構造最適化による低振動ロータ・ブレードの設計*¹

Low Vibration Rotor Blade Design Using Structural Optimization

猫橋 敏文*²・長島 知有*²

Toshifumi NEKOHASHI and Tomoari NAGASHIMA

Key Words: Helicopters, Rotor Blade, Structural Optimization, Optimal Control

Abstract

A new low vibration rotor blade design methodology using modal based structural optimization is proposed. The blade is substituted for a cantilevered rotating plane tapered beam subjected to sinusoidally varying distributed loads. Structural optimization problems to minimize dynamic loads and moments at the blade root are formulated as non-linear optimal control problems in continuous system and their optimum cross sectional area distributions are determined numerically by SCGRA. The features of this procedure are (1) in favor of modal approach, the low vibration blade design problems can be practicable by treating each blade mode separately, (2) utilizing the modal equation as one of equality constraints imposed on the problem, there is no necessity to specify the natural frequency ranges in advance and feasible natural frequency ranges are determined automatically during numerical processes. Numerical studies are conducted for five different kind of combinations of objective functions, constraints for minimum cross sectional area and exciting frequencies of external loads. To clarify the effects of structural optimization to vibration reduction, optimum solutions are compared with numerical results for a uniform blade. It is revealed that little difference can be recognized between the optimum solutions to minimize vertical shear force and those for out of plane moment. However, for optimum area distributions, large difference can be found depending on dominant vibration modes which are related to the exciting frequencies of external loads.

記 号

 A : ブレードの断面積 $A_{\min}$: 許容最小断面積 C_{IS}, C_{IM}, C_E : 重み係数 C_n : 無次元慣性力係数 C_p : 無次元遠心力係数 (釣合い方程式) E : ブレードのヤング率 F_{Gi} : i 次一般化力 I, I_S, I_M : 評価関数 I_z : ブレードの断面 2 次モーメント J : 拡張された評価関数 K : 最大モード次数 K_b : 無次元曲げモーメント係数 K_p : 無次元遠心力係数 (応力制約条件) M : 面内曲げモーメント M_{Gi} : i 次一般化質量 R : ブレードの長さ S : 面外せん断荷重 W : ブレードの重量 b : ブレード枚数 c : ブレードの幅 f_z : 面外方向分布変動荷重 g : 重力加速度 h : ブレードの厚さ l_c : 平均面外方向分布変動荷重 l_n : n 次面外方向分布変動荷重の振幅 m_b : ブレードの質量分布 m_i : ルート部での i 次モード面内曲げモーメント n : 面外方向分布変動荷重の次数 p : 遠心力 r : ブレードの軸方向位置 s_i : ルート部での i 次モード面外せん断荷重 t : 時間 w : ブレードのたわみ Ω : ロータ回転数 α : I_z/A

*¹ 平成5年11月11日、第31回飛行機シンポジウムで発表、
平成5年8月31日原稿受理

*² 防衛大学校航空宇宙工学教室

- ϕ_i : i 次一般座標
 η_i : i 次固有モード
 ρ : ブレードの密度
 σ_a : 許容応力
 ω_i : i 次固有振動数
 ϕ_n : n 次面外方向分布変動荷重の位相差
 $\bar{\xi}, \bar{\zeta}$: スラック変数
 S : 等式制約条件ベクトル
 u : 設計変数ベクトル
 x : 状態変数ベクトル
 ϕ : 微分形制約条件ベクトル
 $\lambda, \rho, \sigma, \mu$: ラグランジュ乗数ベクトル
 π : 未知パラメータベクトル
 ω : 境界条件ベクトル (ルート部)
 ψ : 境界条件ベクトル (自由端)
 $(\sim)$: 無次元化量
 $(\cdot)$: $d(\cdot)/d\tau$

1. ま え が き

振動レベルの低減化はヘリコプタ技術に課せられた古くて新しい難問であるが、最近、能動制御技術や数値的最適設計法を用いた新しい制振技術や防振設計法の研究が盛んとなり、それらの優れた振動軽減能力は既存の防振対策では達成が困難視されていた固定翼機並の振動レベルを実現する有力なアプローチとして注目を集めている。

高次調和操舵 (HHC) や個別ブレード操舵 (IBC) と呼ばれるブレード・ピッチの能動制御^{1,2)} や構造最適化によるロータ・ブレードの防振設計法の研究³⁻⁵⁾ はその代表例である。エネルギー的には前者が能動的、後者は受動的防振法であるが、ヘリコプタの振動の主要な加振源であるロータ変動荷重をロータ系内で最小化する設計概念は共通しており、また、付加質量の装着による重量増加や接触面での磨耗問題など従来の防振装置の欠点を克服している点でもヘリコプタの防振法としてより合理的である。

このような観点から筆者らは HHC⁶⁾ やロータ・ブレードの構造最適化⁷⁾ による振動軽減の基礎研究を行ってきた。本研究では文献⁷⁾ で取り扱ったロータ・ブレードの静的構造最適化の研究を動的問題に拡張し、最適制御手法とモーダル法を用いて新しいロータ・ブレードの最適防振設計法を構築する。ブレードは片持ち支持した回転するプレーン・テーパード・ビームとし、これに定常的な正弦状分布荷重が作用する場合のブレード・ルート部でのせん断荷重およびモーメントを最小化する問題を連続系に対する非線形最適制御問題として定式化し、共役傾斜法を用いた逐次近似⁸⁾ に

より最適断面積分分布を数値的に決定する。ブレードの弾性変形を固有モード展開し、評価関数を固有振動数と固有モードの関数として表現することで構造最適化による振動軽減のメカニズムをモーダル・パラメータとの関連で明らかにすることが本研究の目的である。また、従来のブレードの構造最適化による防振設計では固有振動数の配置を不等式制約条件として定式化することが多いが、本解析ではモード方程式を制約条件の一つとして取り扱うため、固有振動数範囲は数値計算の過程で最適解が得られる範囲として結果的に決定される。このため、本解析法は固有振動数を不等式制約する最適化手法に比べて、最適解をより広い振動数範囲で厳密に探索、決定できる利点を持っている。

2. 定 式 化

ヒンジレス・ロータ・ブレードを片持ち回転はりでモデル化し、これが面外方向分布変動荷重 $f_z(r, t)$ を受ける場合、ルート部での面外せん断荷重及び面内曲げモーメントを最小化する構造最適化問題を考える。座標系は第 1 図に示すように、ブレードの変形前の弾性軸を X 軸とし、これに垂直な Z 軸回りに Ω で回転する回転座標系を用いる。 X 軸はブレードの重心軸でもある。原点はルート部におけるブレードの弾性軸位置とし、 Z 軸は上向き正とする。

ブレードは厚さ h が一定で、幅 c が可変の矩形断面を持つ片持ちプレーン・テーパード・ビームとし、材質は等方等質とする。ブレードの弾性変形は面外曲げ $w(r, t)$ のみを考慮し、軸方向伸び、面内曲げ変形やねじり変形は考えない。また、外力 $f_z(r, t)$ はロータ回転数 Ω を基本振動数とする正弦状面外方向分布変動荷重を想定する。ただし、ブレードの弾性変形に伴う空力ダンピングや後流による空気力の非定常性は無視し、構造減衰も考慮しない。

第 1 図 座標系と記号

ブレードの面外変形に対する運動方程式は

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} \left\{ EI_z(r) \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right\} - \frac{\partial}{\partial r} \left\{ p(r) \frac{\partial w}{\partial r} \right\} + m_b(r) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = f_z(r, t) \quad (1)$$

で記述される。ここで、 $EI_z(r)$ 、 $p(r)$ 、 $m_b(r)$ はそれぞれ半径位置 r におけるブレードの面外曲げ剛性、遠心力、質量であり、プレーン・テーパード・ビームに対しては密度を ρ 、断面積分布を $A(r)$ とすると、それぞれ次の関係がある。

$$EI_z = \alpha AE, \quad \alpha = \frac{h^2}{12} \quad (2)$$

$$p(r) = \int_r^R \rho r \Omega^2 A dr \quad (3)$$

$$m_b(r) = \rho A \quad (4)$$

外力 $f_z(r, t)$ は一般にロータ回転数 Ω を基本振動数とするフーリエ級数で

$$f_z(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} l_n(r) \sin(n\Omega t + \phi_n) \quad (5)$$

と表されるが、ここでは代表的な変動荷重として $n=1$ または b (b はブレード枚数) のみからなる単一振動数変動荷重の場合を扱う。 ϕ_n は外力との位相差である。

w を固有関数展開して

$$w = w(r, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \eta_i(r) \cdot \phi_i(t) \quad (6)$$

とし、レーリ・リッツ法を適用すると

$$\phi_i = \frac{F_{Gi} M_{Gi}}{\omega_i^2 - (n\Omega)^2} \sin(n\Omega t + \phi_n) \quad (i=1, 2, \dots) \quad (7)$$

となる。ここで、 η_i は i 次の固有モードで、 ϕ_i 、 ω_i はそれぞれ $\eta_i(r)$ に対応する一般座標と固有振動数であり、 M_{Gi} 、 F_{Gi} は次式で定義される一般化質量および一般化力である。

$$M_{Gi} = \int_0^R m_b \eta_i^2 dr \quad (i=1, 2, \dots) \quad (8)$$

$$F_{Gi} = \int_0^R l_n \eta_i dr \quad (n=1 \text{ or } b, i=1, 2, \dots) \quad (9)$$

η_i はモード方程式

$$\frac{d^2}{dr^2} \left(EI_z \frac{d^2 \eta_i}{dr^2} \right) - \frac{d}{dr} \left(p \frac{d\eta_i}{dr} \right) - m_b \omega_i^2 \eta_i = 0 \quad (i=1, 2, \dots) \quad (10)$$

を境界条件

$$\eta_i = \frac{d\eta_i}{dr} = 0 \quad (i=1, 2, \dots) \quad \text{at } r=0 \quad (11)$$

$$EI_z \frac{d^2 \eta_i}{dr^2} = \frac{d}{dr} \left(EI_z \frac{d^2 \eta_i}{dr^2} \right) = 0 \quad (i=1, 2, \dots) \quad \text{at } r=R \quad (12)$$

のもとで満足する解である。

外力を与えて w が近似の精度に応じて定まると、

ブレードのルート部での面外せん断荷重は(1)、(6)、(7)、(10)から

$$\begin{aligned} S(0, t) &= \int_0^R \left\{ l_n \sin(n\Omega t + \phi_n) - m_b \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right\} dr \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i \omega_i^2 \int_0^R m_b \eta_i dr \\ &= \left[\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\omega_i^2}{\omega_i^2 - (n\Omega)^2} \frac{F_{Gi} \cdot H_{Gi}}{M_{Gi}} \right] \sin(n\Omega t + \phi_n) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} s_i \sin(n\Omega t + \phi_n) \end{aligned} \quad (13)$$

で与えられる。ここで

$$H_{Gi} = \int_0^R m_b \eta_i dr \quad (i=1, 2, \dots) \quad (14)$$

である。

同様に、ルート部の面内曲げモーメントは

$$\begin{aligned} M(0, t) &= \left[EI_z \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right]_0 = \left[E \alpha A \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right]_0 \\ &= \left[E \alpha A(0) \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{d^2 \eta_i}{dr^2} \right)_0 \frac{F_{Gi} / M_{Gi}}{\omega_i^2 - (n\Omega)^2} \right] \\ &\quad \times \sin(n\Omega t + \phi_n) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} m_i \sin(n\Omega t + \phi_n) \end{aligned} \quad (15)$$

で与えられる。

面外せん断荷重および面内曲げモーメントに対する評価関数はそれぞれ(13)、(15)式の振幅の2乗の総和を用いて

$$I_s = \sum_{i=1}^K (s_i)^2 \quad (16)$$

$$I_m = \sum_{i=1}^K (m_i)^2 \quad (17)$$

と規定した。ただし、 K は考慮する最大モード次数である。

これは両者の振幅が固有振動数や固有モードによって正負いずれの値も取り得るための配慮である。評価関数としては(16)、(17)の代わりにそれぞれのモード次数の振幅の総和の2乗を考えることもできるが、この場合には評価関数の最小値はそれぞれのモード次数に対する振幅が最小となる場合に対応しない。

Taylor⁹⁾ は(13)で与えられる面外せん断荷重の振幅 s_i ($i=1, 2, \dots$) に含まれる $F_{Gi} \cdot H_{Gi} / M_{Gi}$ をモーダル・シェーピング・パラメータと呼び、ブレードの防振設計基準とすることを提唱している。なお、(15)はBramwell¹⁰⁾ が誘導した面内曲げモーメントの振幅 m_i ($i=1, 2, \dots$) と異なった表現となっているが、これは形式上のことに過ぎない。

制約条件には文献7)の問題と同様にブレードの全重量、最小断面積、応力レベルに対する次の3つの条件を課した。

$$\int_0^R \rho g A dr = W \quad (18)$$

$$\sigma_a \geq \frac{p}{A} + E \left| \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right| \frac{h}{2} \quad (19)$$

$$A(r) \geq A_{\min} \quad (20)$$

ここで、 W はブレードの重量、 σ_a はブレードの許容応力、 $A_{\min}$ はブレードの最小断面積を示す。本問題のように動的な構造最適化問題を取り扱う場合には σ_a として疲労限界等を考慮した動的強度を用いる必要があるが、ここでは σ_a を静的強度に対応する応力レベルの 1/2 としている。(19) はブレードの固有振動数、固有モードを用いて表示すると

$$\sigma_a - \frac{p}{A} \geq \frac{Eh}{2} \left| \sum_{i=1}^{\infty} \frac{d^2 \eta_i}{dr^2} \frac{F_{Gi}/M_{Gi}}{(n\Omega)^2 \left(\left(\frac{\omega_i}{n\Omega} \right)^2 - 1 \right)} \right| \quad (21)$$

となるが、数値計算ではこれを

$$\left(\sigma_a - \frac{p}{A} \right)^2 \geq \left\{ \frac{Eh}{2(n\Omega)^2} \right\}^2 \left\{ \sum_{i=1}^K \frac{F_{Gi}/M_{Gi}}{\left(\frac{\omega_i}{n\Omega} \right)^2 - 1} \frac{d^2 \eta_i}{dr^2} \right\}^2 \quad (22)$$

として実施した。

ここで

$$\tilde{r} = r/R \quad (23)$$

$$\tilde{\eta}_i = \eta_i/R \quad (24)$$

$$\tilde{A} = A/(W/\rho g R) \quad (25)$$

$$\tilde{p} = p/(R\Omega^2 W/g) \quad (26)$$

$$\tilde{l}_n = l_n/l_c$$

$$(n=1 \text{ or } b, \quad l_c = \int_0^R l_n dr/R : \text{平均分布荷重}) \quad (27)$$

$$\tilde{\omega}_i = \omega_i/n\Omega \quad (28)$$

$$\tilde{F}_{Gi} = F_{Gi}/l_c R^2 \quad (29)$$

$$\tilde{M}_{Gi} = M_{Gi}/(WR^2/g) \quad (30)$$

$$\tilde{H}_{Gi} = H_{Gi}/(WR/g) \quad (31)$$

$$\tilde{I}_s = I_s/(l_c R)^2 \quad (32)$$

$$\tilde{I}_M = I_M/(Eal_c/\rho R^2(n\Omega)^2)^2 \quad (33)$$

$$C_p = \rho \Omega^2 R^4/Ea \quad (34)$$

$$C_n = n^2 C_p \quad (35)$$

$$K_p = \rho R^2 \Omega^2/\sigma_a \quad (36)$$

$$K_b = El_c g h/2\sigma_a WR(n\Omega)^2 \quad (37)$$

で定義される無次元化量を導入し、不等式制約条件をスラック変数 $\tilde{\xi}$, $\tilde{\zeta}$ を用いて等式化すると、問題は $\tilde{A}$, $\tilde{\xi}$, $\tilde{\zeta}$ を設計変数、 $\tilde{\eta}_i$, $\tilde{v}_i$, $\tilde{B}_i$, $\tilde{T}_i$, $\tilde{F}_i$, $\tilde{M}_i$, $\tilde{H}_i$, $\tilde{Z}$ および $\tilde{p}$ を状態変数とする連続系の制約条件付き最適化問題として次のように定式化される。

Minimize :

$$\tilde{I}_s = C_{Is} \sum_{i=1}^K (\tilde{s}_i)^2, \quad \tilde{s}_i = \frac{\tilde{\omega}_i^2}{\tilde{\omega}_i^2 - 1} \frac{\tilde{F}_{Gi} \cdot \tilde{H}_{Gi}}{\tilde{M}_{Gi}} \quad (38)$$

or

$$\tilde{I}_M = C_{IM} \sum_{i=1}^K (\tilde{m}_i)^2, \quad \tilde{m}_i = \frac{1}{C_E(\tilde{\omega}_i^2 - 1)} \frac{\tilde{B}_{0i} \cdot \tilde{F}_{Gi}}{\tilde{M}_{Gi}} \quad (39)$$

Subject to :

$$\frac{d\tilde{\eta}_i}{d\tilde{r}} = \tilde{v}_i, \quad (i=1, 2, \dots, K) \quad (40)$$

$$\frac{d\tilde{v}_i}{d\tilde{r}} = \frac{\tilde{B}_i}{C_E \tilde{A}}, \quad (i=1, 2, \dots, K) \quad (41)$$

$$\frac{d\tilde{B}_i}{d\tilde{r}} = \tilde{T}_i, \quad (i=1, 2, \dots, K) \quad (42)$$

$$\frac{d\tilde{T}_i}{d\tilde{r}} = -C_E C_p \tilde{r} \tilde{A} \tilde{v}_i + C_p \frac{\tilde{p} \tilde{B}_i}{\tilde{A}} + C_E C_n \tilde{\omega}_i^2 \tilde{A} \tilde{\eta}_i \quad (i=1, 2, \dots, K) \quad (43)$$

$$\frac{d\tilde{F}_i}{d\tilde{r}} = \tilde{I}_n \tilde{\eta}_i, \quad (i=1, 2, \dots, K) \quad (44)$$

$$\frac{d\tilde{M}_i}{d\tilde{r}} = \tilde{A} \tilde{\eta}_i^2, \quad (i=1, 2, \dots, K) \quad (45)$$

$$\frac{d\tilde{H}_i}{d\tilde{r}} = \tilde{A} \tilde{\eta}_i, \quad (i=1, 2, \dots, K) \quad (46)$$

$$\frac{d\tilde{p}}{d\tilde{r}} = -\tilde{r} \tilde{A} \quad (47)$$

$$\frac{d\tilde{Z}}{d\tilde{r}} = \tilde{A} \quad (48)$$

$$\tilde{A} - \tilde{A}_{\min} - \tilde{\xi}^2 = 0 \quad (49)$$

$$\left(1 - K_p \frac{\tilde{p}}{\tilde{A}} \right)^2 - K_b^2 \left(\sum_{i=1}^K \frac{\tilde{F}_{Gi}/\tilde{M}_{Gi}}{\tilde{\omega}_i^2 - 1} \frac{\tilde{B}_i}{C_E \tilde{A}} \right)^2 - \tilde{\xi}^4 = 0 \quad (50)$$

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\eta}_i &= \tilde{v}_i = \tilde{F}_i = \tilde{M}_i = \tilde{H}_i = \tilde{Z} = 0 \\ \tilde{B}_i &= \tilde{B}_{0i}, \quad \tilde{T}_i = \tilde{T}_{0i}, \quad \tilde{p} = \tilde{p}_0 \end{aligned} \right\} \quad (i=1, 2, \dots, K) \quad (51)$$

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\eta}_i &= \tilde{Z} = 1, \quad \tilde{B}_i = \tilde{T}_i = \tilde{p} = 0 \\ \tilde{F}_i &= \tilde{F}_{Gi}, \quad \tilde{M}_i = \tilde{M}_{Gi}, \quad \tilde{H}_i = \tilde{H}_{Gi} \end{aligned} \right\} \quad (i=1, 2, \dots, K) \quad (52)$$

ここで、(40)～(43)は1階の連立常微分方程式で表したブレードのモード方程式、(48)～(50)は制約条件式、(51)、(52)はそれぞれの状態変数に対する境界条件である。 $\tilde{B}_i$, $\tilde{T}_i$ ははりの曲げモーメントとせん断力に対応する無次元状態変数で、 $\tilde{F}_i$, $\tilde{M}_i$, $\tilde{H}_i$, $\tilde{p}$, $\tilde{Z}$ は微分形で表した一般化力、一般化質量、 H_{Gi} , 遠心力そしてブレード重量に対する無次元状態変数である。これらの状態変数の境界値のうち、 $\tilde{p}_0$, $\tilde{B}_{0i}$, $\tilde{T}_{0i}$ はルート部での、 $\tilde{F}_{Gi}$, $\tilde{M}_{Gi}$, $\tilde{H}_{Gi}$ は自由端での未知パラメータとして扱う。(38), (39), (41), (43)で導入した C_{Is} , C_{IM} , C_E は最適解への収束性を向上するための重み係数である。なお、固有モード $\tilde{\eta}_i$ は $\tilde{r} = 1$ で $\tilde{\eta}_i = 1$ となるように正規化している。

本定式化では固有振動数の配置を事前に制約することとはせず、代わりに固有モード方程式を制約条件の一

つとして取り扱う。そのため最適解が得られる固有振動数範囲は数値計算の過程で自ずと制約され、これが結果的に固有振動数の配置に対する制約条件となっている。

ラグランジュ乗数 λ , ρ , σ , μ を用いると拡張された汎関数は

$$\begin{aligned}\bar{J} &= \bar{I} + \int_0^1 \lambda^T (\dot{x} - \phi) d\tilde{r} + \int_0^1 \rho^T S d\tilde{r} \\ &\quad + \sigma^T \omega_0 + \mu^T \phi_1 \\ &= \bar{I} + \int_0^1 (-\lambda^T \phi + \rho^T S - \dot{\lambda}^T x) d\tilde{r} \\ &\quad + (-\lambda^T x + \sigma \omega)_0 + (\lambda^T x + \mu^T \phi)_1\end{aligned}\quad (53)$$

$$\bar{I} = \bar{I}_s \text{ or } \bar{I}_M \quad (54)$$

$$x = [\tilde{\eta}_i, \tilde{v}_i, \tilde{B}_i, \tilde{T}_i, \tilde{F}_i, \tilde{M}_i, \tilde{H}_i, \tilde{p}_i, \tilde{Z}]^T \quad (i=1, 2, \dots, K) \quad (55)$$

$$\begin{aligned}\phi &= \left[\tilde{v}_i, \frac{\tilde{B}_i}{C_E \tilde{A}}, \tilde{T}_i - C_E C_p \tilde{r} \tilde{A} \tilde{v}_i, \right. \\ &\quad \left. + C_p \frac{\tilde{p} \tilde{B}_i}{\tilde{A}} + C_E C_n \tilde{\omega}_i^2 \tilde{A} \tilde{\eta}_i, \right. \\ &\quad \left. \tilde{l}_b \tilde{\eta}_i, \tilde{A} \tilde{\eta}_i^2, \tilde{A} \tilde{\eta}_i - \tilde{r} \tilde{A} \tilde{A} \right]^T \\ &\quad (i=1, 2, \dots, K) \quad (56)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}S &= \left[\tilde{A} - \tilde{A}_{\min} - \tilde{\xi}^2 \left(1 - K_p \frac{\tilde{p}}{\tilde{A}} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. - K_b^2 \left(\sum_{i=1}^K \frac{\tilde{F}_{Gi} / \tilde{M}_{Gi}}{\tilde{\omega}_i^2 - 1} \frac{\tilde{B}_i}{C_E \tilde{A}} \right)^2 - \tilde{\xi}^4 \right]^T \quad (57)\end{aligned}$$

$$\omega = [\tilde{\eta}_i, \tilde{v}_i, \tilde{B}_i - \tilde{B}_{0i}, \tilde{T}_i - \tilde{T}_{0i}, \tilde{F}_i, \tilde{M}_i, \tilde{H}_i, \tilde{p} - \tilde{p}_0, \tilde{Z}]^T \quad (i=1, 2, \dots, K) \quad (58)$$

$$\phi = [\tilde{\eta}_i - 1, \tilde{B}_i, \tilde{T}_i, \tilde{F}_i - \tilde{F}_{Gi}, \tilde{M}_i - \tilde{M}_{Gi}, \tilde{H}_i - \tilde{H}_{Gi}, \tilde{p} - \tilde{p}_0, \tilde{Z} - 1]^T \quad (i=1, 2, \dots, K) \quad (59)$$

$$\lambda = [\lambda_1(\tilde{r}) \dots \lambda_{7K+2}(\tilde{r})]^T \quad (60)$$

$$\rho = [\rho_1(\tilde{r}) \dots \rho_{7K+2}(\tilde{r})]^T \quad (61)$$

$$\sigma = [\sigma_1 \dots \sigma_{7K+2}]^T \quad (62)$$

$$\mu = [\mu_1 \dots \mu_{6K+2}]^T \quad (63)$$

と表すことができる。最適性の条件は(53)に対する第一変分をとることにより

$$\lambda + \frac{\partial \phi}{\partial x} \lambda - \frac{\partial S}{\partial x} \rho = 0 \quad 0 \leq \tilde{r} \leq 1 \quad (64)$$

$$-\frac{\partial \phi}{\partial u} \lambda + \frac{\partial S}{\partial u} \rho = 0 \quad 0 \leq \tilde{r} \leq 1 \quad (65)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \bar{I}}{\partial \pi} + \int_0^1 \left(-\frac{\partial \phi}{\partial \lambda} \lambda + \frac{\partial S}{\partial \pi} \rho \right) d\tilde{r} + \left(\frac{\partial \omega}{\partial \pi} \sigma \right)_0 \\ + \left(\frac{\partial \phi}{\partial \pi} \mu \right)_1 = 0\end{aligned}\quad (66)$$

$$\left(-\lambda + \frac{\partial \omega}{\partial x} \sigma \right)_0 = 0 \quad (67)$$

$$\left(\lambda + \frac{\partial \phi}{\partial x} \mu \right)_1 = 0 \quad (68)$$

で与えられる。ただし、

$$u = [\tilde{A}, \tilde{\xi}, \tilde{\xi}]^T \quad (69)$$

$$\pi = [\tilde{B}_{0i}, \tilde{T}_{0i}, \tilde{F}_{Gi}, \tilde{M}_{Gi}, \tilde{H}_{Gi}, \tilde{p}_0]^T \quad (i=1, 2, \dots, K) \quad (70)$$

である。以上で正弦状分布変動荷重を受けるブレードに対するルート部での面外せん断荷重と面内曲げモーメント最小化問題を最適制御問題として定式化できた。ブレードの最適解は(40)～(52)および(64)～(68)の各式で規定される二点境界値問題を数値的に解くことにより決定される。なお、評価関数を $\bar{I}_M$ とする場合には(55), (58), (59), (64)～(68), (70)の $\tilde{H}_i$, $\tilde{H}_{Gi}$ およびこれに対応する λ , μ 並びに(56)の $\tilde{A} \tilde{\eta}_i$ は不要である。

3. 数値計算結果とその考察

全備重量が10トン程度の4枚ブレード・ヒンジレスロータ・ヘリコプタを対象に数値解析を行う。計算諸元を第1表に示す。ロータ回転数は200 rpm とし、ブレードの物性値はチタン合金の数値を使用している。ただし、許容応力は静的許容応力の1/2とした。面外方向分布変動荷重の無次元半径方向分布は

$$\tilde{l}_n = \tilde{r} + 9\tilde{r}^2 - 10\tilde{r}^3 \quad (71)$$

とし、平均荷重 l_c は52.08 kgf/m とした。これはホバリング時のブレード当たりの定常荷重の1/6に相当する。変動荷重の卓越振動数は1/rev と4/rev の2種類を取り上げる。

第2図は構造最適化による振動軽減効果を明らかにするための比較ブレードとした一様ブレードに対する固有振動数と固有モードである。比較ブレードは重量100.0 kgf, 厚さ100.0 mm, 幅27.7 mm の片持ち支持の一樣矩形断面はりとし、振動特性はMyklestad法¹¹⁾ (100等分割) により計算した。第2表には1/rev

第1表 計算諸元と無次元量

記号	諸元
R	8.0 m
h	0.1 m
b	4
n	1 or 4
W	980.7 N (100.0 kgf)
ρ	4.507×10^3 kg/m ³ (459.6 kgfs ² /m ⁴)
E	107.9 GPa (1.1×10^{10} kgf/m ²)
σ_a	980.7/2.0 MPa (50.0×10^6 kgf/m ²)
Ω	3.33 s ⁻¹ (200 rpm)
l_c	510.8 N/m (52.08 kgf/m)
g	9.807 m/s ²
C_p	90.084
C_n	5.591 ($n=1$), 89.456 ($n=4$)
K_p	0.258
K_b	0.016 ($n=1$), 0.001 ($n=4$)
C_E	0.062

第2図 一様ブレードの固有振動数と固有モード形状

第2表 一様ブレードの振動特性

モード	1/rev		4/rev	
	$(\bar{s}_i)^2$	$(\bar{m}_i)^2$	$(\bar{s}_i)^2$	$(\bar{m}_i)^2$
1次	13.7137	2565.2300	0.0046	218.6258
2次	0.0756	9.3740	0.4845	15372.2802
3次	0.0009	0.0797	0.0016	37.0637
4次	0.0001	0.0056	0.0001	1.6693
5次	5.382×10^{-6}	0.0002	5.712×10^{-6}	0.0581

及び 4/rev の変動荷重に対する一様ブレードの $\bar{s}_i^2$ と $\bar{m}_i^2$ ($i=1, 2, \dots, 5$) の値を各モード毎に示した。第2表から、1/rev 変動荷重に対しては一次モードに対する $\bar{s}_1^2$, $\bar{m}_1^2$ が、4/rev 変動荷重に対しては二次モードに対する $\bar{s}_2^2$, $\bar{m}_2^2$ が卓越していることが分かる。そこで最適化のための数値計算はブレードの面外変形を 1/rev 変動荷重に対しては一次モード、4/rev 変動荷重に対しては二次モードのみで近似して実施した。これは本計算法の設計ツールとしての汎用性を検証するには多少乱暴な仮定と思われるが、本研究の目的はブレードの構造最適化の物理的背景をその振動特性との関連で明らかにすることであり、単項近似したことに伴う計算誤差が最適解が持つべき特性を本質的に変更することはないことを確かめている。

以下、1/rev 変動荷重に対する数値計算をケース 1、4/rev 変動荷重に対するそれをケース 2 とし、数値計算結果の考察を行う。数値計算に用いた評価関数、変動荷重の振動数、制約条件の組み合わせを第3表に示す。制約条件のうちブレード重量 W と許容応力 σ_a は全てのケースで同一とし、最小許容断面積 $\bar{A}_{\min}$ は 0 と 0.3 の場合を取り上げ、後者をケース 2-3 とした。ブレードを 100 等分し、S.C.G.R.A 法⁹⁾ を使用して探索した。

3.1 ケース 1 1/rev 変動荷重に対する数値計算で評価関数を $\bar{s}_1^2$ とした場合をケース 1-1、 $\bar{m}_1^2$ とした場合をケース 1-2 とし、両者に対する数値計算結果を第3～7図に示す。第3図は最適解の存在範囲を横軸にブレードの一次固有振動数比 ω_1 、縦軸に評価関数をとり図示したものである。参考のため図中には一

第3表 数値計算ケース

ケース	評価関数	加振振動数	$\bar{A}_{\min}$
1-1	$(\bar{s}_1)^2$	Ω	0.0
1-2	$(\bar{m}_1)^2$	Ω	0.0
2-1	$(\bar{s}_2)^2$	4Ω	0.0
2-2	$(\bar{m}_2)^2$	4Ω	0.0
2-3	$(\bar{s}_2)^2$	4Ω	0.3

第3図 最適化ブレードの固有振動数と評価関数 (ケース 1)

様ブレードに対する値も示しておいた。同図に示されるように最適解が得られる ω_1 の範囲には制限があり、本計算例では 1.06/rev～1.60/rev となっている。 ω_1 が 1.0/rev 以上をとるのは遠心力の影響であり、上下限は主として応力レベルに対する制約に支配されている。また、評価関数の値はケース 1-1、1-2 ともに ω_1 の増大とともに一旦減少し、その後微増する傾向を示している。これは振動荷重の軽減には ω_1 を 1/rev から分離することが効果的であることを示しているが、両ケースとも評価関数を最小とする ω_1 が存在することは興味深い。最適化ブレードと一様ブレードに対する評価関数の値を比較すると、 ω_1 を一様ブレードの一次固有振動数と同一にした場合にはケース 1-1 で約 60%、ケース 1-2 では約 25%、評価関数が最小値をとる ω_1 ではケース 1-1 で約 94%、ケース 1-2 では約 60%減少しており、ブレードの構造最適化による大幅な振動軽減の可能性が示されている。第4、5図の両図にケース 1-1、1-2 に対する最適解の数値解析結果を ω_1 が一様ブレードと同一の場合と評価関数が最小となる場合 (ケース 1-1: $\omega_1=1.550$ /rev, ケース 1-2: $\omega_1=1.520$ /rev) を例に図示した。前者はブレードの固有振動数比が 1/rev に接近している場合、後者は両者が分離している場合の代表として取り上げた。比較のため一様ブレードに対する計算結果も各図

(a) 最適断面面積分布

(a) 最適断面面積分布

(b) 最適断面面積分布 (拡大)

(b) 最適断面面積分布 (拡大)

(c) モード形状

(c) モード形状

(d) 応力余裕

(d) 応力余裕

(e) 累積断面面積分布

第4図 最適解 (ケース1-1)

(e) 累積断面面積分布

第5図 最適解 (ケース1-2)

に加えた。両図の(a)は最適断面積分布, (b)はその拡大図, (c)は一次固有モード形状, (d)は応力余裕, (e)は累積断面積分布である。

両図の(a)からも明かなように最適断面積分布はルート部と自由端に断面積を集中する特異な平面形状をとっている。本解析ではブレードをプレーン・テーブルド・ビームとしているため, これは質量, 剛性分布もルート部と自由端に集中した分布をとることに対応する。この傾向は累積断面積分布(e)により, より明瞭に示されるが, ω_1 が $1/\text{rev}$ に接近するほど著しく, 文献7) で取り扱った静的構造最適化の場合と同様の傾向である。ルート部, 自由端付近での形状はケース 1-1 とケース 1-2 で若干の差違 (ω_1 が $1/\text{rev}$ に近い場合には, ルート部の分布形状がケース 1-1 では下に凸, ケース 1-2 では上に凹) が認められるが, 評価関数による顕著な差違はない。最適ブレードの中間部での断面積分布は両端でのそれに比較して極めて小さくなるが, 応力レベルに対する制約を課したため当然ゼロとはならない。中間部での断面積分布を明瞭にするため(b)に断面積分布を拡大して示した。一次固有モード(c)は一樣ブレードのそれに比べてルート部での変位が小さく, これは ω_1 が増大するほど顕著であり, ケース 1-1, ケース 1-2 に共通した傾向である。応力の余裕(d)は断面積をルート部と自由端付近で急増させる結果, 中間部では 0 となる領域が存在し, ブレードの最小断面積が応力の制約条件により決定されていることが分かる。

設計変数, 状態変数, 随伴変数, スラック変数の収束過程を, ケース 1-1 ($\omega_1=1.126/\text{rev}$) の $\bar{A}$, $\bar{\eta}_1$, λ_2 (モード形状の状態方程式に対する随伴変数), $\bar{\xi}^2$ (応力の制約条件に対するスラック変数) を例に第 6 図(a)~(d)に示す。各図中, 破線は計算を開始したノミナル値, 太い実線は収束解, 細線はその収束過程であり, 矢印は数値計算の一般的な進行方向を示す。

ブレードの構造最適化による振動軽減のメカニズムを明らかにするため, 評価関数を構成する各パラメータ $\bar{F}_{G1}$, $\bar{M}_{G1}$, $\bar{H}_{G1}$, $\bar{B}_{01}$ の最適解に対応する値を一樣ブレードのそれらと比較して第 7 図に示す。第 4, 5 図と同様, ω_1 に一樣ブレードの固有振動数と同一の場合と評価関数を最小とする場合を例として掲げている。同図から ω_1 を一樣ブレードの固有振動数と同一とした場合の最適解は, ケース 1-1, 1-2 いずれに対してもブレードの一般化外力 $\bar{F}_{G1}$ や一般化質量 $\bar{M}_{G1}$ はあまり減少させずに, 前者では $\bar{H}_{G1}$ を, 後者では $\bar{B}_{01}$ を減少させることにより最適化を図っていることが分かる。これに対して評価関数の値を最小とする場合ではケース 1-1, 1-2 とも $\bar{M}_{G1}$ を大きく減少さ

第 6 図 最適解の収束過程 (ケース 1-1: $\omega_1=1.126/\text{rev}$)

せており, $\bar{F}_{G1} \cdot \bar{H}_{G1} / \bar{M}_{G1}$ は多少減少しているものの $\bar{F}_{G1} \cdot \bar{B}_{01} / \bar{M}_{G1}$ は逆に一樣ブレードのそれより増加している。この事実は評価関数を最小とする最適解では, 最適断面積分布が固有モード形状が関連する $\bar{F}_{G1} \cdot \bar{H}_{G1} / \bar{M}_{G1}$ や $\bar{F}_{G1} \cdot \bar{B}_{01} / \bar{M}_{G1}$ を減少するのではなく, 固有振動数を $1/\text{rev}$ から分離するように決定されることを示している。 $1/\text{rev}$ 変動荷重に対するこのような構造最適化過程の特徴はブレードの面外変形がノードを持たない単調な増加関数であることや外力の分布に(71)式を仮定したことにも関連するが, 最適断面積分

第7図 最適化ブレードと一様ブレードの $\bar{F}_{G1}$, $\bar{M}_{G1}$, $\bar{H}_{G1}$, $\bar{B}_{G1}$ の比較 (ケース1)

第8図 最適化ブレードと一様ブレードの $\bar{F}_{G2}$, $\bar{M}_{G2}$, $\bar{H}_{G2}$, $\bar{B}_{G2}$ の比較 (ケース2)

布が固有振動数の配置により異なった評価関数の最小化メカニズムで決定されていることを明らかにした点は本数値解析により得られた重要な知見の一つである。

3.2 ケース2 外力が4/revの変動荷重に対する数値計算結果を第8～12図および第4表に示す。この場合にも最適解が得られる二次固有振動数 ω_2 の範囲には制限があるが、最適解の存在範囲が加振振動数4/revを境にその上下に分離して存在することおよび評価関数が最適解で0となることはケース1の場合と異なっている。本解析で最適解が得られた二次固有振動数の範囲は、 $\bar{A}_{\min}$ を0とするケース2-1, 2-2では2.24/rev～3.98/revと4.03/rev～5.65/revであった。ただし、 $\bar{A}_{\min}$ を0.3に制約するケース2-3ではこれらは2.35/rev～3.98/revおよび4.03/rev～4.88/revに若干縮小し、評価関数の値も完全に0にならない場合がある。

ケース2はブレードの弾性変形を二次固有モードで近似するため、構造最適化の物理的意味がケース1とは異なることが予想される。そこでケース2の評価関数 $\bar{s}_2^2$, $\bar{m}_2^2$ を構成する各パラメータ $\bar{F}_{G2}$, $\bar{M}_{G2}$, $\bar{H}_{G2}$, $\bar{B}_{G2}$ の値を一様ブレードのそれらとともに第8図に示した。ブレードの二次固有振動数は $\omega_2=3.500/\text{rev}$ と $4.500/\text{rev}$ で代表している。同図に示されるようにケース2の構造最適化の特徴は、ケース1と異なり固有振動数の配置や評価関数の如何に拘わらず $\bar{F}_{G2}$ を0とすることで評価関数を最小化していることである。これにはブレードの弾性変形がノードを有することが有効に利用されており、構造最適化による振動軽減のメカニズムは一次モードを取り扱うケース1の場合に比べてより明瞭である。すなわち、ケース2ではブレ

(a) 最適断面面積分布

(b) モード形状

(c) 応力余裕

第9図 最適解 (ケース2-1)

ードの最適断面面積分布は、弾性変形を外力と直交させるよう決定されている。

第9～10の各図にはケース2-1, 2-2に対するブレ

ードの最適断面分布, 固有モード形状および応力余裕を一樣ブレードのそれらとともに示した. これらの各図からケース 2-1, 2-2 に対する構造最適化の特徴は次のようにまとめられる. まず最適断面分布であるが, これには第 9 図(a), 第 10 図(a)からも明らかのようにケース 1 とは際立った相違点が認められる. すなわちケース 2-1, 2-2 ではケース 1 のように断面を自由端とルートを集中させることはなく, 中間部に断面を集中させている. 中間部で断面が集中する半径位置は ω_2 の配置によりかなり影響を受けるがそれらの間に明瞭な対応はない. また, 評価関数の差による影響もあまりない. 両図(b)の固有モード形状も評価関数の差や ω_2 の配置によりほとんど変わらない. これは固有モード形状が外力と直交するように最適断面分布を決定しているためである. 次に応力余裕であるが, これもケース 1 の場合とは異なった挙動を示し, ω_2 の配置や評価関数によって応力の制約条件がアクティブとなることはない. 応力レベルが制限値をとる以前に $\bar{F}_{G2}$ を 0 とすることが可

能なためである.

設計変数, 状態変数, 随伴変数, スラック変数の収束過程を, ケース 2-1 ($\omega_2=3.500/\text{rev}$) の $\bar{A}$, $\bar{\eta}_2$, λ_2 (モード形状の状態方程式に対する随伴変数), $\bar{\xi}^2$ (応力の制約条件に対するスラック変数) を例に第 11 図(a)~(d)に示す. 各図中, 破線は計算を開始したノミナル値, 太い実線は収束解, 細線はその収束過程であり, 矢印は数値計算の一般的な進行方向を示す.

最後にブレードの許容最小断面 $\bar{A}_{\min}$ を 0 でない有限な値に制約したケース 2-3 に対する数値計算結果

(a) 最適断面分布

(b) モード形状

(c) 応力余裕

第 10 図 最適解 (ケース 2-2)

(a) 断面分布

(b) モード形状

(c) 随伴変数 (λ_2)

(d) 応力余裕

第 11 図 最適解の収束過程 (ケース 2-1: $\omega_2=3.500/\text{rev}$)

(a) 最適断面面積分布

(b) 最適断面面積分布 (拡大)

(c) モード形状

(d) 応力余裕

第12図 最適解 (ケース2-3)

を第12図の(a)~(d)に示す。これは評価関数を $\bar{s}_2^2$ とし $\bar{A}_{\min}$ を 0.3 とした場合であるが、この場合にも固有モード形状は $\bar{A}_{\min}$ を 0 とした場合のそれと大差なく、 $\bar{F}_{G2}$ を 0 とするよう構造最適化されている。ただし、最適断面面積分布は ω_2 の配置にかなり依存し、 $\bar{A}_{\min}$ を有限に制約した結果として、 ω_2 を 4.5/rev とした場合に認められるようなブレード中間部での断面面積の極端な集中が生じる。また、この場合には評価関数の値を完全に 0 とすることはできない。

第4表はケース2の数値解析結果から得られた最適

第4表 最適化ブレードの一次、二次固有振動数

Case	ω_2/Ω	Myklestad 解析	
		ω_1/Ω	ω_2/Ω
2-1	3.500	1.102	3.474
	4.500	1.220	4.481
2-2	3.500	1.185	3.474
	4.500	1.218	4.481
2-3	3.500	1.175	3.477
	4.500	1.079	4.508

断面面積分布を使用してその一次、二次固有振動数を Myklestad 法により求めたものであるが、いずれのケースに対しても二次固有振動数は 1 パーセント以下の誤差で一致している。また、固有モード形状は第 9, 10, 12 図に示した形状とほとんど一致することを確認しているが、二次モードを対象に最適化したブレードの一次固有振動数が 1/rev からかなり分離したものとなっていることは本設計法の実用性を保証する好ましい結果である。

4. 結 言

最適制御手法とモーダル法を用いた新しいロータ・ブレードの防振設計法を提案し、その有用性をヒンジレスロータ・ブレードに対する数値解析結果をもとに検討した。本方法の特色は最適制御手法を用いることにより、問題を離散系ではなく連続系の非線形最適化問題として定式化できること、モーダル方程式を制約条件の一つとして用いるため固有振動数の存在範囲をあらかじめ不等式制約条件として規定する必要がないこと、また、構造最適化による振動軽減のメカニズムをブレードのモーダル・パラメータとの関連で明確にできることである。

本解析ではロータ・ブレードを可変断面の片持ち回転はり（プレーン・テーパード・ビーム）でモデル化し、これが面外方向分布変動荷重を受ける場合のルート部でのせん断荷重やモーメントを最小化する問題を取り扱ったが、数値計算結果はブレードの最適構造に及ぼす評価関数や外力の加振振動数の差違、最小断面面積や応力レベルに対する制約の影響を明瞭に合理的に反映しており、本設計法の実用性、有用性が確認できた。特に、最適解に対する評価関数の影響は比較的小さいこと、最適断面面積分布は外力の加振振動数の差違による卓越振動モードにより著しく異なり得ること、一次モード (1/rev 変動荷重) に対する構造最適化では固有振動数を 1/rev から分離することにより最適化されるのに対し、二次モード (4/rev 変動荷重) に対してはモード形状を外力と直交するよう構造最適化が行わ

れること、及び最小断面積を制約した二次モードの最適化ではブレード中間部での断面積の集中度が顕在化することなどは本数値解析により得られた重要な知見である。

参考文献

- 1) Kottapalli, S., Swanson, S., LeMasurier, P. and Wang, J. : Full-Scale Higher Harmonic Control Research to Reduce Hub Loads and Noise, Proceedings of the 49th Annual Forum of the American Helicopter Society, St. Louis, Mo., May 1993, pp. 1055-1066.
- 2) Ham, N. D. : Helicopter Individual-Blade-Control Research at MIT 1977-1985, Vertica, 11, No. 1/2 (1987), pp. 109-122.
- 3) Friedmann, P. P. and Shanthakumaran, P. : Optimum Design of Rotor Blades for Vibration Reduction in Forward Flight, J. American Helicopter Soc., 29, No. 4 (1984), pp. 70-80.
- 4) Chattopadhyay, A., Walsh, J. L. and Riley M. F. : Integrated Aerodynamic Load/Dynamic Optimization of Helicopter Rotor Blades, J. Aircraft, 28, No. 1 (1991), pp. 58-65.
- 5) Lim, J. W. and Chopra, I. : Aeroelastic Optimization of a Helicopter Rotor Using an Efficient Sensitivity Analysis, J. Aircraft, 28, No. 1 (1991), pp. 29-37.
- 6) 長谷川儀蔵, 猫橋敏文, 長島知有 : 多重調和操舵を受ける前進飛行時のロータハブ変動荷重の空力弾性応答特性 (第1報), 日本航空宇宙学会誌, 41 (1993), pp. 156-170.
- 7) 猫橋敏文, 井星正氣, 長島知有 : 片持ち回転はりの構造最適化, 日本航空宇宙学会誌, 40 (1992), pp. 553-559.
- 8) Wu, A. K. and Miele, A. : Sequential Conjugate Gradient Restoration Algorithm for Optimal Control Problems with Nondifferential Constraints and General Boundary Conditions, Part 1, Optimal Control Application & Methods, 1 (1979), pp. 69-88.
- 9) Taylor, R. B. : Helicopter Vibration Reduction by Rotor Blade Modal Shaping, Proceedings of the 38th Annual Forum of the American Helicopter Society, Anaheim, Ca., May 1982, pp. 90-101.
- 10) Bramwell, A. R. S. : Helicopter Dynamics, Edward Arnold, 1976.
- 11) Thomson, W. T. : Vibration Theory and Application, Prentice-Hall, 1965.