—技術ノート—

TECHNICAL NOTE

楕円軌道の簡易な解法^{*1} Simple Solution of Elliptical Orbits

川瀬 成一郎^{*2}
Seiichirou KAWASE

Key Words: Artificial Satellite, Orbital Motion, Numerical Technique

Abstract

This paper presents a simple numerical procedure for determining the true anomaly as a function of time in elliptical orbital motions. Applying Kepler's second law to a number of satellite-position samples over one revolution yields directly the solution, where solving Kepler's equation is not required. The procedure can be coded in a few instruction lines. True anomaly errors as depending on the eccentricity are evaluated.

1. はじめに

人工衛星の軌道が描く楕円の形は、軌道長半径 a と離心率 e を与え、衛星位置を地心極座標 (r, θ) で表すならば

$$r = a(1 - e^2) / (1 + e \cos \theta) \quad (1)$$

という公式によって直ちに定まる。一方、この楕円上における衛星の動き方、すなわち公転角 θ の時間 t に対する関係を定めようとする、それは直ちにはいかず、ケプラーの方程式を解くなどの一連の作業を要する¹⁾。その作業によればたしかに任意の厳密さをもって衛星位置を算出できるのだが、計算処理は反復ループをとまなう込み入ったものになってしまう。

ところで軌道の計算がすべて、厳密さを求めるといふわけではない。たとえば近年関心が高まってきた非静止衛星²⁾による通信サービスの検討においては、軌道の形をいろいろに仮定しつつ地上ユーザへの衛星仰角・方位角の現れ方を調べるのだが、そのさい衛星視方向の算出精度は、通信用アンテナのビーム幅よりも細かければよいことから、ふつう 0.1 度前後で足りる。すると公転角の算出については、衛星高度を低めに 600 km としても、0.01 度の精度があればよい。このように、ある一定の精度まででよいとするならば、それに応じて簡略化され、その分わかりやすく従って

使いやすい軌道運動の解法があってもよいはずである。そのような簡略解法のひとつを以下に示したい

2. 面積分割による解法

“面積速度が一定である”とするケプラーの第2法則から、直接に公転角 θ と時間 t の関係を決めることを考えよう。ここで面積速度とは周知のとおり、地心と衛星を結ぶ動径が単位時間に掃く面積のことである³⁾。いま衛星が軌道を1周回するものとして(第1図を参照)、そのときの衛星位置のサンプル (r_i, θ_i) , $i=0, 1, \dots, N$ を、 θ_i が一定の間隔 $\Delta\theta = 2\pi/N$ をもって並ぶようにとる。ただし衛星は時刻 $t=0$ に近地点 $\theta = \theta_0 = 0$ にあり、以下、時刻順に θ_i が増して行って $\theta_N = 2\pi$ に至るものとする。このとき、 $\theta = \theta_{i-1}$ と $\theta = \theta_i$ がはさむ楕円のセクターの面積 A_i は、 N が大きければ

$$A_i = (1/2) r_{i-1} r_i \Delta\theta \quad (2)$$

と近似される。ただし r_{i-1} と r_i は(1)式により求める。すると楕円の全面積は近似的に

$$A = \sum_{i=1}^N A_i \quad (3)$$

に等しい。この軌道を衛星が1周回するに要する時間は、ケプラーの第3法則により

$$P = 2\pi \sqrt{a^3/\mu} \quad (4)$$

であるから ($\mu = 398600.5 \text{ km}^3/\text{s}^2$ は万有引力定数と地球質量との積)、面積速度が

$$p = A/P \quad (5)$$

と算出される。すると、衛星の公転が θ_{i-1} から θ_i まで進むに要する時間は

$$t_{i-1,i} = A_i/p \quad (6)$$

であるから、衛星が $\theta = \theta_i$ の点を通る時刻は

$$t_i = \sum_{k=1}^i t_{k-1,k} = (P/A) \sum_{k=1}^i A_k \quad (7)$$

である。これを $i=1, 2, \dots, N$ について算出すると、1

^{*1} 平成8年2月13日原稿受理

^{*2} 郵政省通信総合研究所鹿児島宇宙通信センター

第1図 衛星位置サンプル

第2図 公転角算出誤差の例 ($N=400$, $e=0.8$)

周回分の“公転表” (t_i, θ_i) が得られ、これが我々の知りたかったことに他ならない。なお、ここではサンプル位置 $i=0$ を近地点に合わせたが、どのサンプル位置を $i=0$ とおいても計算手順は同じである。

3. 公転表の精度

公転表の算出誤差を見るためには次のようにすればよい。あるサンプル位置 θ_i について算出された通過時刻 t_i に対して、ケプラーの方程式にもとづく解法により t_i における“正しい”公転角 $\bar{\theta}_i$ を求める。 $\theta_i - \bar{\theta}_i$ を公転角算出誤差とおけば、それは1周回にわたってたとえば第2図のように現れる。ここから1周回中の最大の算出誤差を拾い出すと、それはサンプル数 N と離心率 e に対して第3図のように依存する。とくに離心率を一定としたとき、算出誤差はサンプル数の自乗に逆比例することがわかる。ひとつの目安としてサンプル数を500とするならば、最大0.9までの離心率に対して公転角算出誤差が0.01度以内に抑えられる。

第3図 公転表の誤差基準

4. 公転表の補間

算出された公転表では、 θ_i が等間隔、したがって t_i が非等間隔である。このことは表の用い方にどう影響するだろうか。たとえば高仰角をめざす通信サービスの検討においては、衛星が1周回する時間の内、遠地点前後のある範囲内に留まる割合がどれだけあるかということが重要である。このような滞留時間分布を調べるさいに、 θ_i が等間隔であることは有利に働く。あるいはまた衛星の動きをコンピュータスクリーンに映して観察する場合を考えよう。あるサンプル (r_i, θ_i) について表示し、待ち時間 $t_{i+1} - t_i$ をおいてから次のサンプル (r_{i+1}, θ_{i+1}) に進み、これを繰り返していく。すると、 θ_i が等間隔であることにより、 t_i を等間隔とした場合に比べて衛星の動きが軌道全周に

第4図 θ_1, θ_2 から θ_i を補間

わたって滑らかに見えることになり、その効果は離心率が大きいほど著しい。これらは公転表をそのまま用いるのが良い場合の例である。

しかしながら t_i を等間隔にとりたい場合や、時刻を任意に与えて衛星位置を知りたい場合を排除するわけにはいかないであろうから、表を補間することを考

えておく必要がある。いま、隣あう2つのサンプル (t_1, θ_1) および (t_2, θ_2) から、 $t_1 < t < t_2$ である時刻 t における θ_t を補間するものとしよう (第4図)。そのさい単に直線補間したのでは、 θ の時間変化が非直線的であることにともなう誤差を生じるため、第3図が表す誤差基準に数倍の倍率を掛けなければならなくなってしまう。ここでは、そのような精度低下をきたさないような補間法を考えよう。第4図において $\theta = \theta_1$ と $\theta = \theta_2$ がはさむ楕円セクターの面積を A_t とすると、面積速度が一定であることから

$$A_t = (r_1 r_2 \Delta\theta / 2)(t - t_1) / (t_2 - t_1) \quad (8)$$

となっているはずである。半径 r の、 θ に対する変化—時間 t に対する変化ではないことに注意—を直線近似することにより、時刻 t における半径を

$$r_t = r_1 + (r_2 - r_1)(\theta_t - \theta_1) / \Delta\theta$$

とおけば、上記のセクター面積は

$$\begin{aligned} A_t &= \frac{r_t r_1 (\theta_t - \theta_1)}{2} \\ &= \frac{r_1 (r_2 - r_1) (\theta_t - \theta_1)^2}{2 \Delta\theta} + \frac{r_1^2 (\theta_t - \theta_1)}{2} \end{aligned} \quad (9)$$

と書ける。(8)、(9)式の各右辺を等しいとおけば $\theta_t - \theta_1$ に関する2次方程式を得るので、それを解いて意味のあるほうの解をとれば、

$$\theta_t = \theta_1 + \Delta\theta \frac{\sqrt{1 + 4 \frac{r_2}{r_1} \frac{r_2 - r_1}{r_1} \frac{t - t_1}{t_2 - t_1} - 1}}{2 \frac{r_2 - r_1}{r_1}} \quad (10)$$

という補間式を得る。この補間式を用いるとき、公転角算出誤差はつねに第3図の基準に従うとしてよいことが、厳密解との比較によって確かめられた。

5. おわりに

基本公式(1)、(4)のほかに4つの計算式(2)、(3)、(7)、(10)だけを用いることにより、ケプラーの方程式を介することなしに楕円軌道上の運動を解くことができることがわかった。面積速度の法則を直接に用いただけであるから、そこには原理上新しいことはない。しかしこれほど簡略な解法が、悪くない精度をもつことは注目に値しよう。このことを指摘した文献が見あたらないので敢えて報告したが、これによって、楕円軌道の計算がより親しみやすいものになるのではないだろうか。

参考文献

- 1) たとえば室津義定：宇宙航行力学，共立出版，1993。
- 2) 下世古幸雄，飯田尚志：世界の衛星，日本ITU協会，1991。