数値計画法を用いた最適制御問題解法に関する研究 (その2)*1

ブロック対角ヘシアン法の提案

Computational Method of Optimal Control Problem Using
Mathematical Programming (2nd Report)
Introduction of Block Diagonal Hessian Method

土屋武司*2・鈴木真二*2

Takeshi TSUCHIYA and Shinji SUZUKI

Key Words: Guidance and Control, Optimal Trajectory, Mathematical Programming

Abstract

This paper considers a numerical method to solve optimal control problems which are formulated by a mathematical programming. In this 2nd report, A new method named Block Diagonal Hessian (BDH) method is proposed. This proposed method transforms the optimal control problem into a new formulated non-linear programming problem. Considering that the nonlinear programming problem is solved by using a sequential quadratic programming method, the diagonal form of the Hessian matrix for the Lagrange function is introduced in BDH method. The BDH method is applied to a simple optimization problem and its characteristics are compared with those of other methods. As a result, though the accuracy of the BDH method is lower than that of the other methods, the BDH converges quickly and has robust characteristics in the selection of the nominal solution. Through this study, the effectiveness of the BDH method was confirmed.

1. 序 論

最適制御とは、あるシステムに対する状態方程式と拘束条件の下で与えられた評価関数の値を最小化するような制御のことである。現在では、最適制御理論は、航空宇宙分野の誘導制御技術において、欠くことの出来ない技術となっている。しかし、最適制御問題は数学的には多点境界値問題に帰着されるため、複雑な拘束条件や評価関数を扱う非線形な実際のシステムに対する問題については今日でも解を得ることは容易ではない。本論文では、前報に続き、数値計画法を用いて最適制御問題を解く数値解法について、収束性、ロバスト性を向上させた新たな数値解法を提案する。

数値計画法とは、時間に依存しない静的な変数を扱う最適化問題であり、工学分野では最適設計に用いられる。例えば、最近、多数の論文によって、航空機の翼面積、アスペクト比、全重量、全長などの設計変数が最適化され成果をみている¹⁻³⁾。一方、時間の関数である変数を最適化する最適制御問題は、変分法、最大原理、動的計画法等に基づく数値解法が多数存在する⁴⁻⁷⁾。しかし、最近の研究によると、最適制御問題に対しても、数値計画法の一部である非線形計画法を用いた解法の利点が明らかにされつつある⁸⁻¹¹⁾。動的変数の最適化である最適制御問題に対しても非線形計画法が用いられるようになった理由として、莫大な数の変数を扱えるまで計算機が発達したこと、微分方程式、不等式拘束、そして変分法に基づく解法では苦手であった状態量拘束をはじめとした様々な拘束条件を扱える有効な計算アルゴリズムが提案されつつあることが挙げられる¹²⁾。本論文でもそうした非線形計画法を用いた最適制御問題の数値解法を取り上げる。

前報¹³⁾では、最適制御問題の制御量を離散化し、非線形計画問題に変換する数値解法について、収束性、精度を向上させるために感度微分方程式の導入を提案した。本論文では、この解法を制御量離散化法と呼ぶ。制御量離散化法は状態方程式を陽に積分することにより状態量を計算するため、不適切な初期解に対しては収束しない場合がある。第2報である本論文では、最適制御問題の制御量とともに状態量も併せて離散化し、状態方程式を制約条件として与えて、非線形計画問題へ変換する手法を取り上げる。一般的に、この解法は状態方程式を直接には積分しないため、制御量離散化法に比べて精度は劣るものの、収束性に優れていると考えられる。この種の手法としては、状態変数を3次関数近似するDCNLP (Direct Collocation

*1 平成9年4月8日、日本航空宇宙学会第28期年会講演会にて講演。平成9年6月20日原稿受理

*2 東京大学工学系研究科航空宇宙工学専攻

with Nonlinear Programming)⁹⁾法が知られているが、さらに収束性を向上させた数値解法BDH (Block Diagonal Hessian) 法を提案する。また、本手法の有効性を調査するために簡単な例題に適用した。

2. 最適化問題の定式化

本論文で扱われる最適制御問題を定義する。

ある動的システムの状態方程式が次の微分方程式により記述されているものとする。

$$\dot{x}(t) = f[x(t), u(t)] \quad (1)$$

ここで、 $x(t) \in R^n$ 、 $u(t) \in R^m$ は状態変数と制御変数であり、ともに時間 $t \in [0, t_f]$ の関数である。なお、本論文では太字はベクトルあるいは行列を意味し、式(1)左辺の $\dot{x}(t)$ は状態変数 $x(t)$ の時間微分 $dx(t)/dt$ を表す。

また初期時間 $t=0$ における初期条件と、終端時間 $t=t_f$ における終端条件がそれぞれ以下のように与えられている。

$$\varphi_0[x(0), u(0)] = 0 \quad (2)$$

$$\varphi_f[x(t_f), u(t_f)] = 0 \quad (3)$$

加えて、時間 $t \in [0, t_f]$ で満たされなければならない拘束が存在する場合には、

$$C[x(t), u(t)] = 0 \quad (4)$$

$$S[x(t), u(t)] \leq 0 \quad (5)$$

の等式および不等式拘束条件を導入する。

最適制御問題は、上記の条件を満たす解のうち、以下の評価関数を最小化する状態変数、制御変数、終端時間を求める問題である^{4,5)}。

$$J = \phi[x(t_f), u(t_f)] + \int_0^{t_f} \psi[x(t), u(t)] dt \quad (6)$$

時間に依存する変数を拘束条件の下で最適化する問題が最適制御問題であるならば、時間に依存しない変数を最適化する問題は数値計画問題と呼ばれる。その中でも、とくに変数が連続値である問題は、非線形計画問題と呼ばれ、次のように一般的に記述される^{14,15)}。

$$\text{Minimize: } F(X) \quad (7)$$

$$\text{Subject to: } G_e(X) = 0 \quad (8)$$

$$G_i(X) \leq 0 \quad (9)$$

ここで、 X は最適化すべき変数、 F は目的関数、 G_e 、 G_i は等式および不等式制約条件である。

式(1)~(6)で定義される最適制御問題に対して、現在様々な数値解法が存在するが、本論文ではいったんこれを非線形計画問題(式(7)~(9))に変換し、変換された問題を解いて最適解を得る数値解法を採用する。本論文で問題にするのは、どのように最適制御

問題を非線形計画問題に変換するかと、変換された非線形計画問題をどのように解くかということである。

3. Block Diagonal Hessian 法

3.1 非線形計画問題の定式化 前節の最適制御問題の数値解法として、Direct Collocation with Nonlinear Programming (DCNLP) 法⁹⁾により非線形計画問題へ変換して解く方法が広く用いられている。ここではDCNLP法より収束性に優れ、計算負荷が少ないと期待される新たな解法を提案する。また、DCNLP法との比較は次節で示される。

式(1)~(6)の問題を非線形計画問題へ変換するために、状態量 $x(t)$ と制御量 $u(t)$ を離散化し、区分関数によって表すこととする。はじめに、初期時間0から終端時間 t_f までの時間 t を N 個の要素に分割する。要素と要素をつなぐ点を節点と呼び、その時間を $t_i (i=0, \dots, N)$ と表す。

$$0 = t_0 < \dots < t_i < \dots < t_N = t_f \quad (10)$$

各節点上の状態量、制御量を x_i 、 u_i とする。すなわち、

$$x_i \equiv x(t_i) \quad (11)$$

$$u_i \equiv u(t_i) \quad (12)$$

とする。また、時間要素幅を

$$\Delta t_i \equiv t_{i+1} - t_i \quad (13)$$

で与える。その上で、各要素上で状態量は第1図に示す通り、2つの1次関数で表すと、要素中央で状態量が連続する必要から以下の関係式が要求される。

$$\Delta_i \equiv \left\{ x_i + f(x_i, u_i) \frac{\Delta t_i}{2} \right\} - \left\{ x_{i+1} - f(x_{i+1}, u_{i+1}) \frac{\Delta t_i}{2} \right\} = 0 \quad (14)$$

ここで、式(15)に示す通り、制御時間 t_i に占める時間要素幅 Δt_i の割合を表す定数 K_i を導入する。

$$K_i \equiv \Delta t_i / t_i \quad (15)$$

定数 K_i を使うと、式(14)は

第1図 状態量の離散化

第2図 制御量の離散化

$$\Delta_i = \left\{ x_i + f(x_i, u_i) \frac{\Delta t_i}{2} \right. \\ \left. - \left\{ x_{i+1} - f(x_{i+1}, u_{i+1}) \frac{\Delta t_{i+1}}{2} \frac{K_i}{K_{i+1}} \right\} = 0 \right. \quad (16)$$

と変形できる。定数 K_i を導入した理由は、新解法の特徴であるヘッセ行列の対角化を行うためである。詳細は後に説明する。式(14)の定式化は、状態量を求めるために、最適制御問題の状態方程式を修正オイラー法で数値積分することに等しい。ところで、DCNLP法においては状態量を3次関数で表す。両者の補間の違いによる計算精度の差は後述の数値計算例で明らかにされる。一方、本解法では、制御量は第2図のように線形補間する。

ここで、離散化された状態変数、制御変数と時間要素幅からなる変数 X_i ($i=0, \dots, N$) を定義する。

$$X_i = (x_i^T, u_i^T, \Delta t_i)^T \in R^{n+m+1} \quad (17)$$

そして、これら変数を合わせ、非線形計画問題の変数 X を次の通りに定義する。

$$X = (X_0^T, \dots, X_N^T)^T \in R^{(n+m+1)(N+1)} \quad (18)$$

前節で定式化された最適制御問題は、次の非線形計画問題に変換される。

$$\text{Minimize: } F(X) = \phi(x_N, u_N) + \sum_{i=0}^{N-1} \sigma_i \quad (19)$$

$$\text{Subject to: } G_E(X) = \begin{bmatrix} \varphi_0(x_0, u_0) \\ C(x_i, u_i) \\ \Delta_i \\ K_{i+1}\Delta t_i - K_i\Delta t_{i+1} \\ \varphi_i(x_N, u_N) \end{bmatrix} = 0 \quad (20)$$

$$G_i(X) = [S(x_i, u_i)] \leq 0 \quad (21) \\ (i=0, \dots, N)$$

ここで、式(19)の非線形計画問題の目的関数 F は最適制御問題の評価関数 J を表すが³、 σ_i は

$$\sigma_i = \phi(x_i, u_i) \frac{\Delta t_i}{2} + \phi(x_{i+1}, u_{i+1}) \frac{\Delta t_{i+1}}{2} \frac{K_i}{K_{i+1}} \quad (22)$$

とする。式(22)の K_i は式(15)で述べた定数であり、評価関数の積分項の被積分関数 ϕ を台形則で数値積

分することに等しい。等式制約条件 G_E には最適制御問題の初期条件 φ_0 、終端条件 φ_i 、等式拘束条件 C と共に、第3式に式(16)が、また第4式に式(15)と同義の条件式が加えられる。不等式制約条件 G_i には最適制御問題の不等式拘束条件 S が代入される。

3.2 BDH法による解法 式(19)～(21)のように非線形計画問題を定式化した理由とその解法をここで説明する。

非線形計画問題に対する数値解法について、近年多くの文献が見受けられる。中でも、逐次2次計画(Sequential Quadratic Programming; SQP)法^{14,15)}が、現在最も有効な手段であると言われている。このことから、本論文でも数値解法に逐次2次計画法を用いる。

この解法は、次のような2次計画問題を順次解き、解を更新していくことで最適解を得る方法である。

$$\text{Minimize: } \nabla F(X^{(k)})e^{(k)} + \frac{1}{2}e^{(k)T}B^{(k)}e^{(k)} \quad (23)$$

$$\text{Subject to: } G_E(X^{(k)}) + \nabla G_E(X^{(k)})e^{(k)} = 0 \quad (24)$$

$$G_i(X^{(k)}) + \nabla G_i(X^{(k)})e^{(k)} \leq 0 \quad (25)$$

ここで、添え字の (k) は k 回目の繰り返し計算を指し、 ∇ は変数 X に関する勾配を意味している。また、式(23)～(25)の問題の解である $e^{(k)}$ によって、変数 $X^{(k)}$ を、

$$X^{(k+1)} = X^{(k)} + e^{(k)} \quad (26)$$

のように更新していく。式(23)に含まれている行列 B は、以下のようなラグランジュ関数 L に対する2階の偏微係数からなるヘッセ行列 H の近似行列である。

$$L(X, \lambda, \mu) = F(X) + \lambda^T G_E(X) + \mu^T G_i(X) \quad (27)$$

$$H = \nabla^2 L \quad (28)$$

ここで、 λ 、 μ はラグランジュ乗数と呼ばれている。近似行列 B をヘッセ行列 H の代わりに用いる理由として、ヘッセ行列を解析的あるいは差分法によって求めるのが困難であること、また必ずしも本当のヘッセ行列 H が数値計算上望ましいとは限らない点が挙げられる。逐次2次計画法では近似行列 B の算出に、初期行列 $B^{(0)}$ を単位行列とした次のようなBroyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno (BFGS) 公式を用いる方法が広く用いられる。

$$B^{(k+1)} = B^{(k)} + \frac{q^{(k)}(q^{(k)})^T}{(q^{(k)})^T p^{(k)}} - \frac{B^{(k)} p^{(k)} (p^{(k)})^T B^{(k)}}{(p^{(k)})^T B^{(k)} p^{(k)}} \quad (29)$$

なおここで、ベクトル $p^{(k)}$ 、 $q^{(k)}$ は以下の通りである。

$$p^{(k)} = X^{(k+1)} - X^{(k)} \quad (30)$$

$$\mathbf{q}^{(k)} = \nabla^T L(\mathbf{X}^{(k+1)}, \boldsymbol{\lambda}^{(k+1)}, \boldsymbol{\mu}^{(k+1)}) - \nabla^T L(\mathbf{X}^{(k)}, \boldsymbol{\lambda}^{(k+1)}, \boldsymbol{\mu}^{(k+1)}) \quad (31)$$

式(19)～(21)の非線形計画問題の解法について考えてみる。この問題は次の形式をしていることが分かる。

$$\text{Minimize: } F(\mathbf{X}) = \sum_{i=0}^N F_i(\mathbf{X}_i) \quad (32)$$

$$\text{Subject to: } \mathbf{G}_E(\mathbf{X}) = \sum_{i=0}^N \mathbf{G}_{Ei}(\mathbf{X}_i) = \mathbf{0} \quad (33)$$

$$\mathbf{G}_I(\mathbf{X}) = \sum_{i=0}^N \mathbf{G}_{Ii}(\mathbf{X}_i) \leq \mathbf{0} \quad (34)$$

すなわち、目的関数 F と等式、不等式制約条件の関数 $\mathbf{G}_E$ と $\mathbf{G}_I$ が、変数 $\mathbf{X}_i$ のみの関数 F_i , $\mathbf{G}_{Ei}$, $\mathbf{G}_{Ii}$ の和に分解される。このとき、ラグランジュ関数 L も、

$$L(\mathbf{X}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) = \sum_{i=0}^N L_i(\mathbf{X}_i, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) \quad (35)$$

$$L_i(\mathbf{X}_i, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) = F_i(\mathbf{X}_i) + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{G}_{Ei}(\mathbf{X}_i) + \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{G}_{Ii}(\mathbf{X}_i) \quad (36)$$

のように分解され、ヘッセ行列 $\mathbf{H}$ を求めてみると、

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \nabla_{\mathbf{X}_0 \mathbf{X}_0}^2 L_0 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \nabla_{\mathbf{X}_N \mathbf{X}_N}^2 L_N \end{bmatrix} \quad (\in \mathbb{R}^{(n+m+1)(N+1) \times (n+m+1)(N+1)}) \quad (37)$$

のような疎行列をしている。すなわち、ヘッセ行列 $\mathbf{H}$ は、 $\nabla_{\mathbf{X}_i \mathbf{X}_j}^2 L = \mathbf{0} (i \neq j)$ のような性質を持つブロック対角行列となる。逆に言えば、ヘッセ行列がこのような形式になるように、意図的に非線形計画問題（式(19)～(21)）を設定したのである。

このとき、式(37)のヘッセ行列の近似に、BFGS公式（式(29)）をそのまま適用するのは望ましくない。なぜならこの場合、本当は疎行列であるヘッセ行列を密行列として近似していることになり、行列の非対角成分に計算機の大きな記憶容量が必要だからである。また、近似精度の低さが、逐次2次計画法の収束性に悪影響を及ぼすためである。このことから、ヘッセ行列 $\mathbf{H}$ の近似行列 $\mathbf{B}$ を、 $\nabla_{\mathbf{X}_i \mathbf{X}_i}^2 L_i$ の近似行列 $\mathbf{B}_i$ ごとに分け、

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_0 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \mathbf{B}_N \end{bmatrix} \quad (38)$$

$$\mathbf{B}_i \in \mathbb{R}^{(n+m+1) \times (n+m+1)} \quad (i=0, \dots, N) \quad (39)$$

とする。すると、行列 $\mathbf{B}$ の行列全体をBFGS公式で近似していくのではなく、行列 $\mathbf{B}$ の各ブロック行列 $\mathbf{B}_i$ ごとにBFGS公式を適用できるようになり、行列 $\mathbf{B}$ は疎性を保ち続ける。よって、各ブロック成分のみの保存で済むことから、計算機の記憶容量を少なくでき、また、逐次2次計画法の数値計算をある程度分割して行うことが可能になる。その結果、解の収束性

は高まり、計算の効率化をはかることができると期待される。

一方、DCNLP法では、ヘッセ行列 $\mathbf{H}$ はブロック3重対角行列になる。このとき、各ブロックを近似するための公式が存在せず、行列 $\mathbf{B}$ を計算するのに多くの時間を要し、保存のために多くの記憶容量を必要とする。結果として、ここで説明している新解法はDCNLP法に比べ、収束性、計算負荷の点で優れていると思われる。詳細は次節の数値計算例で示される。

以上の非線形計画問題の定式化（式(19)～(21)）とその解法をブロック対角ヘシアン（Block Diagonal Hessian; BDH）法と呼ぶ。

3.3 計算精度向上のための工夫 本論文で提案した新たな数値解法であるBDH法によって得られた最適解は、要素上において状態量を2つの1次関数で補間するため、3次関数を用いて補間するDCNLP法より精度が劣ると予想される。しかし、最適解の精度は、その補間関数と共に、要素分割数と要素の分割法によって決まる。例えば、要素分割数を増やせば、計算精度が改善される。しかしながら、分割数は数値計算を行う計算機の性能によって左右され限界がある。よって、本論文では要素の分割法を修正することで、計算精度の向上を試みる。

基本的に、状態量の変化が大きいところほど計算誤差が大きくなると思われる。よって、状態量の1次微係数の変化量（2次微係数）が大きい時間では大きな計算誤差が生じていると判断し、他の区間に比べて多くの要素を配置するようにする。詳しい方法はAppendixに記す。

要素再分割法と名付けたこの方法は、次節の最適制御問題の数値計算例で適用される。

4. 数値計算例

4.1 最適制御問題の定式 本節では、解析解を求めることができる最適制御問題の例として、「不等式拘束のある最速降下線問題」^[4,5)]を取り上げ、BDH法を適用して数値解を求めてみる。そして、非線形計画法を用いた同種の他の解法との比較を行い、BDH法の特性を明らかにする。

質点が一様重力場内を運動する。運動方程式は、

$$\dot{x} = \sqrt{2gy} \cos \gamma \quad (40)$$

$$\dot{y} = \sqrt{2gy} \sin \gamma \quad (41)$$

と表され、状態変数 x , y は、それぞれ水平距離、垂直距離（下向きを正）であり、制御変数は経路角 γ , g は重力加速度である（第3図）。質点は、

$$x(0) = y(0) = 0 \quad (42)$$

から動き始め、終端時刻 t_f に、

第3図 拘束のある最速降下線問題

第4図 最適解

$$x(t_f) = l \quad (l > 0) \quad (43)$$

に至る。また、不等式拘束条件

$$y \leq x \tan \theta + h \quad (44)$$

が存在する。ここで、 l 、 θ 、 h は定数である。問題は終端時間を最小にする経路を求めることであり、よって評価関数を、

$$J = t_f = \int_0^{t_f} dt \quad (45)$$

と定める。なお、すべての変数と定数は無次元量とし、定数値に以下を選ぶ。

$$h/l = 0.1, \quad \theta = 30 [\text{deg}], \quad g = 1 \quad (46)$$

また、要素分割数はとくに断りのない限り 20 とする。

4.2 数値計算結果 BDH 法により求めた最適解を第4図に示す。ここには、要素を等幅として得られた最適解（□印）と、その後、要素を3.4節の方法に従って再分割した後に得られた最適解（○印）が示されている。解の様相はどちらも解析解とよく一致している。また、要素を再分割した後に得られた解を見ると、軌道が不等式拘束条件上にあり単調な変化をしている区間の要素幅は、等間隔に並べられた要素幅に比べて長くなっている。精度の改善は、要素分割数 20 の場合、約 0.1% とわずかであったが、状態量の変化が激しい問題ではこれ以上の効果が期待できる。

第5図は、等幅の要素に対して、数値解法で求めら

第5図 各種解法における要素数に対する計算誤差

第6図 各種解法における収束性

れた最適解の誤差の大きさを各種解法で比較したものである。ここで示されている制御量離散化法とは、文献12)で述べられている数値解法である。また、計算誤差とは、解析解の目的関数値と数値解法による最適解の目的関数値の差を解析解の目的関数値で正規化した値である。この図より、2つのことが分かる。まず第一に、各解法とも、要素数を増やしていけば、ほぼ要素数の2~3乗に比例して誤差が小さくなっていくことが読み取れる。第2に、BDH法は他の解法に比べて1桁ほど誤差が大きい。この理由は、BDH法は2つの1次関数で要素上の状態量を近似するのに対し、DCNLP法は状態量を3次関数で補間するため、また制御量離散化法は状態量算出に、実際に数値積分を行っているためである。

第6図は、BDH法と制御量離散化法、DCNLP法の3つの収束性を比較している。いずれも非線形計画問題の数値解法に逐次2次計画法を用い、要素数は20個で等幅、また制御量離散化法の数値積分はルンゲ・クッタ法で、その積分刻み幅は要素幅の1/10とした。ここではまず、式(46)の定数値を

$$h/l = 0 \quad (47)$$

と変更して求めた最適解を初期解として用意した。そ

第1表 ランダムな初期解に対する収束性

数値解法	収束した割合 (%)
BDH 法	97.1
制御量離散化法	94.3
DCNLP 法	37.1

の後、式(46)の定数値に戻して再び最適化を行ったときの逐次2次計画法における繰り返し計算回数に対する目的関数値の推移を調べた。なお、繰り返し計算を終了させる収束判定はどの解法も同じである。本章で提案したBDH法は他の方法と比較して、圧倒的に最適解への収束が速いことが図より分かる。

第1表は、初期解を

$$0 \leq x/l \leq 1 \quad (48)$$

$$0 \leq y/l \leq 1 \quad (49)$$

$$0 \leq \gamma \leq 90 [\text{deg}] \quad (50)$$

$$0 \leq t_f \leq 5 \quad (51)$$

の範囲でランダムに選び、最適化計算をさせた結果、解析解に近い最適解へ収束した初期解の割合を示している。BDH法と制御量離散化法はほぼ100%の確率で最適解へ収束し、DCNLP法と比べて、初期解の設定が非常に容易であることが確認できた。

以上の結果から、本論文で提案されたBDH法は、算出された最適解の精度は他の同類の解法と比べて劣るものの、収束性、初期解のロバスト性に優れた解法であることが判明した。

5. 結 論

本論文では、前報に続き、最適制御問題に対して、状態変数と制御変数を離散化し非線形計画問題に変換して最適解を得る数値解法を取り上げた。ここで提案した新たな数値解法、BDH (Block Diagonal Hessian) 法は、収束性と初期解に対するロバスト性に優れる。これは、非線形計画問題のラグランジュ関数のヘッセ行列をブロック対角化することによって、非線形計画問題の解法である逐次2次計画法の収束性を高める工夫をしたためであり、ヘッセ行列のための大きな記憶容量を減らせる利点も併せ持つ。また、提案する手法の有効性を解析解の存在する「不等式拘束のある最速降下線問題」によって検証した。BDH法の現実的な問題への応用は文献16)で取り上げている。

参 考 文 献

- 1) Ashley, H.: On Making Things the Best-Aeronautical Uses of Optimization, *J. Aircraft*, **19** (1976), pp. 5-28.
- 2) Grossman, B., Strauch, G. J., Eppard, W. M., Guardal, Z. and Haftka, R. T.: Combined Aerodynamic-Structural Design of a Sailplane Wing, *J. Aircraft*, **25** (1988), pp.

855-860.

- 3) Dovi, A. R. and Wrenn, G. A.: Aircraft Design for Mission Performance Using Nonlinear Multiobjective Optimization Methods, *J. Aircraft*, **27** (1990), pp. 1043-1049.
- 4) Bryson, A. E., Jr. and Ho, Y. C.: Applied Optimal Control, Blaisdell Publishing Company, Massachusetts, 1969.
- 5) 加藤寛一郎: 工学的最適制御, 東京大学出版会, 東京, 1988.
- 6) Wu, A. K. and Miele, A.: Sequential Conjugate-Gradient Restoration Algorithm for Optimal Control Problems with Non-Differential Constraints and General Boundary Conditions, Part 1, *Optimal Control Appl. Methods*, **1** (1980), pp. 69-88.
- 7) Gonzalez, S. and Rodriguez, S.: Modified Quasilinearization Algorithm for Optimal Control Problems with Nondifferential Constraints and General Boundary Conditions, *JOTA*, **50** (1986), pp. 109-128.
- 8) Williamson, W. E.: Use of Polynomial Approximation to Calculate Suboptimal Controls, *AIAA J.*, **9** (1971), pp. 2271-2273.
- 9) Hargraves, C. R. and Paris, S. W.: Direct Trajectory Optimization Using Nonlinear Programming and Collocation, *J. Guidance Control Dynamics*, **10** (1987), pp. 338-342.
- 10) Goh, C. J. and Teo, K. L.: Control Parametrization: a Unified Approach to Optimal Control Problems with General Constraints, *Automatica*, **24** (1988), pp. 3-18.
- 11) Suzuki, S. and Yoshizawa, T.: Multiobjective Trajectory Optimization by Goal Programming with Fuzzy Decisions, *J. Guidance Control Dynamics*, **17** (1994), pp. 297-303.
- 12) Hull, D. G.: Conversion of Optimal Control Problems into Parameter Optimization Problems, *J. Guidance Control Dynamics*, **20** (1997), pp. 57-60.
- 13) 土屋武司, 鈴木真二: 数値計画法を用いた最適制御問題解法に関する研究 (その1) 感度微分方程式の導入, *日本航空宇宙学会誌*, **45** (1997), pp. 231-237.
- 14) 坂和正敏: 非線形システムの最適化, 森北出版, 東京, 1986.
- 15) 茨木俊秀, 福島雅夫: FORTRAN 77 最適化プログラミング, 岩波書店, 東京, 1991.
- 16) 土屋武司, 鈴木真二: スペースプレーンの機体設計と飛行経路の同時最適化に関する数値解法, *日本航空宇宙学会誌*, **46** (1998), pp. 346-353.

Appendix 要素再分割法

本論文で取り上げた計算精度改善のための方法を説明する。まず、何らかの幅に分割された要素, 例えば等幅に分割された要素で最適解を求める。その上で、節点 $i (=0, \dots, N)$ での状態量 x_i の1次微係数 $\dot{x}_i$ を状態方程式の関数 f から求める。

$$\dot{x}_i = f^j(x_i, u_i) \quad (A1)$$

ここで、添え字 $j (=1, \dots, n)$ はベクトル $\dot{x}_i$, 関数 f の第 j 成分を表す。そして、節点 i と $i+1$ の間で、1次微係数の変化量の正規化された値を表す関数 $D\dot{x}(t)$ を

$$D\dot{x}(t) = \sum_{j=1}^n |\dot{x}_{i+1}^j - \dot{x}_i^j| / \dot{x}_{\max}^j \quad (t \in [t_i, t_{i+1}], \quad i=0, \dots, N-1) \quad (A2)$$

と定義する。なお、

$$\dot{x}_{\max}^i = \max_i |\dot{x}_i^i| \quad (\text{A } 3)$$

である．さらに，1次微係数の変化量の平均値 $D\dot{x}_{\text{mean}}$ を以下のように求める．

$$D\dot{x}_{\text{mean}} = \int_0^{t_i} D\dot{x}(t)dt/t_i \quad (\text{A } 4)$$

そして，1次微係数の変化量が全節点上で等しくなるようにすることを目標にし，新しい節点 i が置かれる時間を t_i^{new} とすると，

$$D\dot{x}_{\text{mean}} = \int_{t_i^{\text{new}}}^{t_{i+1}^{\text{new}}} D\dot{x}(t)dt \quad (i=0, \dots, N-1) \quad (\text{A } 5)$$

を満たすように， $t_i^{\text{new}}=0$ から $t_N^{\text{new}}=t_i$ まで順次 t_i^{new} を求めていく．BDH 法において，実際に要素の分割法を決定するのは定数 K_i である．よって，その値を以下のように変更する．

$$K_i = (t_{i+1}^{\text{new}} - t_i^{\text{new}})/t_i \quad (\text{A } 6)$$

以上の定数 K_i の下で再び非線形計画問題を解く．