パラメータ領域を利用した適応二次安定化制御系の構成^{*1}

Synthesis of Adaptive Quadratic Control Systems Using Parameter Region

太田 裕 文^{*2}・山中 浩 二^{*3}

Hirobumi OHTA, Koji YAMANAKA

松 岡 美 和^{*4}

and Miwa MATSUOKA

Key Words: Adaptive Control, Flight Control, Quadratic Stabilization, Parameter Region**Abstract**

There still remain many problems to be solved for conventional adaptive control theory to be applied to a real plant. Some of them are restrictive conditions imposed on the plant, low robustness and poor transient properties. To overcome these problems, we present a new design method of adaptive controllers that are robust to plant noise and uncertainties and have a good transient property. We first propose an algorithm to evaluate and reduce the parameter region in which the transfer function of a real plant exists. According to these plant informations, we can judge how closely the identification is made towards real parameters and whether it is better to continue identification or to execute some control strategy. Stabilizability of the plant is determined by one Riccati equation so that the plant can be stabilized by a quadratic stabilization controller. Some numerical examples together with application to a flight controller design are given to illustrate and substantiate the effectiveness of the proposed method.

1. は じ め に

適応制御とは、プラントの特性変動に応じて制御系を自動調整し、制御対象の性能をつねに良好に保つことを目的とした制御方式であり、航空機等の動作環境の変化を伴う制御対象に有効である。航空機の飛行制御系は、離陸してから目的地に着陸するまで高度や速度の大きく違った様々な環境におかれ、それに応じて空力特性も大幅に変わる。従って、航空機の入出力情報によって機体の動特性を推定し、その情報に基づいて制御系を構成していくという考えは極めて自然なも

のである。ところが現状の適応制御理論を航空機等へ応用する場合、その過渡状態での入出力特性の問題が大きな障害となる。それは適応制御系が、過渡状態において実現不可能な入力や不適切な出力を発生してしまうことである。

適応制御系は基本的に同定則やパラメータ調整則と制御則の結合したものである。しかし本質的に非線形であり、無限時間での収束性を基本に理論が構成されているために、過渡特性に対する一般的な解析は困難であり、扱っている論文も少ない。

代表的な適応制御則であるモデル規範形適応制御システム(MRACS)は、モデルマッチングの特性を生かした方法であるが、プラントに課される制約条件が多く、またたとえ信号の有界性が保証されたとしても、パラメータ調整則と制御則との相互干渉による入出力変化を予め評価することは容易でない。Miller らの過渡特性を考慮した MRACS は¹⁾、その論文にも述べられている通り、基本的にハイゲイン制御に基づいており、実用上困難を伴うものである。

相互干渉の問題はパラメータ調整と制御が同時に行われることに起因する。その観点からも、パラメータ同定則及び状態推定器(もしくはそれらの機能を合わせ持つ適応観測器)と何らかの制御則、例えば極配置や最適レギュレータを分離して利用すれば理論的見通しが比較的容易になる。Samson らの LQ アプローチ²⁾は非最小位相系にも用いることができる上、入出力の重みをうまく選べば特性も比較的良好である。もっとも、重みの選定と入出力特性の関係は、初期値、同定則の設定パラメータ等も含めた強い非線形であり、最適レギュレータのような定性的な性質は持ち得ない。

本研究では現状の適応制御理論の問題点を踏まえ、過渡特性を改善することを試みる。そのため一般の適

^{*1} 平成 4 年 11 月 18 日、第 9 回誘導制御シンポジウムで一部発表。平成 8 年 3 月 21 日原稿受理

^{*2} 大阪府立大学工学部

^{*3} 宇宙開発事業団

^{*4} 名古屋大学大学院

応制御則が持つ同定則の他に、パラメータ存在領域を逐次縮小する機構を設け、同定値の真値からのずれを「誤差」として評価し、最近のロバスト制御理論との融合を図る。

2. パラメータ存在領域

前述の通り、適応制御系の過渡特性を悪化させている最大の原因は、パラメータ調整則と制御則の相互干渉である。適応制御とはそもそも未知なる系に対する制御ではあるが、プラントの情報が「未知」である状態で積極的な制御を行うことに意味があるとは考えにくい。しかし一方で、プラントの情報が十分に得られるのをただ待つというのでも適応制御の有効性は発揮されない。結局、各時間で、同定値が真値に対してどれくらい「良好」なものであるかを何らかの形で評価し、その情報に対して最も有効な制御則を決めることが必要である。

この評価の手法の一つとして「パラメータ存在領域」の利用を考える。パラメータ存在領域とは、未知パラメータからなる未知ベクトル θ のそれぞれの要素 θ_i が存在する領域 $[\theta_i^{\min}, \theta_i^{\max}]$ のことであり、空間の中で θ を含む超立方体である。存在領域は、元々適応制御系の可制御性を論じるために用いられ、同定値がその領域内に含まれるように同定則を修正して利用された³⁾。実際の制御対象を考えれば、各パラメータは物理的に上下限を持っており、その意味で存在領域を仮定することは自然である。そこで、初期パラメータ存在領域を逐次縮小することにより、より正確な未知パラメータの値を求めることができる。

存在領域の逐次縮小は、適応制御系のオーバーシュートを防ぐアルゴリズムに利用するために、離散時間系について考えられている⁴⁾。ただしそのアルゴリズムは最小二乗形同定則の特徴が取り入れられていない為に収束が遅く、従ってプラントの情報が未獲得な状態が長く続いてしまうことになる。前述したように、プラントの情報未知の場合、積極的な制御は行わない方が合理的ではあるが、不安定なプラントに対してプラント未知の状態が長く続くことは望ましくない。そこで逐次縮小アルゴリズムは、i) 入力 u が PE (Persistent Exciting) 条件⁵⁾を満たすならばパラメータの真値に向かって縮小されること、ii) 振幅の小さい入力に対しても縮小されること、iii) 収束が速いことの三つの特性を有すべきである。

3. パラメータ存在領域縮小

本節では上記の特性を備えたパラメータ領域縮小アルゴリズムを、離散時間系及び連続時間系それぞれに

対して構成する。

3.1 離散時間系 対象とするシステムは入出力の時系列モデルとして

$$y(k) = -\sum_{j=1}^n a_j y(k-j) + \sum_{j=1}^n b_j u(k-j) \quad (1)$$

のように書かれるとする。ここで $y(k)$ は出力、 $u(k)$ は制御入力である。また、 a_j, b_j は未知であるので (1) 式を

$$y(k) = \xi^T(k-1)\theta \quad (2)$$

と同定に便利な形に書き直す。 θ は未知パラメータからなる $2n$ 要素のベクトル、 ξ は過去の入出力からなる $2n$ 要素の回帰ベクトルで、それぞれ次のようになる。

$$\xi(k-1) = [-y(k-1) \cdots -y(k-n)$$

$$u(k-1) \cdots u(k-n)]^T$$

$$\theta = [a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_n \ b_1 \ b_2 \ \cdots \ b_n]^T$$

以上のシステムに対し、パラメータ領域縮小のためのアルゴリズムを以下に与える。ただし以降の式に現れる $\|A\|_\infty$ は

$$\|A\|_\infty \equiv \max_i \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$$

と定義されるものとする。

《アルゴリズム 1》

1. 真値 θ の各要素 θ_i に対して、 $\theta_i^{\max}(0) - \theta_i \geq 0$, $\theta_i^{\min}(0) - \theta_i \leq 0$ ($i=1, 2, \dots, 2n$) となるような $[\theta_i^{\min}(0), \theta_i^{\max}(0)]$ を評価する。

2. $\gamma = \frac{1}{2} \max_i (\theta_i^{\max}(0) - \theta_i^{\min}(0))$ ($i=1, 2, \dots, 2n$) とおく。

3. 次の (指数重み付き) 最小二乗同定則を用いて θ の推定値 $\hat{\theta}(k)$ を計算する。

$$\begin{aligned} \hat{\theta}(k) &= \hat{\theta}(k-1) \\ &\quad - \frac{\Gamma(k-1)\xi(k-1)[\xi^T(k-1)\hat{\theta}(k-1) - y(k)]}{\lambda + \xi^T(k-1)\Gamma(k-1)\xi(k-1)} \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \Gamma(k) &= \frac{1}{\lambda} \left[\Gamma(k-1) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\Gamma(k-1)\xi(k-1)\xi^T(k-1)\Gamma(k-1)}{\lambda + \xi^T(k-1)\Gamma(k-1)\xi(k-1)} \right] \end{aligned} \quad (4)$$

$$\Gamma(0) = \Gamma^T(0) > 0, \quad 0 < \lambda \leq 1$$

4. $\alpha(k) = \lambda^k \|\Gamma(k)\Gamma^{-1}(0)\|_\infty \gamma$ を計算する。

5. すると以上より、 k 時での θ_i の存在領域が

$$\begin{aligned} \theta_i^{\min}(k) &= \max[\theta_i^{\min}(k-1), \hat{\theta}_i(k) - \alpha(k)] \\ \theta_i^{\max}(k) &= \min[\theta_i^{\max}(k-1), \hat{\theta}_i(k) + \alpha(k)] \\ (i=1, 2, \dots, 2n) \end{aligned} \quad (5)$$

で与えられる。

アルゴリズム 1 で得られるパラメータ領域に関して

次の定理が成り立つ.

[定理 1] アルゴリズム 1 で得られる $\theta_i^{\min}(k)$, $\theta_i^{\max}(k)$ ($i=1, \dots, 2n$) は以下の関係を満たす.

1. $\theta_i^{\min}(k) \leq \theta_i \leq \theta_i^{\max}(k) \quad \forall k$
2. $\theta_i^{\min}(k-1) \leq \theta_i^{\min}(k) \quad \forall k$
 $\theta_i^{\max}(k-1) \geq \theta_i^{\max}(k) \quad \forall k$
3. ベクトル $\zeta(k)$ が PE 条件を満たし, $\|\Gamma(k)\|_\infty$ が有界ならば, $\theta_i^{\min}(k)$, $\theta_i^{\max}(k)$ は真値 θ_i に収束する.

定理 1 を証明するために次の補題を利用する.

[補題 1] ベクトル $\zeta(k)$ が PE であり, $\|\Gamma(k)\|_\infty$ が有界ならば, $\phi(k) = \hat{\theta}(k) - \theta$ に対して

$$\|\phi(k)\|_\infty \leq \lambda^k \|\Gamma(k) \Gamma^{-1}(0)\|_\infty \gamma \quad (6)$$

がすべての k で成り立つ.

補題 1 は (指数重み付き) 最小二乗形パラメータ同定則のいわゆる指数収束性を示す式であるが, 以下での議論のために文献 5) とは別の証明を与えておく.

(補題 1 の証明) (3), (4) 式より

$$\Gamma(k) \zeta(k-1) = \frac{\Gamma(k-1) \zeta(k-1)}{\lambda + \zeta^T(k-1) \Gamma(k-1) \zeta(k-1)} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \phi(k) &= \phi(k-1) \\ &\quad - \Gamma(k) \zeta(k-1) \zeta^T(k-1) \phi(k-1) \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \Gamma(k) &= \frac{1}{\lambda} \left[\Gamma(k-1) \right. \\ &\quad \left. - \Gamma(k) \zeta(k-1) \zeta^T(k-1) \Gamma(k-1) \right] \end{aligned} \quad (9)$$

となるので,

$$\begin{aligned} \phi(k) &= \phi(k-1) \\ &\quad - \Gamma(k) \{ \Gamma^{-1}(k) - \lambda \Gamma^{-1}(k-1) \} \phi(k-1) \\ &= \lambda \Gamma(k) \Gamma^{-1}(k-1) \phi(k-1) \\ &= \lambda^k \Gamma(k) \Gamma^{-1}(0) \phi(0) \end{aligned} \quad (10)$$

と与えられる. このノルムを評価すると

$$\begin{aligned} \|\phi(k)\|_\infty &\leq \lambda^k \|\Gamma(k) \Gamma^{-1}(0)\|_\infty \|\phi(0)\|_\infty \\ &\leq \lambda^k \|\Gamma(k) \Gamma^{-1}(0)\|_\infty \gamma \end{aligned}$$

が得られる. $\parallel$

(定理 1 の証明)

1. 帰納法による. $\theta_i^{\max}(k-1) - \theta_i \geq 0$ と仮定すると,

$$\begin{aligned} \theta_i^{\max}(k) - \theta_i &= \min[\theta_i^{\max}(k-1) - \theta_i, \hat{\theta}_i(k) + \alpha(k) - \theta_i] \end{aligned}$$

ここで補題 1 より $\alpha(k) \geq \|\hat{\theta}(k) - \theta\|_\infty$ であるから,

$$\begin{aligned} \theta_i^{\max}(k) - \theta_i &\geq \min[\theta_i^{\max}(k-1) - \theta_i, \\ &\quad \hat{\theta}_i(k) - \theta_i + \|\hat{\theta}(k) - \theta\|_\infty] \geq 0 \end{aligned}$$

またアルゴリズム 1 の仮定により $\theta_i^{\max}(0) - \theta_i \geq 0$ である. よってすべての k で $\theta_i^{\max}(k) \geq \theta_i$ となる. 同様に $\theta_i^{\min}(k) \leq \theta_i$ も示すことができる.

2. $\theta_i^{\max}(k)$ の定義により

$$\begin{aligned} \theta_i^{\max}(k) - \theta_i^{\max}(k-1) &= \min[\theta_i^{\max}(k-1), \hat{\theta}_i(k) + \alpha(k) - \theta_i^{\max}(k-1)] \\ &= \min[0, \hat{\theta}_i(k) + \alpha(k) - \theta_i^{\max}(k-1)] \leq 0 \end{aligned}$$

よって $\theta_i^{\max}(k) \leq \theta_i^{\max}(k-1)$. 同様に $\theta_i^{\min}(k) \geq \theta_i^{\min}(k-1)$.

3. 補題 1 より

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha(k) \rightarrow 0, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \{\hat{\theta}_i(k) - \theta_i\} \rightarrow 0$$

となるので

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \{\theta_i^{\max}(k) - \theta_i\} &= \lim_{k \rightarrow \infty} \min[\theta_i^{\max}(k-1) - \theta_i, 0] = 0 \\ \lim_{k \rightarrow \infty} \{\theta_i^{\min}(k) - \theta_i\} &= \lim_{k \rightarrow \infty} \max[\theta_i^{\min}(k-1) - \theta_i, 0] = 0 \end{aligned}$$

よって $k \rightarrow \infty$ でパラメータ領域の上下限は漸近的に真値へと近づく. $\parallel$

- 3.2 連続時間系 次の連続時間システムを考える (s は微分演算子).

$$y(t) = \frac{b_1 s^{n-1} + \dots + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n} u(t) \quad (11)$$

安定多項式 $H(s) = s^n + h_1 s^{n-1} + \dots + h_n$ ($h_1, \dots, h_n$ は既知) を用いて上式を

$$f_{y0}(t) = \sum_{i=1}^n (-a_i f_{y_i}(t) + b_i f_{u_i}(t)) = \zeta^T(t) \theta \quad (12)$$

のように書き改める. ただし

$$f_{y_i}(t) = \frac{s^{n-i}}{H(s)} y(t) \quad (i=0, 1, \dots, n)$$

$$f_{u_i}(t) = \frac{s^{n-i}}{H(s)} u(t) \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

$$\theta = [a_1 \dots a_n \quad b_1 \dots b_n]^T$$

$$\zeta(t) = [-f_{y_1} \dots -f_{y_n} \quad f_{u_1} \dots f_{u_n}]^T$$

(12) 式で表現されるプラントに対して同定モデルを

$$\hat{f}_{y0}(t) = \zeta^T(t) \hat{\theta}(t) \quad (13)$$

$$\hat{\theta}(t) = [\hat{a}_1(t) \dots \hat{a}_n(t) \quad \hat{b}_1(t) \dots \hat{b}_n(t)]^T$$

と定義すると, 次の誤差方程式が得られる.

$$e(t) = \hat{f}_{y0}(t) - f_{y0}(t) = \zeta^T(t) \phi(t) \quad (14)$$

$$\phi(t) = \hat{\theta}(t) - \theta$$

連続時間でのパラメータ存在領域縮小アルゴリズムの基本的な概念は離散時間系と同一であり, 逐次式が微分方程式で, 和が時間積分で与えられる.

《アルゴリズム 2》

1. 離散時間同様 $[\theta_i^{\min}(0), \theta_i^{\max}(0)]$ ($i=1, 2, \dots, 2n$) を評価する.

2. $\gamma = \frac{1}{2} \max_i (\theta_i^{\max}(0) - \theta_i^{\min}(0))$ ($i=1, 2, \dots, 2n$) とおく.

3. 次の最小二乗形同定則を用いて θ の推定値

$\hat{\theta}(t)$ を計算する.

$$\dot{\hat{\theta}}(t) = -\lambda_2(t)\Gamma(t)\xi(t)e(t) \quad (15)$$

$$\dot{\Gamma}(t) = \lambda_1(t)\Gamma(t) - \lambda_2(t)\Gamma(t)\xi(t)\xi^T(t)\Gamma(t)$$

$$\Gamma(0) > 0$$

4. $\alpha(t) = \exp\left(-\int_0^t \lambda_1(\tau) d\tau\right) \|\Gamma(t)\Gamma^{-1}(0)\|_{\infty} \gamma$ を計算する.

5. 時刻 t での θ_i の存在領域が

$$\theta_i^{\min}(t) = \max_{0 \leq \tau \leq t} [\hat{\theta}_i(\tau) - \alpha(\tau)]$$

$$\theta_i^{\max}(t) = \min_{0 \leq \tau \leq t} [\hat{\theta}_i(\tau) + \alpha(\tau)]$$

$$(i=1, 2, \dots, 2n) \quad (16)$$

で与えられる.

連続時間系に対しても次の定理が成立する.

[定理 2] アルゴリズム 2 で得られる $\theta_i^{\min}(t)$, $\theta_i^{\max}(t)$ ($i=1, \dots, 2n$) は以下の関係を満たす.

$$1. \theta_i^{\min}(t) \leq \theta_i \leq \theta_i^{\max}(t) \quad \forall t$$

$$2. \dot{\theta}_i^{\min}(t) \geq 0 \quad \forall t, \quad \dot{\theta}_i^{\max}(t) \leq 0 \quad \forall t$$

3. ベクトル $\xi(t)$ が PE 条件を満たし, $\|\Gamma(t)\|_{\infty}$ が有界ならば, $\theta_i^{\min}(t)$, $\theta_i^{\max}(t)$ は真値 θ_i に収束する.

次の補題は補題 1 に対応するものである⁵⁾.

[補題 2] ベクトル $\xi(t)$ が PE であり, $\|\Gamma(t)\|_{\infty}$ が有界ならば, $\psi(t) = \hat{\theta}(t) - \theta$ に対して

$$\|\psi(t)\|_{\infty} \leq \exp\left(-\int_0^t \lambda_1(\tau) d\tau\right) \|\Gamma(t)\Gamma^{-1}(0)\|_{\infty} \gamma \quad (17)$$

がすべての時刻 t で成り立つ.

(補題 2 の証明)

$$\dot{\Gamma}(t)\Gamma^{-1}(t) + \Gamma(t)\dot{\Gamma}^{-1}(t) = \frac{d}{dt}(\Gamma) = 0$$

であるから, (16) 式を代入して

$$\dot{\Gamma}^{-1}(t) = -\lambda_1(t)\Gamma^{-1}(t) + \lambda_2(t)\xi(t)\xi^T(t) \quad (18)$$

(15), (18) 式より

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}[\Gamma^{-1}(t)\psi(t)] &= \dot{\Gamma}^{-1}(t)\psi(t) + \Gamma^{-1}(t)\dot{\psi}(t) \\ &= -\lambda_1(t)\Gamma^{-1}(t)\psi(t) \end{aligned} \quad (19)$$

となるので

$$\begin{aligned} \Gamma^{-1}(t)\psi(t) &= \exp\left(-\int_0^t \lambda_1(\tau) d\tau\right) \Gamma^{-1}(0)\psi(0) \|\psi(t)\|_{\infty} \\ &\leq \exp\left(-\int_0^t \lambda_1(\tau) d\tau\right) \|\Gamma(t)\Gamma^{-1}(0)\|_{\infty} \|\psi(0)\|_{\infty} \\ &\leq \exp\left(-\int_0^t \lambda_1(\tau) d\tau\right) \|\Gamma(t)\Gamma^{-1}(0)\|_{\infty} \gamma \quad \parallel \end{aligned}$$

(定理 2 の証明)

1. $\theta_i^{\max}(t)$ の定義により

$$\begin{aligned} \theta_i^{\max}(t) - \theta_i &= \min_{0 \leq \tau \leq t} [\hat{\theta}_i(\tau) + \alpha(\tau)] - \theta_i \\ &= \min_{0 \leq \tau \leq t} [\hat{\theta}_i(\tau) - \theta_i + \alpha(\tau)] \end{aligned}$$

$$\geq \min_{0 \leq \tau \leq t} [\hat{\theta}_i(\tau) - \theta_i + \|\hat{\theta}_i(\tau) - \theta_i\|_{\infty}] \geq 0$$

よって $\theta_i^{\max}(t) \geq \theta_i$. 同様に $\theta_i^{\min}(t) \leq \theta_i$.

2. アルゴリズム 2 の 5. より明らか.

3. 補題 2 より

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \alpha(t) \rightarrow 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} (\hat{\theta}_i(t) - \theta_i) \rightarrow 0$$

であるから

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\theta_i^{\max}(t) - \theta_i) = \min_{0 \leq \tau \leq t} \{\hat{\theta}_i(\tau) - \theta_i\} = 0$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\theta_i^{\min}(t) - \theta_i) = \max_{0 \leq \tau \leq t} \{\hat{\theta}_i(\tau) - \theta_i\} = 0$$

となる. よってパラメータ領域の上下限は漸近的に真値へと近づく. $\parallel$

4. 二次安定化適応制御

前述の同定法の特徴は, 各時刻で真値の存在領域が順次縮小評価されていくことである. 時刻 t でのパラメータの同定値として

$$\hat{\theta}_i(t) = \frac{1}{2}(\theta_i^{\min}(t) + \theta_i^{\max}(t)) \quad (20)$$

を採用すると, 各時間で同定値, 及び真値と同定値の「ずれ」が評価される. つまり, パラメータ領域そのものが推定誤差の大きさの範囲を与える. この考えを用いれば, 状態空間行列がある推定された行列とその不確かさを表す行列の和として書かれ, しかもその不確かさを示す行列の「大きさ」が与えられた場合に, システムを安定化する制御入力を求める問題として適応制御問題をとらえ直すことができる.

このような問題を最近のロバスト制御理論は二次安定化問題と呼んでいる. すなわち, 次のような構造的な不確かさを持つ系

$$\dot{x} = (A(t) + \Delta A(t))x(t) + (B(t) + \Delta B(t))u(t) \quad (21)$$

$$\|\Delta A\|, \|\Delta B\| \text{ known}$$

に対し, ある時間でのパラメータ領域縮小アルゴリズムによって評価されるプラントの存在領域全てを安定化問題と捉えることができる. このコントローラの存在は, 二次安定化理論によるリカッチ方程式によって判定される.

[二次安定化]^{6,7)} システムとその誤差が

$$\dot{x} = (A + \Delta A(t))x(t) + (B + \Delta B(t))u(t) \quad (22)$$

$$[\Delta A(t) \quad \Delta B(t)] = DF(t)[E_1 \quad E_2]$$

$$\|F(t)\| < 1$$

と与えられるとき, 行列 E_2 の特異値分解

$$E_2 = [U_1 \quad U_2] \begin{bmatrix} J_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1^T \\ V_2^T \end{bmatrix}$$

によって

$$\Phi = V_2^T, \quad \Xi = V_1 J_2^{-2} V_1^T$$

を定義する. ここで Φ, Ξ は誤差の大きさの情報を持

った行列である。

この時、線形制御でシステムを二次安定化することができる必要十分条件は、次のリカッチ方程式が適当な正数 ε に対して正定解 P を持つことである。

$$\begin{aligned} & (A - BEE_2^T E_1)^T P + P(A - BEE_2^T E_1) \\ & + PDD^T P - PBEB^T P - \frac{1}{\varepsilon} PB\Phi^T \Phi B^T P \\ & + E_1^T (I - E_2 E_2^T) E_1 + \varepsilon Q = 0 \end{aligned} \quad (23)$$

また線形二次安定化制御のひとつはこの行列 P を用いて

$$u(t) = - \left\{ \left(\frac{1}{2\varepsilon} \Phi^T \Phi + \Xi \right) B^T P + \Xi E_2^T E_1 \right\} x(t) \quad (24)$$

と与えられる。

当然のことではあるが、 $\|A\|, \|B\|$ が大きすぎればリカッチ方程式は正定解を持たず、二次安定化理論では何の安定化解も得られない。このため次のような手順が必要となる。

《アルゴリズム 3》

1. 初期値としてパラメータの存在範囲を見積もる。ただし評価不可能な場合には大きめに見積もっておく。
2. あまり大きくない PE 外外部入力でシステムを励起し、2 節で述べたパラメータの存在領域を計算する。
3. ステップ 2 と並行して (23) 式のリカッチ方程式が正定解を持つかどうか判断する。
4. 正定解が得られるまでステップ 2, 3 を繰り返す

し、得られたならば以下のような式で制御入力が発生する。

$$u(t) = u_i(t) + u_c(t) \quad (25)$$

$u_i(t) =$ 適当な励起入力 (sin 波など)

$u_c(t) =$ Eq. (24)

上記のアルゴリズムにより構成される制御系を適応二次安定化制御系と呼ぶ。この有効性を、簡単な数値例によって検証する。

[システム 1] 不安定かつ非最小位相

・システム

$$y(t) = \frac{b_1 s + b_2}{s^2 + a_1 s + a_2} u(t) = \frac{s - 1.5}{s^2 - 0.5s + 1} u(t)$$

・未知パラメータベクトルの初期推定存在領域

$$\theta^{\max}(0) = [2, 2, 2, 2]^T$$

$$\theta^{\min}(0) = [-2, -2, -2, -2]^T$$

・同定入力

$$u_i(t) = 0.2 \sin(\pi t) + 0.2 \sin(0.1\pi t)$$

・サンプリングタイム: 0.1 秒

系は極 $0.25 \pm 0.97i$ を持つ不安定系であり、パラメータ同定の初期値が全て零であるために、この段階では当然何等の安定化情報も得られない。また初期のパラメータ誤差の大きさも真値の大きさに対して 200~50% 程度あり、二次安定化解が存在しないことは直感的にも明らかである。

第 1 図はシステム 1 のパラメータ領域の変化であるが、すべてのパラメータにおいて定理 1 の性質が成立しており、収束性も良好である。第 2 図は入出力の変化である。系は不安定であるので同定入力に対して変

第 1 図 システム 1 のパラメータ領域の時間変化

動するが、入力小さいので、その挙動はほぼ入力を加えてない場合に相当する。6秒ほどで正定解が得られた後は同定入力は零とし、二次安定化制御入力によ

第2図 システム1の入出力の時間変化

第3図 システム2のパラメータ領域の時間変化

第4図 システム2の入出力の時間変化

ってすみやかに出力が安定化されている。

[システム2] 低次近似モデルかつ観測雑音下

- ・システムと観測値

$$y(t) = \frac{2}{s+1} \frac{229}{s^2+30s+229} u(t)$$

$$y_d(t) = y(t) + 0.1 \times \text{rand}$$

rand は大きさ 1 以下のランダム信号

- ・システムの低次近似モデル

$$y(t) = \frac{b_1}{s+a_1} u(t)$$

- ・パラメータの初期推定存在領域

$$\theta^{\max}(0) = [3, 3]^T$$

$$\theta^{\min}(0) = [-3, -3]^T$$

- ・同定入力

$$u_i(t) = \sin(0.5\pi t)$$

- ・サンプリングタイム: 0.01 秒

システムは 3 次系であるが, その 1 次の近似モデルを考え, それにアルゴリズムを適用し, 系全体の安定化を図る. 観測雑音の大きさは近似システムのパラメータ真値の大きさに対して 5~10% 程度のものを考えた。

多項式 $H(s) = s^2 + 1.2s + 1$ で表わされるローパスフィルタを通過させた入出力信号を用いたパラメータ領域縮小アルゴリズムによって, パラメータは収束し (第 3 図), プラントも安定化されている (第 4 図). しかし低近似モデルではパラメータの真値は存在しないため, 推定値 a_1, b_1 に幅を持たせてある. このような低次近似モデルで, さらに観測雑音も含まれるより実際に近い場合においてもほぼ正しい推定値が得られ, プラントの制御も良好である。

5. 航空機に対する応用例

高性能航空機のピッチ姿勢制御系設計に本手法を適用する. 対象機体は F-4C で, 飛行状態は高度 10,668 m (35,000 ft), マッハ数 0.60, 速度 178 m/s (584 ft/s), 釣合い迎角 9.4 deg の水平飛行である⁸⁾. 対象システムの状態方程式表現は

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \alpha \\ \eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ 0 & 0 & -20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \alpha \\ \eta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 20 \end{bmatrix} \eta_c$$

$$n_z = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \alpha \\ \eta \end{bmatrix}$$

で, 伝達関数が

$$n_z = \frac{\beta_1 s^2 + \beta_2 s + \beta_3}{s^3 + \alpha_1 s^2 + \alpha_2 s + \alpha_3} \eta_c$$

と表わされる 3 次の安定系を考える. ただしここで,

$\dot{\theta}$ はピッチ角速度, α は迎角変化, η はエレベーター舵角変化, η_c はエレベーター舵角制御入力, n_z は機体重心での垂直加速度を示す。

未知パラメータベクトルの初期推定存在領域, 及び初期推定値は

$$\theta^{\max}(0) = [70, 70, 80, 70, 30, -480]^T$$

$$\theta^{\min}(0) = [-30, 30, 20, 30, 70, 580]^T$$

$$\hat{\theta}(0) = [20, 20, 30, 20, -20, -530]^T$$

と選択した. 入力として $u = \text{Eq. (25)}$ を用い, 励起入力は周期 1 秒, 大きさ 0.5 [in] の矩形波とする. フィルタの安定多項式は $H(s) = s^3 + 6s^2 + 11s + 6$ とした. システムは連続時間系を考えたが, その観測時間間隔は 1/30 秒 (約 0.03 秒) と仮定した。

第 5 図は各々パラメータ領域及び推定値の変化の様子の一例を係数 b_i について示したものである. ここでは, 入力が制御入力のみになった時はパラメータ領域が十分小さくなったと評価し, それ以上の領域の縮小は行っていない. 第 6 図は入出力変化の様子を表わしている。

第 5 図 パラメータ領域の時間変化

第6図 入出力の時間変化

パラメータが一定値の場合は、単調性、収束性、収束速度においてほぼ満足できる結果が得られた。しかし、同定すべきパラメータのうち、大きさが極端に異なっているものがあると、システム全体の同定及び制御の精度が悪くなることがある。これは、規格化して初期パラメータ推定存在領域を選ぶことによりほぼ解決できる。また、同定入力周期を小さくしたり、又は入力の振幅を大きくするとより速く収束するが、実際の航空機では、実現の可能性が問題となろう。

6. ま と め

適応制御系の実用上重要な問題点である過渡状態での特性改善を目的とし、新しい適応制御系の構成法を示した。まず各時刻での同定値が真値に対してどれくらい良好なものであるかを評価するため、パラメータの存在領域を導入し、その計算アルゴリズムを、離散系と連続系に対し構成した。未知パラメータの存在領域を求めることにより、プラントの特性をある中心値とその周りの誤差としてとらえることができ、最近のロバスト制御理論の利用が可能となる。一例として二次安定化理論を使った適応二次安定化制御系を提案し、その有効性をいくつかの数値例を用いて検討した。

参 考 文 献

- 1) Miller, D. E. and Davison, E. J.: An Adaptive Controller Which Provides an Arbitrarily Good Transient and Steady-State Response, *IEEE Trans. Automatic Control*, **AC-36** (1991), pp. 68-81.
- 2) Samson, C.: An Adaptive LQ Controller for Non-Minimum Phase System, *Int. J. Control*, **35** (1982), pp. 1-28.
- 3) Kreisselmeier, G.: An Approach to Stable Indirect Adaptive Control, *Automatica*, **21** (1985), pp. 425-431.
- 4) 田村捷利, 菊川 暁, 尾形慶次: オーバーシュートを生じさせないMRACSの一構成, *計測自動制御学会論文集*, **25** (1989), pp. 558-565.
- 5) 新中新二: 適応アルゴリズム, 産業図書, 東京, 1990.
- 6) Xie, L. and Souza, C. E.: Robust H^∞ Control for Linear Time-Invariant Systems with Norm-Bounded Uncertainty in the Input Matrix, *Systems Control Lett.*, **14** (1990), pp. 389-396.
- 7) 藤井隆雄: 2次安定化とロバスト制御, *計測と制御*, **29** (1990), pp. 142-150.
- 8) Heffley, R. K. and Jewell, W. F.: Aircraft Handling Qualities Data, NASA CR-2144, 1972.
- 9) Sastry, S. and Bodson, M.: Adaptive Control—Stability, Convergence, and Robustness, Prentice-Hall, New Jersey, 1989.