飛行データからの空力特性推定 (第6報)*¹

重回帰分析の逐次近似計算

Estimation of Aerodynamic Characteristics from Flight-Test Data (6th Report)

Successive Approximation of Multiple Regression Analysis

小 林 修*²

Osamu KOBAYASHI

Key Words: Aircraft, Flight Testing, Aerodynamic Characteristics, Multiple Regression Analysis

Abstract

In this report, the techniques of successive approximation of the multiple regression analysis are discussed, and are applied to the estimation of aerodynamic derivatives from flight test data by the equation error method. One of the techniques converts a multi-variate problem into the combination of two-variate problems with respect to each explanatory variable. The other technique converts a multi-variate problem into a three-variate problem, which uses a variable and its estimation value as two explanatory variables. The former is useful for the simple iterative calculation, and the latter is convenient for understanding about the effect of multicollinearity. As the both techniques can be easily visualized, they are useful to understand the processes and the physical relations from the data to the estimated results through our eyes.

y_x, y_z, y_M : 機体 (角) 加速度 = (機体全体にかかる空気力 + 重力成分) / 機体慣性量

α : 迎え角

$\beta_{()}$: 重回帰の回帰係数

δ_e : 昇降舵角

ε : ノイズ

θ : ピッチ姿勢角または測定断面の傾角

$()_A, ()_B$: それぞれ対気値, 対地値

$(\hat{\quad})$: 推定値

$(\delta\quad)$: 微分値

$(\bar{\quad})$: 平均値

$(\quad)' = (\hat{\quad}) - (\bar{\quad})$

1. ま え が き

本論文は飛行データ, 解析法および空力特性推定値の間の物理的解釈を試みることを, およびそれに適した新しい推定法を構築することを主な目的としている. 一般に, 推定解析法が数学的に高度になるほどあるいは複雑な演算をコンピュータに依存するほど, 飛行データと推定結果との関係について物理的把握が困難となる傾向がある. このため, その推定解が不安定であったり, 物理的に納得できない推定解が得られた場合には, それに代わる手段として物理的に推算過程が理解し易い古典的な逐次近似解法の一つであるアナログ・マッチング法が用いられたりする. しかし, このアナログ・マッチング法は解析者の主観的な判断に基づいてモデルの応答時歴を飛行データに近付けていくものであり, 飛行データから素直に情報を得るというよりは, 解析者が想定する所望の結果を推定解に押し付ける側面を有し, 客観性に欠ける嫌いがある. このため, 情報抽出と物理的理解に役立つ別の簡易解析法が望まれる. この第6報では, その簡易解析法の候補

主 な 記 号

$a_{()}$: 単回帰の偏回帰係数

$d_{()}$: 説明変数の重回帰式の回帰係数

g : 重力加速度

n : 逐次近似回数

q : ピッチレート

$R_{()}$: 重相関係数

$r_{()}$: 相関係数

$S_{()}$: 分散・共分散

U_0 : 初期飛行速度

u : 飛行速度変動量

$X_{()}, Z_{()}, M_{()}$: 有次元空力 (微) 係数

$x_{()}$: 説明変数

y : 目的変数

*¹ 平成5年1月25日原稿受理

*² 川崎重工業(株)航空宇宙事業本部

として、方程式誤差法で用いられる重回帰分析に関して、その逐次近似計算法と可視化について報告する。

なお、本論文の逐次近似計算と名称が紛らわしいものに、Klein^{1,2)}による Stepwise Regression がある。これは最良回帰モデルの探索、即ち、目的変数を有効に推定できる最も個数の少ない説明変数の組み合わせを探索するための手法である。これに対して、本報告の逐次近似計算はモデル探索ではなく、重回帰分析そのものを単回帰分析の繰り返しでもって行おうとするものである。

2. 例題航空機モデルと機体応答データ

本報告において数値計算例として用いる航空機運動は、(1)～(4)式に示す縦の線形微小擾乱運動方程式で表されるモデルである。

$$\dot{u}_B + g\theta = X_0 + X_u u_A + X_\alpha \alpha_A + X_{\dot{\alpha}} \dot{\alpha}_A + X_q q_A + X_{\delta_e} \delta_e \quad (1)$$

$$U_0(\dot{\alpha}_B - q_B) = Z_0 + Z_u u_A + Z_\alpha \alpha_A + Z_{\dot{\alpha}} \dot{\alpha}_A + Z_q q_A + Z_{\delta_e} \delta_e \quad (2)$$

$$\dot{q}_B = M_0 + M_u u_A + M_\alpha \alpha_A + M_{\dot{\alpha}} \dot{\alpha}_A + M_q q_A + M_{\delta_e} \delta_e \quad (3)$$

$$\dot{\theta} = q_B \quad (4)$$

添え字 A と B は、それぞれ対気と対地の値を示す変数を表す (対気値 = 対地値 - ガスト値)。

方程式誤差法³⁾では、(1)～(3)式の左辺を次のようにそれぞれ一つの変数

$$\left. \begin{aligned} y_X &\equiv \dot{u}_B + g\theta \\ y_Z &\equiv U_0(\dot{\alpha}_B - q_B) \\ y_M &\equiv \dot{q}_B \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

に置き換えた次式を回帰モデルにし、重回帰分析を用いて解析する。

$$y_X = X_0 + X_u u_A + X_\alpha \alpha_A + X_{\dot{\alpha}} \dot{\alpha}_A + X_q q_A + X_{\delta_e} \delta_e \quad (6)$$

$$y_Z = Z_0 + Z_u u_A + Z_\alpha \alpha_A + Z_{\dot{\alpha}} \dot{\alpha}_A + Z_q q_A + Z_{\delta_e} \delta_e \quad (7)$$

$$y_M = M_0 + M_u u_A + M_\alpha \alpha_A + M_{\dot{\alpha}} \dot{\alpha}_A + M_q q_A + M_{\delta_e} \delta_e \quad (8)$$

y_X, y_Z, y_M が目的変数で、右辺の各変数が説明変数である。なお、本論文で扱う各種ノイズ (あるいは誤差) ε_i は、平均値ゼロの正規分布をし、他変数および互いに独立であるとしている。

解析に供する応答データを第1図に示す。この応答は第1報³⁾で使用したデータと同じものであり、第1表に示す特性値を有する航空機運動をガストがない状態で計算したものである。従って、この数値例では対気値と対地値が等しいので、添え字 A と B は省略する。操舵入力としては、周期2秒の正弦波の昇降舵

第1図 例題航空機の機体応答データ

第1表 例題航空機の特性値

$U_0 = 830$ (ft/s) [253 (m/s)]
$g = 32.15$ (ft/s ²) [9.80 (m/s ²)]
$X_0 = Z_0 = M_0 = 0, X_u = -0.00643$ (1/s)
$X_\alpha = 21.83$ (ft/s ²) [6.654 (m/s ²)]
$X_{\dot{\alpha}} = X_q = X_{\delta_e} = 0, Z_u = -0.0941$ (1/s)
$Z_\alpha = -517.9$ (ft/s ²) [-157.9 (m/s ²)]
$Z_{\dot{\alpha}} = 11.95$ (ft/s) [3.642 (m/s)]
$Z_q = -9.98$ (ft/s) [3.042 (m/s)]
$Z_{\delta_e} = -32.7$ (ft/s ²) [-9.967 (m/s ²)]
$M_u = -0.0002$ (1/ft · s) [-0.0006562 (1/m · s)]
$M_\alpha = -1$ (1/s ²), $M_{\dot{\alpha}} = -0.2$ (1/s)
$M_q = -0.7$ (1/s), $M_{\delta_e} = -2$ (1/s ²)
計算刻み = 0.01 (s), データ出力刻み = 0.1 (s)

入力を2サイクル与えたのち、舵角を4秒間ゼロに固定している。また、各変数データには測定ノイズも存在しないものとしている。

3. 重回帰分析の多変量逐次計算法

本節ではまず、本論文の第1報³⁾において多重共線性と偏回帰係数の意味を説明するために導入した「回帰平面と測定断面による図式化」を用いて、説明変数が2個の場合についてではあるが、重回帰分析が単回帰分析を全説明変数に対して繰り返し適用することによって行えることを示す。次いで、多説明変数時の逐次近似計算手順とその計算過程の可視化について述べる。その後、実質的に有効な説明変数が4個となる前述の例題航空機の応答データを用いた数値計算例によって、この逐次近似計算が説明変数3個以上でも成立することを示す。なお、第4節で述べるもう一つの逐次近似計算と区別するため、本節の計算法を重回帰分析の「多変量逐次計算」と称することにする。

3.1 回帰平面と測定断面³⁾ 「回帰平面と測定断面」の概念を示す第2図を参考にしながら、当該概念の概略を述べる。この図は回帰モデル

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 \quad (9)$$

が示す多次元回帰平面（ここでは2次元平面）を、説明変数 x_i と目的変数 y に対して原点の平行移動

$$\left. \begin{aligned} x_i' &= x_i - \bar{x}_i \\ y' &= y - \bar{y} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

を施した x_i' と y' による直交座標系で示したものである。即ち、座標の原点 O はデータの中心 $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{y})$ に一致し、回帰平面(9)式と切片 β_0 は次のようになる。

$$y' = \beta_1 x_1' + \beta_2 x_2' \quad (11)$$

$$\beta_0 = \bar{y} - \beta_1 \bar{x}_1 - \beta_2 \bar{x}_2 \quad (12)$$

第2図において重回帰分析で求めるべき回帰平面は平面 $O-B-C$ であり、その回帰平面と各座標平面との交線 ($O-B$, $O-C$) の勾配が偏回帰係数 (β_1, β_2) となる。第2図bにおける平面 $O-D-F$ と $O-E-G$ がそれぞれ説明変数 x_1' と x_2' の測定断面である。 x_1' と x_2' に関する測定断面がそれぞれ x_1' 軸および x_2' 軸となす角度 θ_1 と θ_2 は次に示す関係を有する。

$$\left. \begin{aligned} \tan \theta_1 &= S_{12}/S_{11} = r_{12}\sqrt{S_{22}/S_{11}} \\ \tan \theta_2 &= S_{12}/S_{22} = r_{12}\sqrt{S_{11}/S_{22}} \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

但し、 S_{ij} は x_i' と x_j' との共分散 ($i=j$ のときは分散)、 S_{1y} は x_1' と y' との共分散、および r_{ij} は x_i' と x_j' との相関係数である。

x_1' データと x_2' データとの間に相関があるということは、例えば x_1' データとしてある値が測定されるときは同時に、 x_2' データとしてその x_1' に上記の $\tan \theta_1$ を乗じた値が統計的に測定されていることを意味する。測定断面はこのような各説明変数の測定条件（ある説明変数が増加するとき、それに伴って同時に

(a) $r_{x_1, x_2} = 0$

(b) $0 < |r_{x_1, x_2}| < 1$

(c) $|r_{x_1, x_2}| = 1$

第2図 回帰平面と測定断面（説明変数2個の場合）

変化する他説明変数の変化の程度)を表す断面である。従って、ある説明変数 x_i' データに対応する目的変数 y' データは、 x_i' の測定断面で切られた回帰平面上の直線（例えば、第2図bの $O-D$, $O-E$ ）まわりの値と

なる。説明変数間の相関がゼロである場合の測定断面は、第2図aのように、それぞれ $y'-x_1'$ 座標平面と $y'-x_2'$ 座標平面とに一致する。また、説明変数間の相関係数の絶対値が1になると、第2図cのように、二つの測定断面が互いに一致して一つの断面となる。第2図bのように二つの直線 O-D と O-E に関するデータがある場合は回帰平面を推定できるが、第2図cの場合は測定断面が一つだけであるので、回帰平面を定めることができない。即ち、回帰平面は不定となり、完全な多重共線性が発生している状態に相当する。

偏回帰係数 β_1 と β_2 は回帰平面とそれぞれの座標平面との交線 (矢印 O-B, O-C) の勾配であり、その推定値は次の関係式で表される。

$$\left. \begin{aligned} \hat{\beta}_1 &= (S_{22}S_{1y} - S_{2y}S_{12})/\Delta \\ \hat{\beta}_2 &= (S_{11}S_{2y} - S_{1y}S_{12})/\Delta \\ \text{但し, } \Delta &= S_{11}S_{22} - (S_{12})^2 \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

また、各説明変数データ毎に、縦軸を目的変数にし横軸を説明変数にして測定データをプロットしたものは、第2図における O-D と O-E まわりの測定データをそれぞれ $x_1'-y'$ と $x_2'-y'$ の座標平面に投影したものに等しい。この投影された2変量データに関する回帰モデル式を

$$y' = a_1 x_1', \quad y' = a_2 x_2' \quad (15)$$

と表すと、それらの偏回帰係数 a_i の推定値は単回帰分析によって得られる次式となる。

$$\hat{a}_1 = S_{1y}/S_{11}, \quad \hat{a}_2 = S_{2y}/S_{22} \quad (16)$$

(注記：第1報³⁾における測定断面に関する記述では、本報告の(10)式に示す変数変換を明確に実施しなかったために、結論は変わらないものの、不明解な記述部分が生じている。このため、この場を借りて第1報の第5節の記述内容を次のように訂正する。①上記の変数変換を初めに追加し、文中の変数をこの変換後の変数に置き換える。②第3図を本報告の第2図と差し替える。③(27)～(29)式と(32)式中の β_0 を削除またはゼロとする。)

3.2 多変量逐次計算法 回帰平面と測定断面の第2図bを用いて、重回帰分析が単回帰分析による逐次近似でもって計算できることを説明する。各説明変数に関する単回帰によって直線 O-H と O-I の勾配値が得られるが、これらの直線によって定まる平面 O-H-I は求めるべき回帰平面 O-B-C とは一致しない。しかし、直線 O-H と O-I は直線 O-D と O-E をそれぞれの座標平面へ投影したものであるから、各説明変数に関する単回帰は測定断面での回帰を示している。即ち、回帰平面の推定誤差が最小となるときは、測定断面での回帰誤差も最小となり、同時にそれを各座標平面に投影したデータの各説明変数に関する単回帰誤

差も最小となる。以下、この各説明変数に関する単回帰分析を繰り返すことによって回帰平面(回帰モデル)の逐次近似が可能であることを示す。但し、長さ O-J と O-K はともに1であるとする。

まず、 x_1' に関する単回帰分析から a_1 の推定値を求め、回帰平面の第1次近似

$$y^{(1)} = \hat{a}_1 x_1' \quad (17)$$

を得る。この近似平面は O 点と D 点を含むけれども、E 点とは y' 方向に $(\hat{a}_1 \tan \theta_2 - a_2)$ だけ離れている(第3図a参照)。従って、今度は x_2' に関する勾配を考慮することによって、この近似平面が E 点を含むように補正する。即ち、 x_2' の測定断面を $x_2'-y'$ 平面に投影して得られる近似平面の近似誤差 $(y' - y^{(1)})$ を今度は x_2' に関して単回帰分析することによって得られる勾配超過量の符号を逆にすれば、その補正勾配として $(\hat{a}_2 - \hat{a}_1 \tan \theta_2)$ が得られる。この補正勾配を反映した次式を第2近似平面とする。

(a) 第1近似

(b) 第2近似

第3図 回帰平面への逐次近似

$$y^{(2)} = \bar{a}_1 x_1' + (\bar{a}_2 - \bar{a}_1 \tan \theta_2) x_2' \quad (18)$$

この第2近似平面は今度はE点を通過するが、逆にD点から外れる(第3図b参照)。このため、次のステップではこの近似平面がD点を通るように x_1' の勾配を補正する。即ち、 $(y' - y^{(2)})$ の x_1' に関する単回帰から得られる勾配値をその補正值として反映すると、第3次近似平面として次式が得られる。

$$y^{(3)} = \{\bar{a}_1 - (\bar{a}_2 - \bar{a}_1 \tan \theta_2) \tan \theta_1\} x_1' + (\bar{a}_2 - \bar{a}_1 \tan \theta_2) x_2' \quad (19)$$

次に、 $(y' - y^{(3)})$ を用いて x_2' に関して同様の操作を行うと、次の第4次近似の回帰平面が得られる。

$$y^{(4)} = \{\bar{a}_1 - (\bar{a}_2 - \bar{a}_1 \tan \theta_2) \tan \theta_1\} x_1' + \{\bar{a}_2 - \bar{a}_1 \tan \theta_2 + (\bar{a}_2 - \bar{a}_1 \tan \theta_2) \tan \theta_1 \tan \theta_2\} x_2' \quad (20)$$

以下同様の操作を繰り返していくと近似回帰平面の式は二項級数の形となり、結局、次式が得られる。

$$y' = \beta_1' x_1' + \beta_2' x_2' \quad (21)$$

但し、

$$\left. \begin{aligned} \beta_1' &= \bar{a}_1 - \tan \theta_1 (\bar{a}_2 - \bar{a}_1 \tan \theta_2) \Omega \\ \beta_2' &= (\bar{a}_2 - \bar{a}_1 \tan \theta_2) \Omega \\ \Omega &= 1 + \tan \theta_1 \tan \theta_2 + (\tan \theta_1 \tan \theta_2)^2 + \cdots \\ &= 1/(1 - \tan \theta_1 \tan \theta_2) \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

(22)式に(13)式と(16)式を代入して整理すると、

$$\left. \begin{aligned} \beta_1' &= (S_{1y} S_{22} - S_{2y} S_{12}) / \{S_{11} S_{22} - (S_{12})^2\} \\ \beta_2' &= (S_{2y} S_{11} - S_{1y} S_{12}) / \{S_{11} S_{22} - (S_{12})^2\} \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

となり、それぞれ(14)式に示す回帰平面の偏回帰係数の推定値 $\hat{\beta}_1$ と $\hat{\beta}_2$ に一致する。即ち、上記の繰り返し計算は偏回帰係数を求める逐次近似計算になる。

3.3 多変量逐次計算の手順と計算例 多変量逐次計算は上述のように、目的変数データ y から近似回帰平面 $y^{(i)}$ を差し引いた回帰残差がゼロ勾配にならないある説明変数に関して、単回帰分析により補正勾配値を求め、その説明変数に関する回帰残差の勾配がゼロとなるように近似回帰平面を順次補正していくものである。これらは勾配(偏回帰係数)のみの補正の繰返しであるので、下記のように、(10)式による変数変換を実施しない手順が成立する。

未知の回帰係数からなる回帰モデル

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots \quad (24)$$

に対して、任意の近似回帰モデル

$$y^{(0)} = \beta_1^{(0)} x_1 + \beta_2^{(0)} x_2 + \cdots \quad (25)$$

を初期設定すると、その回帰残差 $\varepsilon^{(0)}$ は

$$\begin{aligned} \varepsilon^{(0)} &= y - y^{(0)} \\ &= y - \beta_1^{(0)} x_1 - \beta_2^{(0)} x_2 - \cdots \end{aligned} \quad (26)$$

となる。この $\varepsilon^{(0)}$ を目的変数とすると次のような新たな

$$y^{(n)} = \sum \beta_i^{(n)} x_i, \quad (i=1, 2, \dots)$$

$$\beta_i^{(n+1)} = \beta_i^{(n)} + \hat{a}_i^{(n)}$$

$$\beta_0^{(n+1)} = \bar{y} - \sum \beta_i^{(n+1)} \bar{x}_i$$

第4図 回帰残差図

な回帰モデルが得られる。

$$\varepsilon^{(0)} = \beta_0^{(0)} + \Delta \beta_1^{(0)} x_1 + \Delta \beta_2^{(0)} x_2 + \cdots \quad (27)$$

$\Delta \beta_i^{(0)}$ は実質 $(\beta_i - \beta_i^{(0)})$ を示す偏回帰係数であり、この値を推定すれば次式でもって β_i が推定できることになる。

$$\hat{\beta}_i = \beta_i^{(0)} + \Delta \beta_i^{(0)} \quad (i=1, 2, \dots) \quad (28)$$

しかし、多変量逐次計算では $\Delta \beta_i^{(0)}$ の代わりに、ある説明変数に関する単回帰の偏回帰係数 $a_i^{(0)}$ を用いて(第4図a参照)、偏回帰係数の設定値の修正

$$\beta_i^{(0)} + \hat{a}_i^{(0)} \Rightarrow \beta_i^{(1)} \quad (29)$$

を行う。その後、同様にして、近似回帰モデルの偏回帰係数の設定値の修正を繰り返す。その結果、最終的な回帰残差の図は第4図bのようになる。即ち、勾配(偏回帰係数)はゼロに収束し、その説明変数に依存しない回帰残差の平均値が β_0 の推定値になる。

なお、説明変数が3個以上の場合には、補正を施す説明変数としてどの変数を選択していくのが効率的であるかという問題があるが、著者は、勾配(偏回帰係数)値を相対的に精度良く求め易いという観点から、回帰残差(目的変数)との相関係数の絶対値が最も大きい説明変数を選んでいく。

以上述べた計算過程は単回帰分析の繰返しであるから、回帰残差図(平面図)による可視化が容易であり、計算過程の変化を視覚的に知ることができる。

以下、第2節の例題航空機の応答データを用いた縦揺れモーメントに関する数値計算例を示す。但し、ここでは、多重共線性の発生を避けるために説明変数から変数 α を削減した場合の計算例を示す。なお、逐次近似計算と多重共線性との関係については第5節で述べる。

第2表 多変量逐次計算の数値結果(α 削減ケース)

空力微係数 (予想値)		M_u^* (-0.00018)	M_α^* (-0.8734)	M_q^* (-0.9004)	$M_{\delta e}^*$ (-1.992)
初期値 =0	$n=50$	-0.00015	-0.8776	-0.8982	-1.992
	$n=100$	-0.00017	-0.8755	-0.8987	-1.993
初期値 =10	$n=100$	-0.00240	-0.6799	-0.9469	-2.046
	$n=200$	-0.00022	-0.8716	-0.8997	-1.994
参 考	説明変数	u	α	q	δ_e
	標準偏差 σ	6.701	0.1018	0.1905	0.2516
	σM_i^*	-0.0012	-0.0889	-0.1715	-0.5012

(n: 逐次近似計算回数)

(a) 初期値=0

(b) 初期値=10

第5図 多変量逐次計算の近似度変化(α 削減ケース)

第3表 多変量逐次計算の数値過程(第2表, 初期値=0のケース)

空力微係数 (予想値)		M_u^* (-0.00018)	M_α^* (-0.8734)	M_q^* (-0.9004)	$M_{\delta e}^*$ (-1.992)
$n=0$	r_i	-0.0457	-0.6303	0.0006	-0.9054
	β_i	0	0	0	0
	Δa_i	-0.00348	-3.160	0.00156	-1.836
$n=1$	r_i	-0.4975	-0.7608	-0.8656	0
	β_i	0	0	0	-1.836
	Δa_i	-0.0161	-1.619	0.9839	0
$n=2$	r_i	-0.4708	-0.8991	0	-0.7026
	β_i	0	0	-0.9839	-1.836
	Δa_i	-0.0076	-0.9583	0	-0.303
$n=3$	r_i	0.3547	0	0.7368	-0.9079
	β_i	0	-0.9583	-0.9839	-1.836
	Δa_i	0.0025	0	0.1836	-0.171
$n=4$	r_i	0.4503	0.7352	0.8773	0
	β_i	0	-0.9583	-0.9839	-2.007
	Δa_i	0.0013	0.1438	0.0916	0
$n=5$	r_i	0.3856	0.8762	0	0.7430
	β_i	0	-0.9583	-0.8923	-2.007
	Δa_i	0.0006	0.0822	0	0.028

(下線: 絶対値最大の相関係数)

第6図 多変量逐次計算の回帰残差パターンの変化 (第3表に対応)

各微係数の初期値を0と10にした場合の計算結果を第2表に示す。逐次計算回数を十分に行えば、その解は表中に示す説明変数削減時の予想値³⁾に収束していくことがわかる(計算に用いている応答データはノイズを一切含んでいないので、この予想値は説明変数削減時における真の値と等しい³⁾)。第5図aとbはそれぞれ初期値が0と10である場合の、逐次近似回数に対する各推定値の近似度(推定値/予想値)の変化をプロットしたものである。その特色の一つは、微係数の初期値が真の値から大きくずれると全体に収束が遅くなることである。もう一つの特色は、各説明変数が発生させる空気力の大きさは説明変数の標準偏差 σ と対応する空力微係数値との積でもって表すことができる(第2表の参考欄参照)が、この空気力が大きい変数の微係数ほど早く収束し、空気力の小さい微係数の収束は後回しになることである。

第3表は初期値が0の場合における、逐次近似回数が5回までの、目的変数 y と各説明変数 x_i との相関係数 r_i 、そのときの各空力微係数の近似推定値 β_i 、および回帰残差の単回帰による偏回帰係数 Δa_i の値

を示す。また、第3表に対応する回帰残差の変化を第6図の回帰残差図に示す。これらから空力微係数の逐次推定値が予想値に次第に近づく計算過程をモニターすることができる。なお、第6図は座標軸の目盛りを固定してプロットしたものであるが、近似精度が高くなる(即ち、回帰残差が小さくなる)につれて目的変数目盛りの倍率を増大させていけば、所望の数値桁までモニターが可能となる。

4. 重回帰分析の3変量化表示

前述の多変量逐次計算の説明において用いた「回帰平面と測定断面の図式化」は説明変数が2個の場合のものであり、説明変数が3個以上の一般的な場合に対しても同様に説明変数2個による図式化(即ち、目的変数を含めた3変量による図式化)ができることが望まれる。そのためには、多説明変数のうちの任意の1個の説明変数 x_i を選んで図式化を行うとすると、残りの全部の説明変数の効果を集約し代表する別の1個の変数(以後、この変数を「3変量化変数」と称する)を見出して、これをもう一つの説明変数にする必要が

ある。

これが実現すれば、多説明変数時の立体的な図式化とともに、1個の説明変数毎にその空力微係数を逐次近似計算することも可能となる。以後、この表示法および逐次近似計算を、それぞれ「3変量化表示」および「3変量化逐次計算」と称することにする。

4.1 3変量化変数 この3変量化変数を見出す糸口は、第2図に示す座標軸からの測定断面の傾き θ_i が2個の説明変数間の相関と多重共線性の程度を表していることにある。一方、第1報³⁾で述べたように、多説明変数時の多重共線性の強弱は説明変数 x_i と「 x_i を除く残りの説明変数を用いて推定した $\hat{x}_i$ 」との重相関係数の大きさによって示される。従って、この $\hat{x}_i$ が3変量化変数の有力候補となる。以下、説明変数が3個の場合を例にとって、この説明変数の推定値が3変量化変数となることを説明する。但し、ここでも原点をデータ中心に平行移動する(10)式による y' と $x_i'(i=1,2,3)$ を用いる。なお、 $S_{(i)(i)}$ は $\hat{x}_i$ の分散であり、 $S_{j(i)}$ と $S_{(i)y}$ はそれぞれ x_j' と $\hat{x}_i$ 、および $\hat{x}_i$ と y' に関する共分散である。

説明変数が3個の場合の回帰モデル式

$$y' = \beta_1 x_1' + \beta_2 x_2' + \beta_3 x_3' \quad (30)$$

における β_i の推定値は次に示す重回帰分析の正規方程式で表される^{3,4)}。

$$\begin{bmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \\ \hat{\beta}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} S_{1y} \\ S_{2y} \\ S_{3y} \end{bmatrix} \quad (31)$$

従って、 $\hat{\beta}_1$ は次のようになる。

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\begin{pmatrix} S_{1y}S_{22}S_{33} + S_{2y}S_{13}S_{23} + S_{3y}S_{12}S_{23} \\ -S_{1y}(S_{23})^2 - S_{2y}S_{12}S_{33} - S_{3y}S_{13}S_{22} \\ S_{11}S_{22}S_{33} + 2S_{12}S_{13}S_{23} \\ -S_{11}(S_{23})^2 - S_{22}(S_{13})^2 - S_{33}(S_{12})^2 \end{pmatrix}}{\quad} \quad (32)$$

一方、 x_1' に関する3変量化変数として次式で表される $\hat{x}_1'$ を選択すると、

$$\hat{x}_1' = C_2 x_2' + C_3 x_3' \quad (33)$$

但し、

$$\begin{aligned} C_2 &= (S_{12}S_{33} - S_{13}S_{23}) / \{S_{22}S_{33} - (S_{23})^2\} \\ C_3 &= (S_{13}S_{22} - S_{12}S_{23}) / \{S_{22}S_{33} - (S_{23})^2\} \end{aligned} \quad (34)$$

x_1' とその3変量化変数を用いた回帰モデル式

$$y' = \beta'_1 x_1' + \beta'_2 \hat{x}_1' \quad (35)$$

の偏回帰係数 β'_1 は次式で表される。

$$\beta'_1 = \frac{S_{1y}S_{(1)(1)} - S_{(1)y}S_{1(1)}}{S_{11}S_{(1)(1)} - (S_{1(1)})^2} \quad (36)$$

即ち、この(36)式の β'_1 が(32)式の $\hat{\beta}_1$ に等しいことを証明すれば、3変量化変数の上記の選択が正しいことを示すことになる。

まず、3変量化変数を含む分散・共分散は、(33)式

第7図 3変量化表示による回帰平面と測定断面

を用いて次のように表される。但し、 x_{ij}' は変数 x_i' の N 個のデータのうち j 番目のデータであることを示す。

$$\begin{aligned} S_{(1)(1)} &= \sum_{j=1}^N (\hat{x}_{1j}' - \bar{\hat{x}}_1')^2 = \sum_{j=1}^N (C_2 x_{2j}' + C_3 x_{3j}')^2 \\ &= C_2^2 S_{22} + 2C_2 C_3 S_{23} + C_3^2 S_{33} \\ \text{同様に、} \\ S_{(1)y} &= C_2 S_{2y} + C_3 S_{3y} \\ S_{1(1)} &= C_2 S_{12} + C_3 S_{13} \end{aligned} \quad (37)$$

これらに(34)式を代入すると、次式が得られる。

$$\begin{aligned} S_{(1)(1)} &= \{S_{22}(S_{13})^2 + S_{33}(S_{12})^2 - 2S_{12}S_{13}S_{23}\} / \Delta' \\ S_{(1)y} &= \{(S_{12}S_{33} - S_{13}S_{23})S_{2y} + (S_{13}S_{22} - S_{12}S_{23})S_{3y}\} / \Delta' \\ S_{1(1)} &= \{S_{22}(S_{13})^2 + S_{33}(S_{12})^2 - 2S_{12}S_{13}S_{23}\} / \Delta' = S_{(1)(1)} \\ \text{但し、} \Delta' &= S_{22}S_{33} - (S_{23})^2 \end{aligned} \quad (38)$$

さらに、これらを(36)式に代入して整理すると、

$$\beta'_1 = \frac{\begin{bmatrix} S_{1y}S_{22}S_{33} + S_{2y}S_{13}S_{23} + S_{3y}S_{12}S_{23} \\ -S_{1y}(S_{23})^2 - S_{2y}S_{12}S_{33} - S_{3y}S_{13}S_{22} \\ S_{11}S_{22}S_{33} + 2S_{12}S_{13}S_{23} \\ -S_{11}(S_{23})^2 - S_{22}(S_{13})^2 - S_{33}(S_{12})^2 \end{bmatrix}}{\quad} \quad (39)$$

となり、 β'_1 が重回帰分析による β_1 の推定値(32)式と同じになることがわかる。

4.2 3変量化表示とその逐次計算 説明変数 x_1' に関して3変量化変数を用いた場合の「回帰平面と測定断面による図式化」は、第7図に示すように、第2図の x_1' と x_2' をそれぞれ x_i' と $\hat{x}_i'$ に置き換えたものとなる(但し、 $\hat{x}_i'$ に関する回帰係数は添え字 (i) を付けて表示している)。そして、3変量化逐次計算の証明および手順に関しては、説明変数が2個であるとい

う条件が付く以外は、すべて第3節の記述内容がそのまま適用される。

5. 逐次近似と多重共線性

多重共線性が存在する場合の逐次近似計算における特色について述べる。第4表は5個の説明変数を削減しないで、即ち、少なくとも運動方程式拘束の多重共線性³⁾が発生する状態で計算した結果である。第4表からわかるように多重共線性が存在する場合には、計算結果が真の値に収束しないだけでなく、微係数の初期値の設定によって異なる解が得られる。初期値によっては尤もらしい値に収束することがあるので多重共線性の有無をチェックするために、大きく異なる初期

値のケースについても計算してみることが望ましい。多重共線性については3変量化表示による検討が有効である。第5表は各説明変数に関して他の4個の説明変数を用いた回帰モデル(重回帰式)

$$\hat{x}_i = d_0 + \sum_j d_j x_j \quad (j=1, 2, \dots, i-1, i+1, \dots) \quad (40)$$

の回帰係数の計算結果である(x_j を目的変数にした多変量逐次計算による $n=200$ 回目の値)。また、第6表はそれらの推定値を用いて求めた測定断面の傾角 θ_i と $\theta_{(i)}$ および重相関係数(x_i と $\hat{x}_i$ との相関係数)の値を示す

運動方程式拘束による説明変数間の完全な従属関係が存在するデータであるから、「 $90-(\theta_i + \theta_{(i)})$ 」はす

第4表 多変量逐次計算の数値結果(説明変数削減なし)

空力微係数 (真の値)		M_u (-0.0002)	M_α (-1)	$M_{\dot{\alpha}}$ (-0.2)	M_q (-0.7)	M_{δ_e} (-2)
初期値 =0	$n=50$	-0.00016	-0.8809	-0.0061	-0.8923	-1.993
	$n=100$	-0.00018	-0.8795	-0.0065	-0.8923	-1.993
初期値 =10	$n=100$	0.00101	5.1383	9.5108	-10.430	-1.610
	$n=200$	0.00092	5.1448	9.5086	-10.431	-1.613

第5表 説明変数の推定結果 ($n=200$)

(a) u の推定結果

回帰係数	d_0	d_α	$d_{\dot{\alpha}}$	d_q	d_{δ_e}
初期値=0	-11.50	60.23	-14.66	2.181	-18.84
初期値=10	-11.48	53.86	-24.57	12.142	-19.21

(b) α の推定結果

回帰係数	d_0	d_u	$d_{\dot{\alpha}}$	d_q	d_{δ_e}
初期値=0	0.0705	0.00293	-1.147	1.201	0.0253
初期値=10	0.3308	0.01439	0.4409	-0.1932	0.3613

(c) $\dot{\alpha}$ の推定結果

回帰係数	d_0	d_u	d_α	d_q	d_{δ_e}
初期値=0	-0.00186	-0.00011	-0.6331	1.002	-0.0400
初期値=10	-0.00285	-0.00016	-0.6297	1.001	-0.0410

(d) q の推定結果

回帰係数	d_0	d_u	d_α	$d_{\dot{\alpha}}$	d_{δ_e}
初期値=0	-0.00065	0.00011	0.6316	0.9976	0.0399
初期値=10	-0.00064	0.00011	0.6316	0.9976	0.0399

(e) δ_e の推定結果

回帰係数	d_0	d_u	d_α	$d_{\dot{\alpha}}$	d_q
初期値=0	-0.6169	-0.02697	1.215	-2.011	1.330
初期値=10	-0.3879	-0.01802	-5.053	-10.451	10.034

第6表 3変量化表示による測定断面の傾角と説明変数の重回関係数

説明変数	u	α	$\dot{\alpha}$	q	δ_e
初期値					
θ_i (deg)	37.03	43.99	45.00	45.00	37.21
$\theta_{(n)}$ (deg)	45.01	45.68	45.00	45.00	45.42
$n=0$					
$90-(\theta_i+\theta_{(n)})$	7.96	0.33	0.00	0.00	7.37
重回関係数	0.8687	0.9942	1.0000	1.0000	0.8777
初期値					
θ_i (deg)	37.03	39.21	45.00	45.00	40.29
$\theta_{(n)}$ (deg)	45.03	42.22	45.00	45.00	47.11
$n=10$					
$90-(\theta_i+\theta_{(n)})$	7.94	8.57	0.00	0.00	2.60
重回関係数	0.8690	0.8604	1.0000	1.0000	0.9552

第8図 $\dot{\alpha}$ と q に関する回帰残差パターンの比較 (第6図に対応)

べての変数についてゼロ (重回関係数 = 1 に対応) になる筈であるが、第6表を見ると、 $\dot{\alpha}$ と q 以外はそのような結果になっていない。この理由は第5表の回帰係数の推定結果から知ることができる。 $\dot{\alpha}$ と q に関しては初期値が異なってもほぼ等しい値に収束する。これは多重共線性が発生していないことを、即ち、説明変数に用いられた4個の変数、 (u, α, q, δ_e) または $(u, \alpha, \dot{\alpha}, \delta_e)$ の間には強い従属関係が存在しないことを示す。一方、 u, α および δ_e に関しては、初期値が異なると収束解も異なる。従って、その推定において多重共線性が発生していることを、即ち、それぞれの4個の説明変数間に強い従属関係が存在していることを示す。これらの4個の説明変数の組み合わせ

せには、いずれも $\dot{\alpha}$ と q の2変数を含む。総合判断として、このデータには運動方程式拘束による従属関係の他に、 $\dot{\alpha}$ と q の2変数間の強い相関関係による従属関係がさらに存在しており、マヌーバによる多重共線性³⁾を発生させていることが、そして、この2変数のうちのいずれかを説明変数から削除して解析すべきであることがわかる。2変数間の強い相関関係は回帰残差図において両者の回帰残差パターンが相似形であることから容易に知ることができる (第8図参照)。

6. あとがき

方程式誤差法の解析手法として用いられる重回帰分析が「単回帰分析による逐次近似計算」でもって解析できることを、「回帰平面と測定断面による図示化」と数値計算例を用いて示した。提案する逐次近似計算には2種類のものがある。一つは多説明変数をそのまま用いて、それぞれの単回帰分析を逐次実施していく「多変量逐次計算法」である。もう一つは、多説明変数を一つの任意の説明変数とその推定値 (残りの説明変数を用いて推定したもの) の2説明変数に置き換える「3変量化表示 (目的変数1個 + 説明変数2個)」に基づく「3変量化逐次計算法」である。

「3変量化表示」は、多重共線性が説明変数間の従属関係に依存し、その従属関係の強弱が説明変数とその推定値との相関関係 (説明変数の重回関係数) で表示されることに対応するものである。この3変量化表示による回帰平面と測定断面の図示化は多重共線性についての理解に役立つ。

なお、第1報³⁾における「回帰平面と測定断面」に関する記述の一部修正を本文中に記載している。

最後に、本論文はこの第6報でもって一応の区切りを付けさせて頂きます。また、本論文をまとめるにあたり激励と貴重な助言を頂いた九州大学航空工学教室の桜井晃教授に心より謝意を表します。

参考文献

- 1) Klein, V., Batterson, J. G. and Murphy, P. C.: Determination of Airplane Model Structure from Flight Data by Using Modified Stepwise Regression, NASA TP-1916, 1981.
- 2) Klein, V.: Estimation of Aircraft Aerodynamic Parameters from Flight Data, Prog. Aerospace Sci., 18 (1989), pp. 1-77.
- 3) 小林 修: 飛行データからの空力特性推定法 (第1報) 方程式誤差法における多重共線性, 日本航空宇宙学会誌, 40 (1992), pp. 443-452.
- 4) 奥野忠一, 久米 均, 芳賀敏郎, 吉澤 正: 多変量解析法 (改訂版), 日科技連出版社, 1981, pp. 25-78.