——技術ノート——

TECHNICAL NOTE

亜音速揚力面に現れる対数型特異積分公式の精度について^{*1}

On the Accuracy of a Quadrature for the Logarithmic Singular Integral in Subsonic Lifting Surface

市 川 正 美^{*2}

Masami ICHIKAWA

Key Words: Lifting Surface, Logarithmic Singular Integral, Error Analysis

Abstract

This paper evaluates the accuracy of the quadrature formula for the logarithmic singular integral; $\int_{-1}^1 \sqrt{(1-\xi)/(1+\xi)} f(\xi) \ln|x-\xi| d\xi$, appeared in the numerical method of unsteady subsonic lifting surface. Its accuracy is estimated by the expansion method with the orthogonal polynomials relative to the weighting function $\sqrt{(1-\xi)/(1+\xi)}$, on the assumption that the function f is a polynomial. This analysis shows that the precision degree of their n -points quadrature can not exceed n in general, and that it is not improved even if the control point x is set to that of Stark's quadrature formula.

1. ま え が き

亜音速流中で調和振動する薄翼の垂直速度と圧力とを関係づける揚力面積分方程式は正則積分の他に以下に示すコーシー型・対数型の特異積分を含んでいる。

$$\int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-\xi}{1+\xi}} \frac{f(\xi)}{x-\xi} d\xi \quad (1)$$

$$\int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-\xi}{1+\xi}} f(\xi) \ln|x-\xi| d\xi \quad (2)$$

ここで関数 $\sqrt{(1-\xi)/(1+\xi)}$ は薄翼の前・後縁特異性を表す重み関数であり、また関数 $f(\xi)$ は比較的挙動の良い未知関数である。これらの特異積分の数値的処理は解の精度に影響することはよく知られている。

式(1)に対しては Stark による積分公式¹⁾があるが、そこでは積分点(あるいは標本点)のみならずコントロール点 x も特定されている。一方、式(2)の対数型特異積分に対しては以下の積分公式が提出されている²⁾。

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-\xi}{1+\xi}} f(\xi) \ln|x-\xi| d\xi \\ & \approx -\frac{2\pi}{2n+1} \sum_{r=1}^n f(\xi_r) \sum_{k=0}^{n-1} \{ \cos(k+1)\theta_r \\ & \quad + \cos k\theta_r \} \tilde{H}_k(\varphi) \end{aligned} \quad (3)$$

ただし $x = -\cos \varphi$ であり、また

$$\begin{aligned} \xi_r &= -\cos \theta_r, \quad \theta_r = \frac{2r-1}{2n+1} \pi \quad r=1, 2, \dots, n \\ \tilde{H}_k(\varphi) &= \begin{cases} \ln 2 + \cos \varphi & k=0 \\ \frac{\cos k\varphi}{k} + \frac{\cos(k+1)\varphi}{k+1} & k \geq 1 \end{cases} \end{aligned} \quad (4)$$

という関係がある。この式(3)および(4)は、1) 直交多項式の零点を積分点として用いる、2) コントロール点 x に関する制限がない、という点で Gauss 型積分公式および Stark の積分公式との同時使用に対して親和性がある。実際、3次元の亜音速非定常揚力面の数値計算法などに利用され、数値解の精度等の向上に有用であった³⁾。しかし、この公式の精度に関しては数値的検討⁴⁾が行われているが数理的証明は与えられていないようである。

本報告はこれらに関して数理的な側面から検討した結果について報告する。

2. 解 析

2.1 式(3)の導出 重み関数 $\sqrt{(1-\xi)/(1+\xi)}$ に関して直交する n 次の多項式 $G_n(\xi)$ は次式で与えられる。

$$G_n(\xi) = \frac{T_{n+1}(\xi) - T_n(\xi)}{1-\xi} \quad (5)$$

ここで $T_n(\xi)$ は n 次の第1種チェビシェフ多項式であり、また次の関係式が成り立つ

$$\int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-\xi}{1+\xi}} G_m(\xi) G_n(\xi) d\xi = \pi \delta_{mn} \quad (6)$$

^{*1} 平成7年11月2日原稿受理

^{*2} 岡山県立大学情報工学部

ただし δ_{mn} は Kronecker のデルタである。いま関数 $f(\xi)$ を $m(\geq n)$ 次多項式とすると次式が成り立つ。

$$f(\xi) = \sum_{r=1}^n g_r(\xi) f(\xi_r) + F(\xi) G_n(\xi) \quad (7)$$

ただし $g_r(\xi)$ は $G_n(\xi)$ の零点 $\{\xi_r\}_{r=1-n}$ を標本点とするラグランジェ補間係数であり、また $F(\xi)$ は $m-n$ 次の多項式である。式(7)の右辺第1項を式(2)に代入し、積分を行うと次式を得る。

$$\begin{aligned} & \sum_{r=1}^n f(\xi_r) \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-\xi}{1+\xi}} g_r(\xi) \ln |x-\xi| d\xi \\ &= -\frac{2\pi}{2n+1} \sum_{r=1}^n f(\xi_r) \sum_{k=0}^{n-1} \{ \cos(k+1)\theta_r \\ & \quad - \cos k\theta_r \} H_k(\varphi) \end{aligned} \quad (8)$$

ただし $\xi_r = \cos \theta_r$, $x = \cos \varphi$ である。また $H_k(\varphi)$ は次式で定義される関数である。

$$H_k(\varphi) = \begin{cases} \ln 2 - \cos \varphi & k=0 \\ \frac{\cos k\varphi}{k} - \frac{\cos(k+1)\varphi}{k+1} & k \geq 1 \end{cases} \quad (9)$$

これらが式(3)および(4)に相当する。変数変換が異なっているので符号等に差異があるが本質的な相異ではない。したがって式(7)の右辺第2項から式(3)の精度を評価できる。

2.2 精度評価 式(7)における関数 $F(\xi)$ は $m-n$ 次の多項式であるから直交多項式系 $\{G_k(\xi)\}_{k=0 \sim m-n}$ を用いて以下のように展開できる。

$$F(\xi) = \sum_{k=0}^{m-n} a_k G_k(\xi) \quad (10)$$

ただし係数 a_k は次式によって定められる。

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-\xi}{1+\xi}} F(\xi) G_k(\xi) d\xi \quad (11)$$

また次の関係式は容易に確認できる。

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-\xi}{1+\xi}} G_j(\xi) G_k(\xi) \ln |x-\xi| d\xi \\ &= \frac{\cos(j+k+1)\varphi}{j+k+1} - \begin{cases} \frac{\cos |j-k|\varphi}{|j-k|} & j \neq k \\ \ln 2 & j = k \end{cases} \end{aligned} \quad (12)$$

ただし、 $x = \cos \varphi$ である。したがって式(7)の右辺第2項を式(3)に代入したものを $\varepsilon(x)$ とおくと最終的に次式を得る。

$$\begin{aligned} \varepsilon(x) = \pi \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} A_k(\varphi) a_k + \left(\frac{\cos(2n+1)\varphi}{2n+1} - \ln 2 \right) a_n \right. \\ \left. + \sum_{k=n+1}^{m-n} B_k(\varphi) a_k \right\} \end{aligned} \quad (13)$$

ただし

$$\begin{aligned} A_k(\varphi) &= \frac{\cos(n+k+1)\varphi}{n+k+1} - \frac{\cos(n-k)\varphi}{n-k} \\ B_k(\varphi) &= \frac{\cos(n+k+1)\varphi}{n+k+1} - \frac{\cos(k-n)\varphi}{k-n} \end{aligned} \quad (14)$$

である。しかし $A_0(\varphi)$ ですら恒等的に0とはならないことは容易に分かる。また係数 a_0 も一般に0では

ない。すなわち式(3)は一般に被積分関数 $f(\xi)$ が $n-1$ 次までの多項式である場合に厳密な値を与えることと結論される。

ところで付録に記したように式(1)に対する Stark の積分公式は付録の式(A-3)から定まる n 個のコントロール点においてのみ $2n$ 次までの多項式に対して厳密な値を与える。したがって式(3)においてコントロール点を特定した場合には n 次以上の多項式に対して厳密な結果を与える可能性も考えられる。そこで式(3)におけるコントロール点を実際の揚力面数値計算において使用される Stark 法のコントロール点とした場合の式(3)の精度について考察しておく。

付録の式(A-3)から Stark 法におけるコントロール点 x は次のようになる。

$$x_l = \cos \varphi_l$$

ただし、

$$\varphi_l = \frac{2l-1}{2n+1} \pi, \quad l=1, 2, \dots, n$$

これを式(13)に代入、整理するとその右辺第1項の総和部分は次式となる。

$$\begin{aligned} \varepsilon(x_l) &= (-1)^{l-1} \pi \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2n+1}{(n-k)(n+k+1)} a_k \\ & \quad \times \cos \frac{l+n+k(2l-1)}{2n+1} \pi \end{aligned} \quad (15)$$

この式(15)の右辺に現れる余弦関数は如何なる k, l の組み合わせに対しても非零であることを示すことは容易である。したがって前述と同じ理由により Stark 法のコントロール点を用いたとしても式(3)は依然として、 $n-1$ 次までの多項式に対して厳密な値を与えるに過ぎない。

3. 結 論

本報告では非定常揚力面積分方程式に現れる対数型特異積分に対して示されている積分公式の精度について考察を行った。それはラグランジェ補間に基づいて導出されたものであるが、その精度については数値的考察のみに限られていた。本報告の結果として以下のことが言える。

式(3)における n 点数値積分公式は一般に $n-1$ 次までの多項式に対して厳密な結果を与える。またこの公式において Stark 法のコントロール点を適用した場合も同様に $n-1$ 次までの多項式に対してのみ厳密な結果を与える。

最後に本論が対象とした積分公式は異なる種類の特異性が混在する揚力面積分方程式の数値解法において非常に有用であることは既に幾つかの報告で実証され

ていることを再度付記しておく

参考文献

- 1) Stark, V. J. E.: A Generalized Quadrature Formula for Cauchy Integrals, AIAA J., 9 (1971), pp. 1854-1855.
- 2) Ando, S. and Ichikawa, A.: Quasi-Doublet-Lattice Method for Oscillating Thin Airfoils in Subsonic Flow, Trans. Jpn. Soc. Aero. Space Sci., 26 (1983), pp. 163-173.
- 3) Ando, S. and Ichikawa, M.: A New Numerical Method of Subsonic Lifting Surfaces—BIS, Trans. Jpn. Soc. Aero. Space Sci., 29 (1986), pp. 110-118.
- 4) Ando, S., Lee, D. H. and Asami, K.: Comparative Study of Various Quadratures for Subsonic Lifting Surface Chordwise Integrals, Trans. Jpn. Soc. Aero. Space Sci., 27 (1984), pp. 155-168.

付録 Stark の積分公式について

本文の式(1)に対する Stark の積分公式は重み関数を特定しない一般的な形で与えられているが、ここでは $\sqrt{(1-\xi)/(1+\xi)}$ に対する Stark の積分公式を本論の手法に基づいて示しておく

本文の第2.1節における内容を式(1)に適用すると、本文の式(8), (13)に対応して以下の式 (A-1), (A-2) が得られる。

$$\sum_{r=1}^n f(\xi_r) \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-\xi}{1+\xi}} \frac{g_r(\xi)}{x-\xi} d\xi$$

$$= \frac{2\pi}{2n+1} \sum_{r=1}^n \frac{\sin \theta_r/2}{\cos \theta_r/2} \left\{ 1 - \frac{\cos \theta_r/2}{\cos(2n+1)\theta_r/2} \right. \\ \left. \times \frac{\cos(2n+1)\varphi/2}{\cos \varphi/2} \right\} f(\xi_r) \quad (\text{A-1})$$

$$\epsilon(x) = \frac{2\pi}{\sin \varphi} \left\{ \cos \frac{2n+1}{2} \varphi \sum_{k=0}^n a_k \sin \frac{2k+1}{2} \varphi \right. \\ \left. + \sin \frac{2n+1}{2} \varphi \sum_{k=n+1}^{m-n} a_k \cos \frac{2k+1}{2} \varphi \right\} \quad (\text{A-2})$$

ただし本文と同じく $\xi_r = \cos \theta_r$, $x = \cos \varphi$ である。式 (A-2) は式 (A-1) が一般に $n-1$ 次までの多項式に対して厳密であることを示している。しかし、以下に示す式 (A-3) を満足するコントロール点 x の場合には式 (A-2) の右辺第1項の総和部分が消滅する。したがって、この場合には式 (A-1) は $2n$ 次までの多項式に対して厳密な結果を与えることになる。

$$\cos \frac{2n+1}{2} \varphi = 0, \quad \therefore \varphi = \frac{2l-1}{2n+1} \pi; \quad l=1, 2, \dots, n \quad (\text{A-3})$$

これは重み関数 $\sqrt{(1-\xi)/(1+\xi)}$ における Stark 法のコントロール点を与える式であり、このとき式 (A-1) は Stark の公式となる。