論 文

CONTRIBUTED PAPERS

メッシュ式宇宙リフレクタの表面精度の検討^{*1}

—— 長方形膜要素の鏡面誤差 ——

Surface Accuracy Analysis of Mesh-Type Space Reflector —RMS Error of Rectangular Membrane Element—

加 藤 純 郎^{*2}・松 崎 雄 嗣^{*3}

Sumio KATO and Yuji MATSUZAKI

Key Words: Surface Error, RMS Error, Mesh-Type Space Reflector, Mesh-Type Space Antenna, Rectangular Membrane

Abstract

The root-mean square (rms) surface error of a rectangular mesh (membrane) element subjected to isotropic tension in a faceted reflector surface is analyzed. The rectangular membrane element is assumed to be placed on any place of the reflector surface with an arbitrary angle between the side of the membrane and the direction of the principal curvature of the ideal reflector surface. The boundaries of the membrane are assumed to coincide with elliptic or hyperbolic paraboloidal surfaces. The deflection of the membrane is calculated based on a linear membrane equation. According to the constraints of parameters which determine the boundary deflections of the membrane element, different kinds of rms error optimizations are carried out and corresponding optimum membranes are obtained and compared. Effects of parameters, such as aspect ratio, boundary deflection, size, etc., upon the surface error of each optimum membrane are examined. The optimum membrane, which has minimum surface error among other optimum membranes, is found to give substantially lower errors than those of the best fit flat membrane. Comparison of the rms error of a rectangular membrane element with those of a circular and triangular membrane element of the same area is also made.

主 な 記 号

0- X, Y, Z : 直角座標系

P_0 : 理想放物面上の任意の点

(X_0, Y_0, Z_0): P_0 点の座標 (0- X, Y, Z 座標系)

P_0 - ξ, η, ζ : P_0 点における局所座標系

P_0 - x, y, ζ : ξ, η 軸を ζ 軸回りに α だけ回転して
できる座標系

P_0 - x^*, y^*, ζ : x, y 軸を ζ 軸回りに β だけ回転して
できる座標系

F, R : 理想放物面の焦点距離, 及び頂点での
曲率半径 ($R=2F$)

k : $1/R$

APS: 近似放物面

ζ_{APS} : P_0 点で定義される APS((3), (4)
式)

k_1, k_2 : P_0 点における主曲率

r_1, r_2 : P_0 点における主曲率半径

$g = 1 + k^2(X_0^2 + Y_0^2) = 1 + (X_0^2 + Y_0^2)/R^2$

A, B, C, D : 長方形膜の頂点

α, β : ζ 軸回りの回転角 (第2図参照)

δ_{rms} : 鏡面誤差

w_B : 膜面境界変位

w : 膜変位

l_1, l_2, h : 変化パラメータ ((7)式)

$2a, 2b$: 長方形膜要素の辺長 (第2図)

λ : a/b

δ_c : 境界一致膜の鏡面誤差 ($F\delta_{\text{rms}}/(4ab)$)

δ_{cop} : 最適境界一致膜の鏡面誤差
($F\delta_{\text{rms}}/(4ab)$)

δ_p : 最適平面膜の鏡面誤差 ($F\delta_{\text{rms}}/(4ab)$)

δ_1 : 最適等曲率膜の鏡面誤差
($F\delta_{\text{rms}}/(4ab)$)

δ_2 : 最適二曲率膜の鏡面誤差
($F\delta_{\text{rms}}/(4ab)$)

^{*1} 平成5年1月21日原稿受理

^{*2} 川崎重工業(株)岐阜技術研究所(兼)名古屋大学大学院工
学研究科航空工学専攻

^{*3} 名古屋大学工学部航空学科

1. はじめに

大型宇宙リフレクタの反射面の構造としてこれまでにリジッド方式^{1,2)}、メッシュ方式^{2~5)}、及びインフレータブル方式^{6~9)}の3種の方法が提案されている。これらのリフレクタをアンテナとして使用する場合には、鏡面誤差の小さい高精度の反射面を得ることが非常に重要である。上記方式のうちメッシュ方式では、反射面を要素に分割し、各要素の境界でメッシュ（非加圧膜面）を支持するタイプが代表的なものの一つである。このタイプでは膜面（膜要素）の鏡面誤差は、要素の寸法、形状、境界変位量、リフレクタ中心軸からの距離、張力比等のパラメータに依存する^{10~12)}。従って鏡面誤差の小さい高精度反射面を得るためには、これらのパラメータと鏡面誤差の関係を把握することが必須である。

Fichter¹⁰⁾は中心軸上に配置された正三角形及び長方形膜面に関し、その鏡面誤差に及ぼす境界変位の影響を調べた。また著者等¹¹⁾はリフレクタ面上の任意の位置に配置された円及び正三角形膜要素に関し同様の検討を行っている。古谷等¹²⁾は、リフレクタ面の任意の位置に各辺が主曲率方向と平行に配置された長方形膜面について、境界がベストフィット放物面に一致する場合の鏡面誤差に及ぼす張力比、位置、縦横比の影響を調べている。

本論文ではリフレクタ面上の任意の位置に、辺が主曲率方向に対して任意の角度で取付けられた長方形膜要素を対象として、膜の境界が楕円又は双曲放物面上にある場合における各種拘束条件下での鏡面誤差の最小値等を求める。さらに得られた各最適膜の鏡面誤差に及ぼす境界変位、要素寸法、リフレクタ面上の位置等のパラメータの影響を調べ比較評価を行なう。

なお本論文における鏡面誤差等に関する解析式及び結果は、長方形膜要素によるアンテナの鏡面誤差に関する有用なデータを与えるものとする。

2. 理想放物面および近似放物面

第1図に示すように0点を頂点とし、Z軸を中心軸とする焦点距離Fの放物面を理想放物面とする。本放物面は下式で与えられる。

$$Z = (X^2 + Y^2)/(4F) = (X^2 + Y^2)/(2R) \\ = (k/2)(X^2 + Y^2) \quad (1)$$

但しR, kは、それぞれ頂点での曲率半径、及び曲率である。ここで、理想放物面上の任意の点P₀(X₀, Y₀, Z₀)を原点とする局所座標系P₀-ξ, η, ζを考える。ξ, η, ζ軸はそれぞれP₀点における子午線方向、円周方向及び法線方向と一致している。局所座標系を使用

すると、理想放物面はP₀点の近傍において以下であらわされる。

$$\zeta(\xi, \eta) = a_{00} + a_{10}\xi + a_{01}\eta + a_{11}\xi\eta + a_{20}\xi^2 \\ + a_{02}\eta^2 + a_{30}\xi^3 + a_{21}\xi^2\eta + \dots \quad (2)$$

但し $a_{00} = \zeta(0, 0)$, $a_{10} = \partial\zeta(0, 0)/\partial\xi$, $a_{01} = \partial\zeta(0, 0)/\partial\eta$, $a_{11} = \partial^2\zeta(0, 0)/\partial\xi\partial\eta$, $a_{20} = (1/2)\partial^2\zeta(0, 0)/\partial\xi^2$, $a_{02} = (1/2)\partial^2\zeta(0, 0)/\partial\eta^2$, ……である。 a_{ij} を計算し、ξ, ηの2次の項までとると、 a_{20} , a_{02} 以外の係数は0となり、理想放物面の近似曲面 ζ_{APS} が下式であらわされる。本論文では ζ_{APS} をP₀点における近似放物面(APS)と呼ぶ。

$$\zeta_{APS} = (1/2)(k_1\xi^2 + k_2\eta^2)$$

但し

$$k_1 = kg^{-3/2} = 1/r_1, \quad k_2 = kg^{-1/2} = 1/r_2 \\ k = 1/(2F) = 1/R, \quad g = 1 + k^2(X_0^2 + Y_0^2) \quad (3)$$

ここで k_1, k_2 はP₀点におけるξ, η方向の主曲率を、 r_1, r_2 はP₀点におけるξ, η方向の主曲率半径を示す。 g は膜要素の理想放物面の中心軸からの距離を示すパラメータで、 g の値が大きくなるほど中心軸からの距離が大きくなる。例えば $g=1$ は中心軸上に対応し $g=1.5, 2.0$ はそれぞれ中心軸からの距離が $\sqrt{2}F, 2F$ の位置に対応する。APSはξ, ηが小さいとき理想放物面とほぼ一致する。

ξ, η軸をζ軸のまわりに、ξ軸が辺AB, DCに平

第1図 理想放物面及び局所座標系

第2図 長方形膜要素

行に、また η 軸が AD, BC に平行になるように回転させて出来る座標系を P_0 - x, y, ζ 座標系とし (第2図参照) 回転角を α とする. P_0 - x, y, ζ 座標系を使用すると APS は (4) 式であらわされる.

$$\zeta_{\text{APS}} = (1/2)[(k_1 \cos^2 \alpha + k_2 \sin^2 \alpha)x^2 + (k_1 \sin^2 \alpha + k_2 \cos^2 \alpha)y^2 + 2xy(k_2 - k_1)\sin \alpha \cos \alpha] \quad (4)$$

3. 膜面変位方程式および鏡面誤差の定義

長方形膜面が P_0 点の近傍において境界を支持され、面内方向に一樣な張力 T (単位長さ当りの力) が加わるものとする (第2図参照). 膜材の曲げ剛性が無視でき、たわみ量が小さいとき、膜の変形形状 w は以下のラプラスの方程式に支配される¹³⁾.

$$\partial^2 w / \partial \xi^2 + \partial^2 w / \partial \eta^2 = \partial^2 w / \partial x^2 + \partial^2 w / \partial y^2 = 0 \quad (5)$$

本論文では、膜面の理想放物面を基準とした鏡面誤差 (rms 誤差) δ_{rms} は、理想放物面を APS で近似し法線方向のずれ量を用いて下式で表す¹¹⁾.

$$\delta_{\text{rms}} = [(1/A_{\text{me}}) \int_{S_{\text{me}}} (w - \zeta_{\text{APS}})^2 ds]^{1/2} \quad (6)$$

ここで、 S_{me} は膜要素の ξ, η 面 (又は x, y 面) 上への射影、 A_{me} は S_{me} の面積、 ds は面素である.

4. 解 析

第2図に示すように、 ξ, η 面への射影が P_0 点を重心とする長方形の膜面 M_R を考える. M_R の辺 AB, CD の長さは $2a$, 辺 BC, DA の長さは $2b$ で、各辺は x 軸, y 軸に平行とする. 前に述べたように、膜面 M_R は一樣な張力 T を受け、膜材の曲げ剛性は無視でき、たわみ量は小さいものとする. 膜の境界が、 ζ 軸を中心軸とする楕円放物面又は双曲放物面上にあるとき、長方形膜面 M_R の境界の ζ 座標 w_B は下式であらわれる.

$$\begin{aligned} w_B &= (l_1/2)x^{*2} + (l_2/2)y^{*2} + h \\ &= (1/2)[(l_1 \cos^2 \beta + l_2 \sin^2 \beta)x^2 + (l_1 \sin^2 \beta + l_2 \cos^2 \beta)y^2 + 2xy(l_1 - l_2)\cos \beta \sin \beta] + h \end{aligned} \quad (7)$$

但し、 P_0 - x^*, y^*, ζ は P_0 - x, y, ζ 軸を ζ 軸回りに任意の角度 β だけ回転させてできる直角座標系、 β は x 軸を基準とした x^* 軸の回転角、 l_1, l_2 は各辺の曲率に関する変化パラメータ、また h は ζ 方向の平行移動量に関する変化パラメータである. (7) 式を膜面 M_R の変形形状 w に関する支配方程式 (5) 式の境界条件とする. (7) 式において特に $\beta=0$ のときは、辺 AB, CD 及び BC, DA が、それぞれ各辺の中点を通り ζ 軸に平行な中心軸を持つ焦点距離 $1/(2l_1)$ 及び $1/(2l_2)$ の放物線であらわされる.

ここでは、下式で与えられる変形形状 w を考える.

$$\begin{aligned} w &= (l_1 + l_2)a^2(16/\pi^3)\Phi + w_B \\ \Phi &= \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} (1/n^3)(-1)^{(n+3)/2} \\ &\quad \times \left[1 - \frac{\cosh\left(\frac{n\pi y}{2a}\right)}{\cosh(n\pi\lambda/2)} \right] \cos \frac{n\pi x}{2a} \end{aligned} \quad (8)$$

$$\lambda = b/a$$

Φ は境界上で 0 となるため w は境界条件 (7) 式を満足する. また、 $\Delta w_B = l_1 + l_2$, および文献 13) より $\Delta(16/\pi^3)a^2\Phi = -1$ となることから (ここで $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ とする), w は (5) 式を満足することがわかる. 従って (8) 式による w は膜面変形に関する支配方程式 (5) 式、境界条件 (7) 式の解であり、膜面 M_R の変形形状をあらわしている.

(8), (4) 式より

$$(w - \zeta_{\text{APS}})/a = D_0\Phi + (1/2)[A_0(x/a)^2 + B_0(y/a)^2 + 2C_0(x/a)(y/a)] + H \quad (9-1)$$

ここで、

$$\begin{aligned} D_0 &= (L_1 + L_2)(16/\pi^3) \\ A_0 &= (L_1 \cos^2 \beta + L_2 \sin^2 \beta) \\ &\quad - (K_1 \cos^2 \alpha + K_2 \sin^2 \alpha) \\ B_0 &= (L_1 \sin^2 \beta + L_2 \cos^2 \beta) \\ &\quad - (K_1 \sin^2 \alpha + K_2 \cos^2 \alpha) \\ C_0 &= (L_1 - L_2)\cos \beta \sin \beta - (K_2 - K_1)\sin \alpha \cos \alpha \\ L_1 &= al_1, L_2 = al_2, K_1 = ak_1, K_2 = ak_2 \\ H &= h/a \end{aligned} \quad (9-2)$$

(9-1) 式を (6) 式に代入すると

$$\begin{aligned} \delta_{\text{rms}}^2/a^2 &= D_0^2 L_a + D_0(A_0 L_{ba} + B_0 L_{bb} + 2HL_c) \\ &\quad + A_0^2/20 + (B_0^2/20)\lambda^4 + (C_0^2/9)\lambda^2 \\ &\quad + (A_0 B_0/18)\lambda^2 + (H/3)(A_0 + B_0\lambda^2) + H^2 \end{aligned} \quad (10)$$

但し、 L_a, L_{ba}, L_{bb}, L_c は λ の関数であり下式で表される.

$$\begin{aligned} L_a &= (1/A_{\text{me}}) \int_{S_m} \int \Phi^2 ds \\ &= \frac{1}{4\lambda} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} (1/n^6) \left[3\lambda - \frac{6}{n\pi} \tanh \frac{n\pi\lambda}{2} \right. \\ &\quad \left. - \lambda \tanh^2(n\pi\lambda/2) \right] \\ L_{ba} &= \frac{1}{a^2 A_{\text{me}}} \int_{S_m} \int \Phi^2 x^2 ds \\ &= \frac{1}{4\lambda} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} (16/\pi^2) \frac{(n\pi/2)^2 - 2}{n^6} \\ &\quad \times \left[2\lambda - \frac{4}{n\pi} \tanh \frac{n\pi}{2} \lambda \right] \\ L_{bb} &= \frac{1}{a^2 A_{\text{me}}} \int_{S_m} \int \Phi^2 y^2 ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{4\lambda} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} (16/\pi^2)(1/n^5) \left[\frac{n\pi}{6} \lambda^3 + \frac{4\lambda}{n\pi} \right. \\
&\quad \left. - \left\{ \lambda^2 + 2 \left(\frac{2}{n\pi} \right)^2 \right\} \tanh \frac{n\pi}{2} \lambda \right] \\
L_c &= \frac{1}{A_{me}} \int_{s_m} \int \Phi ds \\
&= \frac{1}{4\lambda} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{4}{n^4 \pi} \\
&\quad \times \left(2\lambda - \frac{4}{n\pi} \tanh \frac{n\pi}{2} \lambda \right)
\end{aligned}$$

ここで s_m は M_R の ξ, η 面への射影, A_{me} は s_m の面積である.

以下の 1)~5) では膜面に種々の境界変位を与えたときの膜面変位と鏡面誤差を調べる.

- 1) 膜要素の境界が APS と一致するとき (境界一致膜)

(7) 式において $l_1=k_1, l_2=k_2, h=0, \beta=-\alpha$ とすると境界変位 w_b は APS ((4) 式) と一致する. 即ち膜要素の境界が APS と一致する場合の境界条件を与える. $l_1=k_1, l_2=k_2, h=0, \beta=-\alpha$ を (9-2) 式に代入し (9-1), (10) 式から下式が得られる.

$$\begin{aligned}
\delta_{rms}/a &= a(k_1+k_2)(16/\pi^3)(L_a)^{1/2} \\
F\delta_{rms}/(4ab) &= (g^{-3/2}+g^{-1/2})(2/\pi^3)(L_a)^{1/2}/\lambda \\
w/a &= a(k_1+k_2)(16/\pi^3)\Phi + \zeta_{APS}/a
\end{aligned} \quad (11)$$

- 2) 境界一致膜を法線方向 (ζ 方向) に平行移動させて鏡面誤差を最小にするとき (最適境界一致膜)

(7) 式において $l_1=k_1, l_2=k_2, \beta=-\alpha$ とすると h をパラメータとして境界一致膜を法線方向 (ζ 方向) に平行移動させた場合の境界条件が得られる. また h に対して鏡面誤差が最小になることから $\partial\delta_{rms}^2/\partial h=0$ が成り立つ. $l_1=k_1, l_2=k_2, \beta=-\alpha$ を (9-2) 式に代入して (このとき $A_0=B_0=C_0=0$ が得られる) (9-1), (10) 式と $\partial\delta_{rms}^2/\partial h=0$ より

$$h/a = -a(k_1+k_2)(16/\pi^3)L_c \quad (12)$$

$$\begin{aligned}
\delta_{rms}/a &= a(k_1+k_2)(16/\pi^3)(L_a-L_c^2)^{1/2} \\
F\delta_{rms}/(4ab) &= (g^{-3/2}+g^{-1/2}) \\
&\quad \times (2/\pi^3)(L_a-L_c^2)^{1/2}/\lambda \\
w/a &= a(k_1+k_2)(16/\pi^3)\Phi + \zeta_{APS}/a \\
&\quad - a(k_1+k_2)(16/\pi^3)L_c
\end{aligned} \quad (13)$$

- 3) 平面膜を ζ 方向に平行移動させて鏡面誤差を最小とするとき (最適平面膜)

(7) 式において $l_1=l_2=0$ とすると $w_b=h$ となり h をパラメータとして各辺が $\zeta=h$ の平面内にある境界条件が得られる (β には依存しない). さらに (8) 式を考慮すると $w=h$ となり平面膜となることが分かる. また h に対して鏡面誤差が最小になることから $\partial\delta_{rms}^2/\partial h=0$ が成り立つ. 従って $l_1=l_2=0, \partial\delta_{rms}^2/\partial h=$

0 および (9-2), (10) 式より

$$h/a = -(A_1+B_1\lambda^2)/6 \quad (14)$$

$l_1=l_2=0$ と (9-1), (9-2), (10), (14) 式より

$$\begin{aligned}
\delta_{rms}/a &= (A_1^2+B_1^2\lambda^4+5C_1^2\lambda^2)^{1/2}/(3\sqrt{5}) \\
F\delta_{rms}/(4ab) &= (A_2g^{-3}+B_2g^{-1}+2C_2g^{-2})^{1/2} \\
&\quad / (24\sqrt{5}\lambda) \\
w/a &= -(A_1+B_1\lambda^2)/6
\end{aligned} \quad (15)$$

但し

$$\begin{aligned}
A_1 &= -(K_1 \cos^2 \alpha + K_2 \sin^2 \alpha) \\
B_1 &= -(K_1 \sin^2 \alpha + K_2 \cos^2 \alpha) \\
C_1 &= -(K_2 - K_1) \sin \alpha \cos \alpha \\
A_2 &= \cos^4 \alpha + \lambda^4 \sin^4 \alpha + 5\lambda^2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha \\
B_2 &= \sin^4 \alpha + \lambda^4 \cos^4 \alpha + 5\lambda^2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha \\
C_2 &= (\lambda^4 - 5\lambda^2 + 1) \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha
\end{aligned}$$

- 4) 各辺の変位が各中点で等しい曲率 l_e をもつ放物線であらわされる場合で, l_e を変化させかつ膜面を ζ 方向に平行移動させて鏡面誤差を最小にするとき (最適等曲率膜)

(7) 式において $l_1=l_2=l_e$ とすると h をパラメータとして各辺の変位が各中点で等しい曲率 l_e をもつ放物線となる場合の境界条件を表す (β には依存しない). l_e を変化させかつ膜面を ζ 方向に平行移動させて鏡面誤差を最小にするときは $\partial\delta_{rms}^2/\partial h = \partial\delta_{rms}^2/\partial l_e = 0$ が成り立つ.

$$l_1=l_2=l_e, \partial\delta_{rms}^2/\partial h = \partial\delta_{rms}^2/\partial l_e = 0 \quad (16)$$

および (9-2), (10) 式より (17) 式が得られる.

$$\begin{aligned}
A_0 &= L_e + A_1, B_0 = L_e + B_1, C_0 = C_1 \\
D_0 &= 2L_e(16/\pi^3) \\
L_e &= (C_{10}C_{22} - C_{20}C_{12})/(C_{11}C_{22} - C_{12}C_{21}) \\
H &= (C_{10}C_{21} - C_{20}C_{11})/(C_{21}C_{12} - C_{11}C_{22})
\end{aligned} \quad (17)$$

但し

$$\begin{aligned}
L_e &= al_e \\
C_{11} &= 8(16/\pi^3)^2 L_a + 4(16/\pi^3)(L_{ba} + L_{bb}) \\
&\quad + 1/10 + (1/10)\lambda^4 + (1/9)\lambda^2 \\
C_{12} &= 4(16/\pi^3)L_c + (1+\lambda^2)/3 \\
C_{10} &= -2(16/\pi^3)(A_1L_{ba} + B_1L_{bb}) - A_1/10 \\
&\quad - (1/10)B_1\lambda^4 - (\lambda^2/18)(A_1 + B_1) \\
C_{21} &= 4(16/\pi^3)L_c + (1+\lambda^2)/3 \\
C_{22} &= 2 \\
C_{20} &= -(1/3)(A_1 + B_1\lambda^2)
\end{aligned}$$

(7), (8), (10), (17) 式から, 変形状と鏡面誤差が得られる.

- 5) l_1, l_2, β を変化させ, さらに膜面を ζ 方向に平行移動させて鏡面誤差を最小にするとき (最適二曲率膜)

(7) 式の境界条件において, 各辺の曲率に関するパ

ラメータ l_1, l_2, ζ 方向の平行移動量に関するパラメータ h , および x^* 軸と x 軸のなす角度 β を変化させて鏡面誤差を最小にする場合に対応する. l_1, l_2, h を変化させて鏡面誤差を最小にするときは下式が成り立つ.

$$\partial \delta_{rms}^2 / \partial l_1 = \partial \delta_{rms}^2 / \partial l_2 = \partial \delta_{rms}^2 / \partial h = 0 \quad (18)$$

(18) 及び (9-2), (10) 式より

$$\begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} \quad (19)$$

但し,

$$\begin{aligned} e_{11} &= 2(16/\pi^3)^2 L_a + 2(16/\pi^3) L_{ba} \cos^2 \beta \\ &\quad + 2(16/\pi^3) L_{bb} \sin^2 \beta + (1/10) \cos^4 \beta \\ &\quad + (\lambda^4/10) \sin^4 \beta + (\lambda^2/3) \sin^2 \beta \cos^2 \beta \\ e_{12} &= 2(16/\pi^3)^2 L_a + (16/\pi^3) (L_{ba} + L_{bb}) \\ &\quad + (1/10) \sin^2 \beta \cos^2 \beta + (\lambda^4/10) \sin^2 \beta \cos^2 \beta \\ &\quad - (2/9) \lambda^2 \sin^2 \beta \cos^2 \beta + (\lambda^2/18) (\sin^4 \beta \\ &\quad + \cos^4 \beta) \\ e_{13} &= 2(16/\pi^3) L_c + (\cos^2 \beta + \lambda^2 \sin^2 \beta) / 3 \\ e_1 &= -(16/\pi^3) (A_1 L_{ba} + B_1 L_{bb}) - (1/10) A_1 \cos^2 \beta \\ &\quad - (\lambda^4/10) B_1 \sin^2 \beta - (2/9) \lambda^2 C_1 \sin \beta \cos \beta \\ &\quad - (\lambda^2/18) (B_1 \cos^2 \beta + A_1 \sin^2 \beta) \\ e_{21} &= 2(16/\pi^3)^2 L_a + (16/\pi^3) (L_{ba} + L_{bb}) \\ &\quad + (1/10) \sin^2 \beta \cos^2 \beta + (\lambda^4/10) \sin^2 \beta \cos^2 \beta \\ &\quad - (2/9) \lambda^2 \sin^2 \beta \cos^2 \beta + (\lambda^2/18) (\sin^4 \beta \\ &\quad + \cos^4 \beta) \\ e_{22} &= 2(16/\pi^3)^2 L_a + 2(16/\pi^3) (L_{ba} \sin^2 \beta \\ &\quad + L_{bb} \cos^2 \beta) \\ &\quad + (1/10) \sin^4 \beta + (\lambda^4/10) \cos^4 \beta \\ &\quad + (\lambda^2/3) \sin^2 \beta \cos^2 \beta \\ e_{23} &= 2(16/\pi^3) L_c + (\sin^2 \beta + \lambda^2 \cos^2 \beta) / 3 \\ e_2 &= -(16/\pi^3) (A_1 L_{ba} + B_1 L_{bb}) - (1/10) A_1 \sin^2 \beta \\ &\quad - (\lambda^4/10) B_1 \cos^2 \beta + (2/9) \lambda^2 C_1 \sin \beta \cos \beta \\ &\quad - (\lambda^2/18) (B_1 \sin^2 \beta + A_1 \cos^2 \beta) \\ e_{31} &= 2(16/\pi^3) L_c + (\cos^2 \beta + \lambda^2 \sin^2 \beta) / 3 \\ e_{32} &= 2(16/\pi^3) L_c + (\sin^2 \beta + \lambda^2 \cos^2 \beta) / 3 \\ e_{33} &= 2 \\ e_3 &= -(A_1 + B_1 \lambda^2) / 3 \end{aligned}$$

(19) 式から L_1, L_2, H が得られ, これと (9-1), (9-2), (10) 式から鏡面誤差 δ_{rms}/a および $F\delta_{rms}/(4ab)$ がそれぞれ $\alpha, \lambda, \beta, k_1, k_2$ および $\alpha, \lambda, \beta, g$ の関数として, また w/a が $\alpha, \lambda, \beta, k_1, k_2, x/a, y/a$ の関数として求まる. このとき膜面の境界は2つの曲率を持つ曲面上にあり, これを二曲率膜とする. さらに β を変化させて鏡面誤差が最小となったとき, 最適二曲率膜となる.

5. 解析結果および考察

(11), (13) 式より, 境界一致膜および最適境界一致膜の鏡面誤差 $F\delta_{rms}/(4ab)$ は α に依存せず, g に対して単調に減少し, g が一定のときは $\lambda=1$ で最大となり, λ を1から増加または減少させるとそれぞれ単調に減少する (λ による挙動は数値計算により少なくとも $0.1 \leq \lambda \leq 10.0$ の範囲で確認した). α に依存しないことから $\lambda=\lambda_0, \alpha=\alpha_0$ と $\lambda=\lambda_0, \alpha=\alpha_0+\pi/2$ の場合で鏡面誤差は同じ値となる. さらに $\lambda=\lambda_0, \alpha=\alpha_0+\pi/2$ と $\lambda=1/\lambda_0, \alpha=\alpha_0$ の場合の鏡面誤差も同じ値となるため $\lambda=\lambda_0$ と $1/\lambda_0$ で鏡面誤差は同じ値となる. ここで $\lambda_0 > 0, \alpha_0$ は任意の実数である. 第3図(a)及び第3図(b)にそれぞれ境界一致膜及び最適境界一致膜の g, λ と鏡面誤差の関係を示す.

(15) 式に $g=1$ を代入すると最適平面膜のリフレク

第3図(a) 境界一致膜の鏡面誤差

第3図(b) 最適境界一致膜の鏡面誤差

第4図(a) 鏡面誤差に及ぼす α, λ の影響 (最適平面膜, $g=1$) 第4図(b) 鏡面誤差に及ぼす α, λ の影響 (最適平面膜, $g=2$) 第4図(c) 鏡面誤差に及ぼす α, g の影響 (最適平面膜, $\lambda=1$) 第4図(d) 鏡面誤差に及ぼす α, g の影響 (最適平面膜, $\lambda=2$)

タ面の中心軸上の鏡面誤差が得られ、下式で与えられる。

$$\frac{F}{2a} \frac{\delta_{rms}}{2a} = \frac{\sqrt{5}(\lambda^4 + 1)^{1/2}}{120}$$

本式は文献 10) に与えられた関係式と一致している。

(15)式から、最適平面膜の鏡面誤差は α の偶関数であり、少なくとも α に関し π の周期を持つことが分かる。また g に対して単調に減少し、 λ が

$$\lambda = \lambda_{min} = \left(\frac{\cos^2 \alpha + g \sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha + g \cos^2 \alpha} \right)^{1/2}$$

で極小値をとり、 $\lambda > \lambda_{min}$ および $\lambda < \lambda_{min}$ のとき、 λ に対して、それぞれ単調に増加および減少することを示すことができる。また上式より

$$g^{-1/2} \leq \lambda_{min} \leq g^{1/2}$$

が得られる。

(15)式に基づき、最適平面膜の $g=1, 2$ における α , λ と鏡面誤差の関係を求め、それぞれ第4図(a), (b)に示す。また第4図(c), (d)は、それぞれ最適平面膜の $\lambda=1$ 及び 2 における α, g と鏡面誤差の関係を示す。図において λ を一定にしたときのグラフを α に関して $\pm\pi/2$ だけ平行移動すると、 $1/\lambda$ に対するグラフが得られる。第4図(a)及び(15)式から $g=1$ のとき鏡面誤差は λ のみに依存し、 α には依存しないことが分かる。第4図(b)において $g=2$ のとき、 $\lambda=1$ では $\alpha=0, \pm\pi/2$ で鏡面誤差が最小となり、 $\alpha=\pm\pi/4$ で最大となっている。また $\lambda=2, 3$ では、 $\alpha=0$ のとき最大値を、 $\pm\pi/2$ のとき最小値をとり、 $\lambda=0.4$ では逆に $\alpha=\pm\pi/2$ のとき最大値を、 $\alpha=0$ のとき最小値をとる。第4図(c)において、 $\lambda=1$ の場合、 $g=1$ では鏡面誤差は α に依存せず、 $g=1.5, 2.0$ では、 $\alpha=$

第5図(a) 鏡面誤差に及ぼす α, λ の影響 (最適等曲率膜, $g=1$)

第5図(b) 鏡面誤差に及ぼす α, λ の影響 (最適等曲率膜, $g=2$)

$\pm\pi/4$ のとき最大値を, $\alpha=0, \pm\pi/2$ のとき最小値をとる. $\lambda=2$ のとき (第4図(d)) $g=1$ では鏡面誤差は α に依存せず, $g=1.5, 2$ では $\alpha=0$ のとき最大値を, $\alpha=\pm\pi/2$ のとき最小値をとる. また第4図(c), (d)においてともに, g が増加すると鏡面誤差は減少している.

最適等曲率膜の鏡面誤差と他のパラメータとの関係は, (17)式に基づき数値計算で求めた. 第5図(a), (b)は, $g=1, 2$ における最適等曲率膜の α, λ と鏡面誤差の関係を示す. $g=1$ のとき (第5図(a)) 鏡面誤差は λ のみに依存し, α には依存しない. 第5図(b)から $g=2$ のとき鏡面誤差は $\alpha=\pm\pi/4$ で最大値をとり, $\alpha=0$ または $\pm\pi/2$ で最小値をとることが分かる. 第5図(a), (b)ともに λ が1から増加または減少すると, 鏡面誤差が減少している. λ を一定にしたときのグラフを α に関して $\pm\pi/2$ だけ平行移動すると

第6図(a) β, α と鏡面誤差の関係 (二曲率膜)

第6図(b) α と $\beta_{\min}$ の関係 (最適二曲率膜)

$1/\lambda$ に対するグラフが得られる. また(17)および(10)式から, 最適等曲率膜の鏡面誤差は α に関し少なくとも π の周期を持ち, α の偶関数であることが示される.

二曲率膜及び最適二曲率膜の鏡面誤差と他のパラメータとの関係は, (19)式に基づき数値計算で求めた. 二曲率膜における $g=2, \lambda=2$ のとき β, α と鏡面誤差の関係を, 第6図(a)に示す α を一定として β を変化させて鏡面誤差を最小にするとき, 最適二曲率膜が得られる. 最適二曲率膜の鏡面誤差 $F\delta_{rms}/(4ab)$ は α によらず, また λ と $1/\lambda$ で同じ値をとる. このときの β を $\beta_{\min}$ として α との関係を図6(b)に示す. [$\beta_0=\beta_{\min}$ とすると $\beta_0 \pm n\pi/2$ (n : 整数) も $\beta_{\min}$ となる. 第6図(b)では $0 < \alpha \leq \pi/2, 0 \leq \beta_{\min} < \pi/2$ としている.]

第7図は最適二曲率膜の鏡面誤差と g, λ の関係を示す. 図より鏡面誤差は g の減少関数であり, λ を1から増加または減少させると, 鏡面誤差が減少することが分かる.

第7図 中心軸からの距離 g と鏡面誤差の関係 (最適二曲率膜)

第8図(a), (b)にそれぞれ $g=1, 1.5$ のときの5種の膜面に関する λ と鏡面誤差の関係を示す。ここで境界一致膜, 最適境界一致膜, 最適平面膜, 最適等曲率膜, および最適二曲率膜の鏡面誤差 $F\delta_{rms}/(4ab)$ をそれぞれ $\delta_c, \delta_{cop}, \delta_p, \delta_1, \delta_2$ とする。 $g=1$ のときは(第8図(a)) 5種の膜面とも λ を与えると鏡面誤差が定まり (α に依存しない) λ と $1/\lambda$ に対する鏡面誤差は等しい。最適平面膜の鏡面誤差 δ_p は $\lambda=1$ のとき最小となり, λ を増加または減少させると単調に増加する。逆に他の膜面では $\lambda=1$ のときに鏡面誤差が最大となり, λ を増加または減少させると単調に減少する。 $g=1.5$ のとき (第8図(b)), 境界一致膜, 最適境界一致膜, 及び最適二曲率膜の鏡面誤差 $\delta_c, \delta_{cop}, \delta_2$ は, いずれも α に依存せず, λ により一意的に定まる。これに対し, 最適平面膜, 及び最適等曲率膜の鏡面誤差 δ_p, δ_1 は λ だけでなく α にも依存している。このため図では, 各 λ に対して α を変化させたときの鏡面誤差 $F\delta_{rms}/(4ab)$ の最大値 ($\delta_{pmax}, \delta_{imax}$) 及び最小値 ($\delta_{pmin}, \delta_{imin}$) を示している。図において3種の膜面の鏡面誤差 $\delta_c, \delta_{cop}, \delta_2$ 及び最適平面膜, 最適等曲率膜の鏡面誤差の最大値, 最小値 $\delta_{pmax}, \delta_{imax}, \delta_{pmin}, \delta_{imin}$ は $\lambda, 1/\lambda$ で等しい値をとる。 $\delta_c, \delta_{cop}, \delta_2$ 及び $\delta_{imax}, \delta_{imin}$ は $\lambda=1$ で最大となり, λ が1から増加または減少すると単調に減少する。これに対し δ_{pmax} は $\lambda=1$ で最小となり, λ が1から増加または減少すると単調に増加する。 δ_{pmin} は $\lambda=1$ の付近を除いて δ_{pmax} と同様の傾向がある。5種の膜面のうち, 最適二曲率膜の鏡面誤差 δ_2 が $g=1$ 及び 1.5 の場合ともに最も小さくなっている。

第9図(a), (b), (c)に5種の膜面の $\lambda=1, 2(0.5), 5(0.2)$ の場合における g と鏡面誤差の関係を示

第8図(a) 鏡面誤差の λ による影響 ($g=1$) 第8図(b) 鏡面誤差の λ による影響 ($g=1.5$)

す。第8図(b)の場合と同様に, 最適平面膜及び最適等曲率膜では, 各 g に対して α を変化させたときの最大値 ($\delta_{pmax}, \delta_{imax}$) 及び最小値 ($\delta_{pmin}, \delta_{imin}$) を示す。 $\lambda=1, 2(0.5)$ では各鏡面誤差はすべて g に対し単調に減少している。 $\lambda=5(0.2)$ では δ_{imax} を除き g に対し単調に減少している。また $\delta_2 < \delta_{cop} < \delta_c$ 及び $\delta_2 \leq \delta_1 < \delta_p$ がなりたち, δ_2 が最も小さい。

$F=30$ m として $g=1$ (中心軸上に配置) 及び $g=1.5$ (中心軸から 42.4 m の距離に配置) における最適二曲率膜の辺長 $2a$, 辺長比 λ と鏡面誤差 δ_{rms} の関係を求め第10図(a), (b)に示す δ_{rms} は膜の寸法 (辺長 $2a$) の2乗に比例し, $g=1, \lambda=1, 2a=3$ m で $\delta_{rms} \approx 6$

第9図(a) 中心軸からの距離 g と鏡面誤差の関係 ($\lambda=1$) 第9図(b) 中心軸からの距離 g と鏡面誤差の関係 ($\lambda=2, 0.5$)

mm, $g=1.5$, $\lambda=1$, $2a=3$ m で $\delta_{rms} \approx 4$ mm となっている。また $\lambda=2$ 及び 0.5 における δ_{rms} は $g=1, 1.5$ の場合ともそれぞれ $\lambda=1$ の場合の約 1.5 倍及び 0.375 倍である。また (10), (11), (13), (15), (17) 式より, 明らかに他の 4 種の膜面の鏡面誤差も寸法の 2 乗に比例していることが分かる。

$\lambda=1$ のとき (正方形膜) の最適二曲率膜の g と鏡面誤差の関係を文献 11) による円・正三角形の場合の関係と比較して第 11 図に示す。同図は同一面積の 3 種の形状に関する鏡面誤差の比較を示しており, 正方形膜の鏡面誤差は円の 86%, 正三角形の 124% であり, 比率は g によらない。

第9図(c) 中心軸からの距離 g と鏡面誤差の関係 ($\lambda=5, 0.2$) 第10図(a) 長方形膜要素の鏡面誤差 (最適二曲率膜, $g=1, F=30$ m) 第10図(b) 長方形膜要素の鏡面誤差 (最適二曲率膜, $g=1.5, F=30$ m)

第11図 円・正三角形及び正方形膜の鏡面誤差の比較

6. ま と め

種々の境界変位を持つ長方形膜要素が一様な張力を受ける場合の膜の変形形状及び鏡面誤差を線型膜面方程式に基づいて求めた。さらに境界変位形状を決定するパラメータの種々の拘束条件下における鏡面誤差の最小値等を求め、比較評価を行った。主な結論を以下に示す。

(1) 境界一致膜、最適境界一致膜、最適平面膜、最適等曲率膜、最適二曲率膜の5種の膜面の鏡面誤差 $F\delta_{rms}/(4ab)$ を $\delta_c, \delta_{cop}, \delta_p, \delta_1, \delta_2$ とすると、最適二曲率膜の鏡面誤差 δ_2 が最も小さくなる。また $\delta_2 < \delta_{cop} < \delta_c$ 及び $\delta_2 \leq \delta_1 < \delta_p$ が成り立つ。

(2) $\delta_c, \delta_{cop}, \delta_2$ は膜面の ξ 軸回りの回転角 α に依存しない。これに対し δ_p, δ_1 は α に依存する。

(3) $\delta_c, \delta_{cop}, \delta_2$ は $\lambda=1$ で最大となり、 λ を1から増加または減少させると単調に減少する。 δ_p については極小値を与える $\lambda (= \lambda_{min})$ が存在し λ を λ_{min} から増加または減少させると単調に増加する。

(4) リフレクタ中心軸からの距離が増加すると (g が増加すると)、 $\delta_c, \delta_{cop}, \delta_2, \delta_p$ は減少する。

(5) 上記5種の鏡面誤差はともに膜面寸法の2乗に比例して増加する。

(6) 同一面積を持つ正方形膜 (最適二曲率膜)、円

形膜 (最適膜)、及び正三角形膜 (最適膜 (1)) の鏡面誤差は、円形膜、正方形膜、正三角形膜の順に小さくなる。

参考文献

- 1) Hedgepeth, J. M.: New Concepts for Precision Reflector Support Structure, IAF-85-208, 36th Congress of International Astronautical Federation, Stockholm, Oct. 1985.
- 2) Freeland, R. E.: Survey of Deployable Antenna Concepts, Large Space Antenna Systems Technology-1982, NASA CP-2269, Part 1 (May 1983), pp. 381-421.
- 3) Dyer, J. E.: Deployable Truss Structure Advanced Technology, First NASA/DOD CIS Technology Conf. NASA CP-2447, Nov. 1986, pp. 111-124.
- 4) Mitsugi, J. and Yasaka, T.: A Modular Approach to Build a Large Space Antenna, IAF-91-315, 42nd Congress of the International Astronautical Federation, Montreal, 1991.
- 5) Miura, K., Inoue, T. and Tanizawa, K.: Structural Design of Tension Truss Antenna, IAF-91-316, 42nd Congress of the International Astronautical Federation, Montreal, 1991.
- 6) Bernasconi, M. C.: Large Spaceborn Antenna Reflector Using Inflatable Space Rigidized Structures, Proceedings of the Workshop on Mechanical Technology for Antennas, Noordwijk, ESA SP-225, 1984, pp. 31-36.
- 7) Reibaldi, G. G. and Bernasconi, M. C.: Quasat Program: the ESA Reflector, IAF-85-400, 36th Congress of the International Astronautical Federation, Stockholm, 1985.
- 8) Natori, M., Kato, S., Muragishi, O. and Ohnisi, T.: Design and Development of a Modularized Inflatable Reflector, AIAA-90-0998, 31st AIAA/ASME/ASCE/AHS Structures Structural Dynamics and Materials Conference, Long Beach, CA April (1990), pp. 2164-2172.
- 9) Kato, S., Takeshita, Y., Sakai, Y., Muragishi, O., Shibayama, Y. and Natori, M.: Concept of Inflatable Elements Supported by Truss Structure for Reflector Application, Acta Astronautica, 19 (1989), pp. 539-553.
- 10) Fichter, W. B.: Reduction of Root-Mean-Square Error in Faceted Space Antennas, AIAA J., 22 (1984), pp. 1679-1684.
- 11) 加藤純郎, 名取通弘: メッシュ式宇宙リフレクタの表面精度の検討, 一円及び正三角形膜要素の鏡面誤差, 日本航空宇宙学会誌, 41 (1993), pp. 283-292.
- 12) 古谷 寛, 三浦公亮: 膜面構造スペースアンテナの鏡面精度に及ぼす張力の影響, 第26回構造強度に関する講演会, 昭和59年7月, pp. 316-319.
- 13) Timoshenko, S. P. and Goodier, J. N.: Theory of Elasticity, Third Edition, International Student Edition (1970), McGraw-Hill Kogakusha.