一 論 文

バネで支持された球の一樣流中での振動^{*1}

Oscillation of a Spring-Supported Sphere in Uniform Flow

山 本 雄 三^{*2}

Yuzo YAMAMOTO

Key Words: Bluff-Body Flutter, Aerodynamics, Spring Effective Mass, Sphere**Abstract**

The dynamic instability of an elastic supported sphere in the uniform flow is studied experimentally by using the low speed open wind tunnel. If the oscillation was made by an initial deformation due to the outer disturbance, the oscillation was damped when the wind speed was below the some critical wind speed. However, if the wind speed increased over that critical wind speed, the limitcycle oscillation appeared. This oscillation disappeared and the small amplitude random oscillation appeared, when the wind speed increased over the another higher critical wind speed, and the oscillation of the sphere damped rapidly even if the oscillation was made by the initial deformation due to outer disturbance. In the present study, eight series of the wind tunnel tests were done i. e. the two spheres and the four pairs of the spring were used. The limitcycle dynamic instability were observed in the Reynolds number range $3 \times 10^3 < Re < 4 \times 10^4$. The ratio of the limitcycle dynamic instability disappearing critical wind speed to the one appearing wind speed was between 4.8 to 2.2 in the each wind tunnel test. The maximum vibration amplitude of the sphere oscillation was about $0.5d$ in the each test.

1. 序 論

一樣流中に上下にバネを付けて支持された球の振動特性を実験により研究する。実験には小型の低速開風洞を用いた。後に本文中で No. 1 として示す風洞実験を代表例に、風速を上げていった場合の球の挙動を説明する。風速 1.12 m/s 以下では球を指で軽く下方に引っ張って離すことによって球に上下の振動を与えても、球の上下の振動はゆっくり減衰する。しかし、 1.12 m/s の臨界風速よりも速い風速になると、球に外部からのじょう乱を与えなくても、球の上下の振動が発生し成長して一定振幅の上下の振動が持続するようになる。これはリミットサイクル型の振動である。

風速を上げてゆくと振幅は大きくなり、 3.2 m/s で最大振幅を示す。その様子を第 1 図に示した。風速 3.2 m/s 以上になると振幅は小さくなる。リミットサイクル型の振動は、 1.12 m/s から 4.7 m/s の広い風速範囲で出現する。さらに風速を 4.7 m/s 以上上げると、リミットサイクル型の振動は消失し、小振幅の不規則な振動を示すようになる。この状態で、球を指で軽く下方に引っ張って離すことによって球に上下の振動を与えても、その上下の振動はすばやく減衰し小振幅の不規則な振動に戻る。無風時の自由減衰振動数、リミットサイクル型の振動の発生する臨界風速以下での自由減衰振動数、リミットサイクル型の振動時の振動数はすべてほぼ一致する。このようなバネで支持された球の挙動を記述した研究は、調査した範囲で同様の従来例が見受けられなかったので、ここに報告する。

Achenbach¹⁾ は、一樣流中に固定支持された球について、レイノルズ数 $6 \times 10^3 < Re < 3 \times 10^5$ の範囲で流れのはく離位置が球の後半部で巡回することを、球に取り付けた 4 本の熱線風速計を用いた測定により指摘している。Achenbach は球の伴流の周期的変動の基本周波数に基づくストローハル数とレイノルズ数の関係を詳細に調べている。ストローハル数はレイノルズ数によって変化する (文献 1) Fig. 3)。そしてこれは亜臨界流れ領域での特性であり、 $Re > 3 \times 10^5$ のレイノルズ数範囲では球の伴流の周期的変動は文献 1) の実験方法では確認できなかったと記述されている。Blevins の著書の渦励振について解説した章の中の、種々の物体についてのストローハル数を紹介した図中に、Achenbach の実験に基づくと推測される球のストローハル数とレイノルズ数の関係も紹介されている (文献 2), p. 50, Fig. 3-6 参照)。種子田²⁾ は、油膜法、煙法、タフトグリッド法による一樣流中に固定支持された球の伴流流れの可視化実験を実施している。亜臨界レイノルズ数での球の伴流の周期的変動が

^{*1} 平成 9 年 1 月 8 日原稿受理^{*2} 岐阜工業高等専門学校機械工学科

第1図 風洞中で振動中のバネで支持した球

流れの可視化によって確認され、そのストローハル数は Achenbach の求めたものとほぼ一致する。

Viets と Lee は、流体中を自由落下する球のふらつきを研究している⁴⁾。流体中を自由落下する球のふらつきは、球の重心と幾何学的中心が厳密に一致していない場合の球の揺れと関係があることが論ぜられている。球の揺れによりマグナス効果による空気が働き、それが落下球のふらつきを引き起こす。本研究では、球は上下運動は行なうが、ピッチング運動は構成上発生し得ないため、球のピッチングの角速度に原因するマグナス効果による空気が作用しないと判断される。本実験で観測された振動は自由落下球のふらつきとは異なる現象であると考えられる。本実験で観測された振動は球の伴流の周期変動が加振力になると推測されるが、落下球のふらつきも球の伴流の周期変動が加振力として作用すると推測され、類似した側面を有する現象であると考えられる。

本研究の一樣流中にバネで支持された球のリミットサイクル型の振動は、よく知られた弾性支持された円柱の渦励振⁵⁾と類似の現象と推測される。円柱の渦励振はカルマン渦列によって働く周期的空気の作用で振動が持続する。固定支持円柱のカルマン渦列の周波数と、弾性支持円柱の振動数が一致する条件で振動が発生持続する。そしてその条件の風速よりもある範囲で速い風速で円柱の振動が観測され、その場合振動円柱の伴流の基本周波数は、弾性支持円柱の振動数にほぼ一致する。

本研究では、リミットサイクル型の振動の発生している状態での球の伴流の基本周波数の測定は実施していない。しかしながら、8種類の風洞実験によって、 $3.4 \times 10^3 < Re < 4.2 \times 10^4$ のレイノルズ数の範囲で、バネで支持された球のリミットサイクル型の振動の発生を確認した。

本研究の、一樣流中でバネで支持された球のリミットサイクル型の振動は、bluff-body フラッタの一つと見なすことができる。研究の目的は、バネで支持された球の上下運動を支配する振動学的、流体力学的な要因を明らかにすることであり、ひいては流れの中で弾性支持された球の振動予測や防振に資することである。

2. 記 号

- A : 弾性棒の断面積
- A_y : リミットサイクル型の振動時の片振幅/ d
- A_i, B_i : 係数, 式(A.7)参照
- a : 弾性棒中の音速
- C_i, D_i : 係数, 式(A.9)
- d : 球の直径
- E : ヤング率
- f : 球の上下の振動の振動数
- f_v : 固定支持球の伴流の基本周波数
- l : 弾性棒の長さ, バネの長さ
- M : 球の質量, 付録では質点の質量または集中質量の質量
- M_{spring} : バネ2本分の質量
- M_s : バネ質点系のバネの質量, $M_s = nl$
- M_{seffect} : バネの有効質量
- $m = M + M_{\text{seffect}}$: 球の質量とバネの有効質量の和
- m_r : 弾性棒の単位長あたりの質量, $m_r = \rho A$
- n : 単位長あたりのバネの質量
- $R = Ud/\nu$: レイノルズ数
- $r = EA$
- $S = f_v d/U$: ストローハル数, 付録では軸力
- $S^* = fd/U = 1/U_r$
- t : 時間
- U : 一樣流流速
- $U_r = U/fd = 1/S^*$: reduced velocity
- u : 変位
- X : x のみの関数
- x : 座標
- α : バネの有効質量 M_{seffect} とバネの質量 M_s の比
- $\delta = 1/(f\tau)$: 減衰振動時の対数減衰率
- $\delta_r = \mu\delta$: reduced damping
- η : 弾性棒の質量と集中質量の比 ml/M またはバネ質量と質点の質量比 M_s/M
- μ : 質量 m と球の空気の見掛けの質量比
- ξ : 振動数方程式の根
- ρ : 弾性棒の密度

τ : 減衰振動時の時定数

ω : 円振動数

$\omega_{1/3}$: バネの有効質量をバネ質量の 1/3 としたときの円振動数

ω_{act} : バネの有効質量を数値的に厳密に評価したときの円振動数

3. 実験方法

実験には吹き出し口径 178 mm の小型低速吹き出し円形開風洞 (島津 WT 180) を用いた。風洞測定部の最大流速は 18 m/s で、主流の相対乱れ度は 1.8% であった。風洞測定部の風速は送風機回転数をデジタルタコメータで測定して求めるようにした。そのため、風洞測定部に JIS の標準ピトー管を置き、エチルアルコールを入れた U 字管マノメータを傾斜させたものとつなぎ、送風機回転数と風洞測定部風速の関係を調べる予備実験を行なった。

実験に用いる球は、比重の軽い木材であるバルサ材と朴材から共に公称直径 50 mm の球を 1 個ずつ制作した。それぞれ sphere L と sphere H と呼ぶことにする。この 2 個の球の質量と寸法を第 1 表に示す。Sphere L の真球度は、最大直径と最小直径の差が 0.8 mm、鉛直に支持した状態の水平面に平行な赤道面での最大半径と最小半径の差は 0.4 mm、それに直

交する他の 2 つの赤道面での最大半径と最小半径の差はそれぞれ 0.6 mm, 0.6 mm で、sphere L に貫通されたピアノ線の直径は 1.0 mm であった。Sphere H の真球度は、最大直径と最小直径の差は 1.2 mm、水平面に対応する赤道面での最大半径と最小半径の差は 0.9 mm、それに直交する他の 2 つの赤道面での最大半径と最小半径の差はそれぞれ 1.0 mm, 0.7 mm で、sphere H に貫通されたピアノ線の直径は 1.15 mm であった。これらの球を用いる風洞実験での風洞測定部の閉塞率は、sphere L を用いる場合は 7.3%, sphere H を用いる場合は 7.9% になった。実験に用いたバネは 4 組で、それぞれの組のバネ 2 本を直列に連結した場合のバネ定数と、バネ 2 本の合計質量を第 2 表に示す。実験に用いた 2 個の球と 4 組のバネを第 2 図に示す。2 個の球と 4 組のバネの計 8 通りの組み合わせについて、風洞実験を行なった。

それぞれの組み合わせの風洞実験は次のようにして実施した。風速は 0.8 m/s から始めて、0.9 m/s, 1.0 m/s, 1.12 m/s, …, 最高 18 m/s まで JIS の標準数 R 20⁹⁾ を基準に、風速を段階的に上げながら、指で球を軽く下方に引っ張って離すことにより上下の振動を与えて、振動が減衰するときは減衰振動の時定数を、上下の振動の持続する場合は振幅を測定するよ

第 1 表 実験に使用した球の質量

	Diameter d	Mass M
Sphere L	48.0 ± 0.3 mm	8.5 g
Sphere H	49.2 ± 0.6 mm	32.2 g

第 2 表 実験に使用したバネの諸元

	Spring Constant	M_{spring}
Springs A	25.4 N/m	6.65 g
Springs B	48.0 N/m	3.00 g
Springs C	102 N/m	8.75 g
Springs D	511 N/m	23.0 g

第 2 図 実験に使用した球とバネ

第3図 実験装置

うにした。JISの標準数は等比級数に基づくもので、風速を一段階上げる際の風速の上昇の割合を低速側でも高速側でも同じようにできる。等比級数で風速の増加幅を抑える理由は、リミットサイクル型の振動の発生する臨界風速の確認の精度を一定の水準に保つため、等差級数で風速の増加幅を決めると、振動数の低くなる球とバネの組み合わせの場合に決定の精度が悪くなるからである。リミットサイクル型の振動の発生する臨界風速より僅か低速側では上下の振動の減衰が極めて遅くなり、僅か高速側では振動の成長の確認が振幅が小さいため難しい。いずれの場合にも確認に時間がかかるため、等比級数を目安に風速を上昇するようにした。

上下の振動の振動数および振動が減衰する場合の時定数の測定のため、球に付けたバネを支持する支持枠の下側のフックを力を測定するUゲージ変換器に連結した。Uゲージ変換器からの出力は、ブリッジボックスと動ひずみ増幅器を通してブラウン管オシロスコープの垂直側に出力させた。減衰振動時の時定数 τ は、ブラウン管オシロスコープの交流出力の振幅が60 mmから60×(1/e) mmに減衰する時間をストップウォッチで測定して時定数とした。この方法では、ある代表の振幅($A_y=0.2$ 程度)からの減衰の時定数しか測定できない。上下の振動の振動数の測定のため、可変周波数発振器からの信号をブラウン管オシロスコープの水平側に出力させ、可変周波数発振器のダイヤルを調節してリサージュ図を描かせて振動数を測定した。上下の振動が持続する場合の振幅は物指しと肉眼で測定した。

4. 実験結果と考察

バネで支持された球の8通りの組み合わせの風洞実験に共通した特徴は次のようである。リミットサイクル型の振動の出現する臨界風速以下では球を下方に引

っ張って離して上下の振動を与えても、振動はゆっくり減衰していく。その上下の振動の減衰の時定数は、無風時の振動の減衰の時定数とあまり変化がない。しかし、リミットサイクル型の振動の出現する臨界風速を境に、外部からじょう乱を与えなくても、球の上下の振動が発生して成長し、一定振幅の上下の振動が持続するようになる。風速を段階的に上げて振動特性を調べているわけであるが、リミットサイクル型の振動の出現の前兆として、リミットサイクル型の振動の出現する風速よりも一段階低い流速で、球の上下の振動の減衰の時定数が1.5倍から2.0倍と大きくなる。リミットサイクル型の振動が出現してから、さらに風速を上げていくと、リミットサイクル型の振動の振幅は大きくなり、最も振動の激しく現れる風速で片振幅はおよそ0.5dに達する。風速をさらに上げると、リミットサイクル型の振動の振幅は小さくなる。そしてより大きい次の臨界風速を境に、小振幅の不規則な振動に移行する。この境を与える臨界風速を、リミットサイクル型の振動の消失する臨界風速と呼ぶことにする。風速がリミットサイクル型の振動の消失する臨界風速を越えると、指で球を下方に引っ張って離すことによって上下の振動を与えても、その上下の振動はすみやかに減衰して、小振幅の不規則な振動に戻る。無風時の自由減衰振動数、リミットサイクル型の振動の出現する臨界風速以下の風速での自由減衰振動数、リミットサイクル型の振動時の振動数はすべてほぼ一致する。これは球の質量にバネの有効質量を加えた質量とバネ定数から定まる固有振動数に相当している。

8通りの組み合わせの風洞実験の結果を、それぞれの実験の振動数の小さいものから大きいものの順序で、第4図から第11図に示し、それぞれに、No.1, No.2, …No.8の番号を付した。各図とも横軸には無次元速度 $U_r=1/S^*=(U/(fd))$ を取り、レイノルズ数 Re の目盛を併記した。この無次元速度 U_r は reduced velocity と呼ばれるものである。下側の図の縦軸は無次元片振幅 A_y で、リミットサイクル型の振動の発生している時のデータをもとに記した。上側の図の縦軸は δ_r で

$$\delta_r = \mu \delta, \delta = 1/\tau f \quad (1)$$

の関係がある。ここで、 μ は質量 m と球の見掛けの空気の質量(文献2)p.25 Tab 2-2 および文献7)参照)の比である。球の空気の見掛けの質量は、非粘性非圧縮流れの理論値を採用した。その理論値は球の排除空気質量の半分で、次の関係式を用いた。

$$\mu = \frac{m}{(2/3)\pi\rho_{air}(d/2)^3} \quad (2)$$

本研究に用いたバネの中には、球の質量 M に比べて

第4図 一樣流中にバネで支持した球の振動特性(1)

第5図 一樣流中にバネで支持した球の振動特性(2)

第6図 一樣流中にバネで支持した球の振動特性(3)

第7図 一樣流中にバネで支持した球の振動特性(4)

第8図 一樣流中にバネで支持した球の振動特性(5)

第9図 一樣流中にバネで支持した球の振動特性(6)

かなり質量の大きいものがあり、バネの質量の寄与は無視できないので、球の質量 M にバネの有効質量 M_{seffect} を加えた質量を m として

$$m = M + M_{\text{seffect}} \quad (3)$$

これを球の質量の評価に用いた。バネの有効質量 M_{seffect} は付録に示す方法によって評価した。このバネの有効質量 M_{seffect} を数値的に厳密に評価する方法は本研究によって見出された。

無風時の δ_r は文献2)にある reduced damping に相当する(pp. 8-9²⁾ 参照)。Reduced damping が大きく

なると、無次元最大振幅が小さくなると期待されたが、本研究の第4図から第11図の結果からはその傾向は確認できなかった。

球の上下のリミットサイクル型の振動の出現時の無次元最大振幅は、硬いバネ spring D を用いた場合を除いて、およそ0.5であった。リミットサイクル型の振動の消失する臨界風速とリミットサイクル型の振動の発生する臨界風速の比はおよそ4.8から2.2の間にあり、かなり広い風速の範囲でリミットサイクル型の振動が発生することが判明した。

第10図 一樣流中にバネで支持した球の振動特性(7)

第11図 一樣流中にバネで支持した球の振動特性(8)

リミットサイクル型の振動の消失する臨界風速を越えると、小振幅の不規則な振動を示すようになった。そして片振幅 $0.5d$ 程度の初期振動を与えても素早く減衰する。本研究の方法で時定数を求めてもデータはバラ付く。第7図の点線の折れ線はデータのバラ付きと関係する。No.3の実験を除いて、リミットサイクル型の振動の消失後は3段階風速を上げた後、風洞実験を終了した。

4.1 考察 固定支持球の伴流の基本周波数に近いところに、同じ流速の一樣流れ中のバネで支持された球の上下振動の固有振動数が存在する場合に、バネで支持された球のリミットサイクル型の振動が出現する

第12図 リミットサイクル型の振動の出現した状態に基づく S^*-Re 関係

と考え、その検討のため第12図を作成した。公表されている固定支持球の伴流の基本周波数に基づくストローハル数 S とレイノルズ数 Re の関係のチャート²⁾ 上に、本研究でリミットサイクル型の振動の出現した状態の $S^* = 1/U_f$ とレイノルズ数 Re の関係を重ね合わせた。 S^*-Re 曲線に付記した(1), (2), ..., (8)の番号は、第4~11図に付記したそれぞれ No. 1, No. 2, ..., No. 8の実験でリミットサイクル型の振動の出現した状態に対応する。本研究の S^*-Re 曲線は、固定支持球の伴流の基本周波数に基づいた $S-Re$ 曲線をまたぐように8本示され、その交点は本研究の S^*-Re 曲線のほぼ中央に位置する。しかしながら、最大振幅の出現する点はその交点よりも下側(風速のより速い側)となった。

本研究のNo.1のリミットサイクル型の振動の発生臨界風速に基づくレイノルズ数は 3.4×10^3 、No.7のリミットサイクル型の振動の消失の臨界風速に基づくレイノルズ数は 4.2×10^4 であり、本研究で確認されたバネで支持された球の一樣流中でのリミットサイクル型の振動は、 $3.4 \times 10^3 < Re < 4.2 \times 10^4$ の範囲のレイノルズ数にすぎない。それ以上のレイノルズ数での、リミットサイクル型の振動の発生を調べるためには、さらに大きい、さらに高い風速の風洞が必要である。

Achenbach¹⁾の調べた固定支持球の伴流の基本周波数に基づくストローハル数 S とレイノルズ数 Re の関係は、レイノルズ数の範囲 $6 \times 10^3 < Re < 3 \times 10^5$ にわたっている。レイノルズ数の範囲 $3 \times 10^3 < Re < 6 \times$

10^3 については実験結果が得られていない。Achenbach はこの $S-Re$ の関係に関連する固定支持球の伴流の周期的変動を, lower critical レイノルズ数以上, 臨界レイノルズ数以下の流れの固定支持球の伴流の特性と位置づけて論じている。物理的には一樣流れ中の固定支持球の伴流は乱流であるが, 球の境界層は層流境界層のまま層流はく離して伴流を形造る場合の特性と推測される。本研究で調べている一樣流中にバネで支持された球のリミットサイクル型の振動の出現時に, 伴流が乱流で, 球の境界層が層流はく離しているかどうかを確認すべき今後の課題と考えるが, bluff-body フラッタの発生ということから, 次に記す事項も重要な課題と考える。

本研究で示された一樣流中にバネで支持された球のリミットサイクル型の振動の出現は, 一樣流中の弾性支持円柱のカルマン渦列による渦励振⁹⁾と類似の現象と推測される。その確認のためには, 一樣流中にバネで支持された球のリミットサイクル型の振動の出現時に, 振動球の伴流の基本周波数が球の上下の振動数にほぼ一致することを検証しなければならない。そのためは, 熱線風速計による伴流の速度変動測定, もしくは煙発生装置等を用いる伴流流れの可視化実験を実施する必要があるが, それらの装置の準備がないのでそれは今後の課題としたい。

一樣流中の振動球に作用する抗力, 非定常揚力の測定は, 弾性支持球の bluff-body フラッタの解明のための, 最終的課題であろう。本研究の実験では, 支持棒をある程度重く, 剛性を高く作る必要があり, 横方向の振動を防止するため, バネをある程度張力が加わった状態にする必要があり, 振動特性を調べながら同時に抗力, 非定常揚力を測定することには困難がある。一樣流中の振動球に作用する抗力, 非定常揚力の測定の目的のため, 別の実験を行なうべきと考える。

5. 結 論

一樣流中にバネで支持された球の動的不安定が, 小流速風洞を用いた実験によって研究され bluff-body フラッタが出現することが見出された。風速がリミットサイクル型の振動の出現する臨界風速以下のとき外部からのじょう乱によって振動を与えてもその振動は減衰する。しかしながら, 風速がリミットサイクル型の振動の出現する臨界風速よりも速いと, リミットサイクル型の振動が現れる。風速がリミットサイクル型の振動の消失する臨界風速以上にまで増大すると, 小振幅の不規則な振動が現れ, そして外部からのじょう乱によって振動を与えても, その振動は急速に減衰する。

岐阜工業高等専門学校機械工学科流体工学研究室で, 平成 2 年度に卒業研究を実施した桜井 洋氏, 平成 3 年度の高橋和也氏, 須藤純司氏, 平成 7 年度の丹羽弘典氏の諸兄の本研究への熱心な御協力に深く感謝します。

参 考 文 献

- 1) Achenbach, E.: Vortex Shedding from Sphere, J. Fluid Mech., 62, Part 2 (1974), pp. 209-221.
- 2) Blevins, R. D.: Flow-Induced Vibration, 2nd ed., Van Nostrand Reinhold, New York, 1990.
- 3) Taneda, S.: Visual Observations of the Flow Past a Sphere at Reynolds Numbers Between 10^4 and 10^6 , J. Fluid Mech., 85, Part 1 (1978), pp. 187-192.
- 4) Viets, H. and Lee, D. A.: Motion of Freely Falling Spheres at Moderate Reynolds Numbers, AIAA J., 9 (1971), pp. 2038-2042.
- 5) Freguson, N. and Parkinson, G. V.: Surface and Wake Flow Phenomena of the Vortex-Excited Oscillation of a Circular Cylinder, Transaction of ASME Series B, Journal of Engineering for Industry, 89 (1967), pp. 831-838.
- 6) 津村利光, 大西 清: JIS にもとづく標準製図法, 8, 全訂 1 版, 理工学社, 東京, 1984, p. 168.
- 7) Milne-Thomson, L. M.: Theoretical Hydrodynamics, 5th ed., Mcmillan Education, Houndmills, 1968, p. 491.
- 8) Rayleigh, J. W. S.: The Theory of Sound, 2nd ed., Vol. 1, Dover, New York, 1945, pp. 109-110.
- 9) Timoshenko, S. and Young, D. H.: Vibration Problems in Engineering, 3rd ed., Van Nostrand, New York, 1955, pp. 23-26 and pp. 312-314.
- 10) Weaver, W., Jr., Timoshenko, S. P. and Young, D. H.: Vibration Problems in Engineering, 5th ed., John Wiley & Sons, New York, 1990, pp. 24-25 and pp. 387-388.
- 11) Thomson, W. T.: Theory of Vibration with Applications, 5th ed., Pentice Hall, New York, 1993, pp. 24-25.
- 12) 國枝正春: 実用機械振動学, 理工学社, 東京, 1984, p. 65.

付録 バネ質点系の自由振動における バネの有効質量

バネの一端が固定で他端に質点が付けられたバネ質点系の自由振動において, バネの質量が無視できない場合, 1 自由度の系の振動の場合に単純化するため, バネの有効質量が質点の質量に付加される。次に示す Rayleigh⁸⁾によって展開される近似法に基づく結論がよく知られている。

バネの有効質量 M_{seffect} はバネの質量 M_s の $1/3$ であることが見出されている。このバネの有効質量 M_{seffect} を質点の質量 M に加えて, 修正された自由振動数は

$$\omega_{1/3} = \sqrt{k/[M + (1/3)M_s]} \quad (\text{A.1})$$

しかしながら, この式(A.1)の結論⁹⁻¹²⁾は近似解法に基づくもので, バネの質量 M_s と質点の質量 M の比 η が大きくなると正しくない。

一端が固定された他端に集中質量 M が付加された弾性棒の自由振動は、一端が固定され他端に質量 M が付けられたバネの自由振動を模擬する。これらの模擬はティモシェンコの文献⁹⁾に記述されている。

文献9)にはバネの有効質量 M_{seffect} とバネの質量 M の比は $1/3$ であると記述されているが、それは一端が固定され他端に集中質量 M が付加された弾性棒の自由振動の、一端が固定され他端に質点 M が付けられたバネの自由振動への近似的模擬であって、電子計算機で数値的に厳密な模擬を実施した場合、バネ質量 M_s と質点の質量 M の比 η が大きくなるとバネの有効質量 M_{seffect} とバネの質量 M の比 α は $1/3$ より大きくなる。それをこの付録で示そう。

一様断面の弾性棒の縦振動の微分方程式は

$$\partial^2 u / \partial x^2 = (1/a^2) \partial^2 u / \partial t^2 \quad (\text{A.2})$$

ここで a は弾性棒中の音速で

$$a = \sqrt{E/\rho} \quad (\text{A.3})$$

弾性棒の縦振動の微分方程式は次のように書いてよい。

$$m_r \ddot{u} dx - r u'' dx = 0 \quad (\text{A.4})$$

ここで、ドットとプライムはそれぞれ変位 u の t と x についての微分である。ここで

$$m_r = \rho A \quad (\text{A.5})$$

は単位長あたりの弾性棒の質量、

$$r = EA \quad (\text{A.6})$$

は軸方向剛性を示す。弾性棒が i 番目の自然モードで振動するとき、次の調和運動を行なう。

$$u_i = X_i (A_i \cos \omega_i t + B_i \sin \omega_i t) \quad (\text{A.7})$$

式(A.7)を(A.4)に代入し移項して整理して

$$r X_i'' + m \omega_i^2 X_i = 0 \quad (\text{A.8})$$

それに対し解は次の形となる。

$$X_i = C_i \cos(\omega_i x/a) + D_i \sin(\omega_i x/a) \quad (\text{A.9})$$

ここで、我々は一端が固定され他端に集中質量 M が付加された弾性棒の縦振動を考えることにする。弾性棒の境界条件は

$$\left. \begin{aligned} (u)_{x=0} &= 0 \\ (S)_{x=l} &= r(u')_{x=l} = -M(\ddot{u})_{x=l} \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.10})$$

この場合の振動数方程式は

$$\xi_i \tan \xi_i = \eta \quad (\text{A.11})$$

ここで

$$\xi_i = \omega_i l / a \quad (\text{A.12})$$

$$\eta = ml / M \quad (\text{A.13})$$

基本振動モードが興味深い：弾性棒の質量と集中質量の質量の比 η の種々の値に対する1次のモードに対応する ξ_1 の対応する値が文献9)と文献10)に与えられている。

次に、この一端が固定され他端に集中質量が付加された弾性棒の縦振動による、バネの一端が固定され他端に質点が付けたバネ質点系の自由振動の模擬について述べる。バネ質量は $M_s = nl$ で質点の質量を M とする。バネ定数 k は弾性棒の軸方向剛性 EA/l に対応する。

$$k = EA/l \quad (\text{A.14})$$

バネ質量 $M_s = nl$ と質点の質量 M の比は対応する弾性棒の質量 $m_r l$ と集中質量 M の比に対応する(付図1)。

$$nl/M = m_r l/M = \eta \quad (\text{A.15})$$

第1次近似について述べる。弾性棒の質量が集中質量に比べて小さいとき、 η と ξ_1 の値は共に小さい。よって(A.11)は

$$\tan \xi_1 \approx \xi_1$$

と取ることによって単純化できる。

それで、

$$\xi_1 = \omega_1 l / a \approx \sqrt{ml/M} = \sqrt{\eta} \quad (\text{A.16})$$

となるので

$$\omega_1 \approx \sqrt{EA/MI} = \sqrt{EA_0/M_0 l} \quad (\text{A.17})$$

対応する一端が固定され他端に質点が付けたバネの系に対しては

$$\omega_1 = \sqrt{k/M}$$

そして、この解はバネの質量が零の場合に対応する。

第2次近似について述べる。式(A.11)において

$$\tan \xi_1 \approx \xi_1 + \xi_1^3/3 \quad (\text{A.18})$$

と置くことによってより良い近似がえられるだろう。それ故

$$\xi_1(\xi_1 + \xi_1^3/3) = \eta$$

または

$$\xi_1 = \sqrt{\eta/(1 + \xi_1^2/3)} \quad (\text{A.19})$$

第1次近似式(A.16)を(A.19)の右辺の ξ_1 に代入して

$$\xi_1 = \sqrt{\eta/(1 + \eta/3)}$$

そしてこの解は次の関係に対応する。

$$\omega_1 = \sqrt{k/[M + (1/3)M_s]} \quad (\text{A.20})$$

より良い近似はバネ質量 M_s の $1/3$ を質点の質量 M

付図1 1自由度バネ質点系と端に集中質量をもつ弾性棒

付図2 振動数方程式の根 ξ_1 と $\eta = ml/M$ の関係 付図3 M_{seffect}/M 比 α と M_s/M 比 η の関係 付図4 $\omega_{1/3}/\omega_{\text{act}}$ と M_s/M 比 η の関係

に加えることによって得られる。これは周知の Rayleigh の方法に基づく近似解と一致する。

次に電子計算機を用いた数値解による厳密解について述べる。基本モードに対する振動数方程式

$$\xi_1 \tan \xi_1 = \eta \quad (\text{A.21})$$

は Newton 法を用いて数値的に解くことができる。振動数方程式の根 ξ_1 と弾性棒の質量と集中質量の質量の比 η の関係を付図2に示す。 ξ_1 と η の目盛は共に対数目盛である。

一端が固定され他端に質点 M が付けられたバネの自由振動への応用のために、バネの有効質量 M_{seffect} とバネ質量 M_s の比 α とバネ質量 M_s と質点の質量の質量 M の比 η が次のように調べられた。円振動数 ω_1 は弾性棒の質量の α 倍を集中質量に付加するのもしくはバネ質量の α 倍の質点の質量に付加するのだから

$$\omega_1 = \sqrt{EA/[M(1+\alpha\eta)l]} \quad (\text{A.22})$$

は

$$\omega_1 = \sqrt{k/[M(1+\alpha\eta)]}$$

に対応する。

$$\xi_1 = \omega_1 l / a$$

であるから

$$\xi_1 a / l = \sqrt{EA/[M(1+\alpha\eta)l]}$$

それ故

$$\begin{aligned} 1 + \alpha\eta &= (1/\xi_1^2)(l^2/a^2)(EA/Ml) \\ &= (1/\xi_1^2)(\rho A l / M) \\ &= (1/\xi_1^2)(ml/M) \\ &= (1/\xi_1^2)\eta \end{aligned}$$

となるので、

$$\alpha = (1/\xi_1^2) - (1/\eta) \quad (\text{A.23})$$

を得る。バネの有効質量 M_{seffect} とバネの質量 M_s の比 α とバネ質量 M_s と質点の質量 M の比 η の関係を

付表1 振動数方程式の根 ξ_1 , M_{seffect}/M_s 比 α および $\omega_{1/3}/\omega_{\text{act}}$ と M_s/M 比 η の数値解による関係

η	ξ_1	α	$\frac{\omega_{1/3}}{\omega_{\text{act}}}$
0.01	0.0998	0.334	1.000
0.1	0.311	0.336	1.000
0.3	0.522	0.340	1.001
0.5	0.653	0.343	1.002
0.7	0.751	0.347	1.004
0.9	0.827	0.350	1.006
1	0.860	0.351	1.007
1.5	0.988	0.357	1.012
2	1.077	0.362	1.017
3	1.193	0.370	1.027
4	1.265	0.375	1.035
5	1.314	0.379	1.042
10	1.429	0.390	1.063
20	1.496	0.397	1.080
100	1.555	0.403	1.097
∞	$\pi/2$	$(2/\pi)^2$	$2\sqrt{3}/\pi$

付図3に示す。

円振動数 ω_{act} は

$$\omega_{\text{act}} = \sqrt{k/[M + \alpha M_s]}$$

で得られ、そして周知の近似解法 (A.1) は

$$\omega_{1/3} = \sqrt{k/[M + (1/3)M_s]}$$

$\omega_{1/3}/\omega_{\text{act}}$ 比とバネ質量 M_s と質点の質量 M の比 η の関係を付図4に示す。 η が小さいとき $\omega_{1/3}$ は一端が固定され他端に質点が付けられたバネの振動のよい近似であることがわかる。

根 ξ_1 , バネの有効質量 M_{seffect} とバネ質量 M_s 比 α および $\omega_{1/3}/\omega_{\text{act}}$ 比とバネ質量 M_s と質点の質量 M の比 η の数値解による関係が付表1に示される。