi = [\bar{B} \quad \bar{S} \quad \bar{p} \quad \bar{Z} - 1]^T \quad (49)$$

$$\lambda = [\lambda_1(\bar{x}) \quad \lambda_2(\bar{x}) \quad \lambda_3(\bar{x}) \quad \lambda_4(\bar{x}) \quad \lambda_5(\bar{x}) \quad \lambda_6(\bar{x})]^T \quad (50)$$

$$\rho = [\rho_1(\bar{x}) \quad \rho_2(\bar{x}) \quad \rho_3(\bar{x})]^T \quad (51)$$

$$\sigma = [\sigma_1 \quad \sigma_2 \quad \sigma_3]^T \quad (52)$$

$$\mu = [\mu_1 \quad \mu_2 \quad \mu_3 \quad \mu_4]^T \quad (53)$$

である。最適性の条件は(44)に対する第1変分をとることにより、

$$\lambda - \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \phi}{\partial \bar{x}} \lambda - \frac{\partial S}{\partial \bar{x}} \rho = 0 \quad 0 \leq \bar{x} \leq 1 \quad (54)$$

$$\frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{u}} - \frac{\partial \phi}{\partial \bar{u}} \lambda + \frac{\partial S}{\partial \bar{u}} \rho = 0 \quad 0 \leq \bar{x} \leq 1 \quad (55)$$

$$\int_0^1 \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial \pi} - \frac{\partial \phi}{\partial \pi} \lambda + \frac{\partial S}{\partial \pi} \rho \right) d\bar{x} + \left(\frac{\partial \omega}{\partial \pi} \sigma \right)_0 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial \pi} \mu \right)_1$$

$$= 0 \quad (56)$$

$$\left(-\xi + \frac{\partial \omega}{\partial \bar{x}} \sigma \right)_0 = 0 \quad (57)$$

$$\left(\lambda + \frac{\partial \phi}{\partial \bar{x}} \mu \right)_1 = 0 \quad (58)$$

で与えられる。ただし、

$$u = [\bar{A} \quad \bar{u} \quad \bar{\xi} \quad \bar{\eta}]^T \quad (59)$$

$$\pi = [\pi_1 \quad \pi_2 \quad \pi_3]^T \quad (60)$$

$$\xi = [\lambda_3(\bar{x}) \quad \lambda_4(\bar{x}) \quad \lambda_5(\bar{x})]^T \quad (61)$$

$$z = [\bar{B} \quad \bar{S} \quad \bar{p}]^T \quad (62)$$

である。以上で片持ち回転はりに対するたわみ最小化問題を最適制御問題として定式化できた。最適解は(33)～(43)および(54)～(58)式からなる2点境界値問題を数値的に解くことにより得られる。

3. 数値計算結果とその考察

ロータ・ブレードの最適形状に対する横方向分布荷重や遠心力による軸方向荷重の影響を明らかにするため第1表に示す計算諸元を用いて数値解析を実施した。計算諸元は全備重量10トン程度の4枚ブレード・ロータ・ヘリコプタがホバリングする状態を想定し、ブレードの物性値にはチタン合金の数値を使用している。 q_c は横方向荷重分布を一樣とした場合の平均荷重の大きさである。なお、表中には参考のため無次元化量も掲げておいた。

横方向分布荷重は一樣および3次分布、軸力にはロータ回転数が150 rpmと250 rpmに相当する遠心力が負荷される場合を取り上げ、

1. 横方向分布荷重：一樣 軸力無

第1表 計算諸元と無次元量

記号	諸元
R	8.0 m
h	0.1 m
W	100.0 kgf (980.7 N)
ρ	459.6 kgf/m ³ (4.507 × 10 ³ kg/m ³)
E	1.1 × 10 ¹⁰ kgf/m ² (107.9 GPa)
σ_a	100.0 × 10 ³ kgf/m ² (980.7 MPa)
Ω	150 rpm, 250 rpm (2.50 s ⁻¹ , 4.17 s ⁻¹)
q_c	312.5 kgf/m (3.065 kN/m)
g	9.807 m/s ²
$\bar{x}$	$x/8.0$
$\bar{w}$	$w/50.35$
$\bar{A}$	360.6 A
$\bar{p}$	$p/2.013 \times 10^4$ (150 rpm), $p/5.591 \times 10^4$ (250 rpm)
$\bar{q}$	$q/312.5$
C_p	50.67 (150 rpm), 140.8 (250 rpm)
K_p	7.26×10^{-2} (150 rpm), 20.16×10^{-2} (250 rpm)
K_s	4.327

2. 横方向分布荷重：一様 軸力有 ($\Omega=150$, 250 rpm)
 3. 横方向分布荷重：3次分布 軸力有 ($\Omega=150$, 250 rpm)

の3ケースについて数値解析を行った。最適解の探索にはSCGRA法⁵⁾を使用した。ブレードはこれを100等分し、刻み幅は0.01とした。計算結果のグラフ化に際しては計算点をスプライン補間してスムージング処理している。

3.1 ケース1 問題の定式化の有効性と計算精度を検証するため、まず横方向分布荷重 $\bar{q}(\bar{x})$ が、

$$\bar{q}(\bar{x})=1 \quad (63)$$

で一定で、軸力の無い場合を取り上げる。この場合には解析解が存在し、

$$\bar{w}=\frac{\bar{x}^2}{12} \quad (64)$$

$$\bar{A}=3(1-\bar{x})^2 \quad (65)$$

(a) 最適断面面積分布

(b) たわみ分布

(c) $\bar{\sigma}$ 分布

(a) 最適断面面積分布

(b) 最適断面面積分布 (拡大)

(c) たわみ分布

(d) $\bar{\sigma}$ 分布 (e) $\bar{\sigma}^2$ 分布

第2図 解析解と数値解の比較 (一様分布横方向荷重、軸力無し)

第3図 最適解に対する軸力の影響 (一様分布横方向荷重)

$$\bar{u} = \frac{1}{6} \quad (66)$$

与えられる⁹⁾。解析解による最適断面積分布が固定端部に面積を集中させ、自由端では0となる2次曲線与えられ、たわみの2階の微係数 $\bar{u}$ が全スパンにわたって一定となることに注意をしてもらいたい。すなわち最適解はモーメント分布が面積分布と相似的となるように決定されている。

第2図の各図に数値計算結果と解析解の比較を示す。実線が解析解、一点鎖線が数値計算結果であるが、両者は $\bar{u}$ の自由端付近での挙動を除いてよく一致していると言って良い。

数値計算による $\bar{u}$ が自由端側付近で解析解と異なった挙動を示すのは、数値計算に使用したSCGRA法が最適解を一意的に決定するための必要条件として、

$$\det \left[\left(\frac{\partial S}{\partial u} \right)^T \cdot \frac{\partial S}{\partial u} \right] \neq 0 \quad 0 \leq \bar{x} \leq 1 \quad (67)$$

を要求しているため⁵⁾、 $\bar{A}$ が自由端で0となり得ず、代わりに(43)の境界条件を $\bar{u}$ が自由端で0となることで満足しているためと思われる。しかし、第2図に示すように数値計算結果の自由端での断面積は 1.521×10^{-2} とほぼ0に近く、また、評価関数 $\bar{I}$ の値は解析値 2.778×10^{-2} に対して計算値は 2.783×10^{-2} でありほぼ一致している。その意味で本解析法は工学上十分な精度で最適解を与えていると考えられる。

3.2 ケース2 横方向分布荷重が一様分布で、軸力を考慮した場合の数値計算結果を第3図の各図に示す。第3図(a)は $\bar{A}$ 、(c)は $\bar{w}$ 、(d)は $\bar{u}$ 、(e)は $\bar{q}^2$ の $\bar{x}$ に対する分布を示す。 $\bar{A}$ の最小断面付近の挙動を明らかにするため、(b)に拡大図を示す。各図とも図中の実線は $\Omega = 150$ rpm、一点鎖線は $\Omega = 250$ rpmの場合である。

これらの各図を軸力の無い第3図の各図と比較すると、遠心力で与えられる軸力の存在が最適解を大幅に変更していることが明らかとなる。最も大きな特徴は軸力のある場合の最適断面積分布が、軸力が無い場合

第4図 横方向荷重分布

(a) 最適断面積分布

(b) 最適断面積分布 (拡大)

(c) たわみ分布

(d) $\bar{u}$ 分布

(e) $\bar{q}^2$ 分布

第5図 最適解に対する軸力の影響 (3次分布横方向荷重)

のそれに比較して固定端側での断面積を減少する反面、自由端側での断面積を著しく増大させた分布をとることであり、また、はりの最小断面積が自由端でなく中間部に現れ、その位置がロータ回転数の増大に伴い固定端に移動していることである。最適断面積分布がこのようなロータ回転数に依存した複雑な挙動を示すのは自由端付近での断面積の集中による見かけの剛性の増大が固定端側での面積の増大による剛性の増大よりたわみの減少に効果的であることを示している。

第2の特徴は最適断面積分布が最小となる軸方向位置付近で $\bar{u}$ の符号が反転することである。これは最適断面積分布に対応するはりのたわみ曲線が $\bar{x}$ と共に一様に増加せず、 $\bar{u}$ が0になる位置で変曲点を持つ曲線と与えられることに対応している。

第3の特徴は最小断面積が応力の制約条件により決定されている点である。これは第3図(e)で明らかである。同図に示されているように $\bar{q}^2$ 分布は断面積の最も小さくなる $\bar{x}=0.3$ (150 rpm), 0.2 (250 rpm) 付近で0となっており制約条件がアクティブになっていることが分かる。またこの軸方向位置を境に $\bar{u}$ は符号を反転させている。

3.3 ケース3 ここでは横方向荷重の分布形状が最適解に及ぼす影響を調べるため、第4図に示される3次分布を用いて数値解析を行った。これは、

$$\bar{q} = \bar{x} + 9\bar{x}^2 - 10\bar{x}^3 \quad (68)$$

で与えられており、ほぼ現実のホバリング時の空力荷重分布に近い。軸力はケース2の場合と同様であり、第5図の各図中の実線が150 rpm、一点鎖線が250 rpmの解析結果である。

第5図の各図を第3図の各図と比較すると、横方向分布荷重を3次分布とした場合のたわみが一様分布の場合のそれに比して若干大きくなる点を除いては、横方向分布荷重が最適解に与える影響は殆ど認められない。すなわち、最適形状は横方向分布荷重の分布形状より軸力に強く支配されていることになる。この場合にも最小断面積を与える $\bar{x}$ は150 rpmの場合には0.3、250 rpmの場合は0.2付近にあり、この点で $\bar{u}$ はその符号を逆転し、応力に対する制約がアクティブになっている。なお、軸力のある場合の最適断面積分布が自由端付近に断面積を集中させる事実は慣性モーメントの大きさが重要な設計パラメータであるロータ・ブレードとして望ましい性質である。

4. 結 言

ロータ・ブレードを可変断面の片持ち回転はり (プレーン・テーパード・ビーム) でモデル化し、これが定常的な横方向分布荷重を受ける場合のたわみ最小化

問題を最適制御の手法を用いて数値的に解析した。

本研究により得られた知見は次の通りである。

1) 遠心力で与えられる軸力がはりの最適形状に及ぼす影響は極めて大きい。その意味でブレードの構造最適化には遠心力に対する考慮が不可欠である。

2) 最適断面積分布は断面積の分布を固定端部と自由端部に集中させ、中間部に最小断面積を持つくびれた分布となる。最小断面積をとる半径位置は遠心力に強く依存するが、固定端側の断面積の増大は曲げ剛性として、また自由端側での断面積の集中は遠心力の増大としてたわみの最小化に寄与している。

3) 最適断面積分布に対応するたわみ曲線は軸力の無い場合のように自由端に向かって単調に減少せず、最小断面積をとる半径位置で変曲点を持つたわみ曲線となる。

4) この事実は複合荷重を受ける片持ち回転はりの変位最小化問題がたわみの2階微係数 $\bar{u}$ を制御変数として、バン・バン制御的な挙動を示すことに対応している。

5) 本解析では制約条件としてブレードの全質量と応力レベルに対する制約条件を考慮したため、最小断面積は応力の制約条件のみにより決定されている。

参 考 文 献

- 1) Peters, D. A., Ko, T. and Rossow, M. P.: Design of Helicopter Rotor Blades for Desired Placement of Natural Frequencies, Proceedings of the 39th Annual Forum of the American Helicopter Society, St. Louis, Mo., May 1983, pp. 674-689.
- 2) Friedmann, P. P. and Shanthakumaran, P.: Aeroelastic Tailoring of Rotor Blades for Vibration Reduction in Forward Flight, AIAA Paper 83-0916, Proceedings of 24th AIAA/ASME/ASCE/AHS Structures, Structural Dynamics and Materials Conference, Lake Tahoe, Nev., May 1983.
- 3) Johnson, W.: A Comprehensive Analytical Model of Rotorcraft Aerodynamics and Dynamics, Part 2: User's Manual, NASA TM81183, 1980.
- 4) Vanderplaats, G. N.: CONMIN-A Fortran Program for Constrained Function Minimization, User's Manual, NASA TMX 62282, 1973.
- 5) Wu, A. K., et al.: Sequential Conjugate Gradient Restoration Algorithm for Optimal Control Problems with Nondifferential Constraints and General Boundary Conditions, Part 1, Optimal Control Application & Methods, 1 (1979), pp. 69-88.
- 6) 加藤寛一郎: スペースプレーン, 東京大学出版会, 東京, 1989.
- 7) 加藤寛一郎: 工学的最適制御, 東京大学出版会, 東京, 1988.
- 8) Bramwell, A. R. S.: Helicopter Dynamics, Edward Arnold, 1976.
- 9) Haftka, R. T. and Kamat, M. P.: Elements of Structural Optimization, Martinus Nijhoff Publishers, 1985.