一般化準三次元有限要素法による積層板の解析^{*1}Generalized Quasi-Three Dimensional Finite Element
Analysis of Laminates熊澤 寿^{*2}・青木隆平^{*2}

Hisashi KUMAZAWA and Takahira AOKI

Key Words : Composite Materials, FEM, Quasi-Three Dimensional Analysis, Delamination, Interlaminar Stress, Energy Release Rate

Abstract

Quasi-three dimensional finite element method (Q3-DFEM) has been widely recognized as an effective method in analyzing symmetric laminates loaded in the longitudinal direction. However, when laminates are not symmetric or when bending moment is applied, Q3 DFEM is not sufficient to analyze composite laminates. A generalized Q3 DFEM (GQ3 DFEM) accounting for bending and twisting of unsymmetric laminates has been developed. In this paper, GQ3 DFEM based on the Kirchhoff hypothesis for laminates is formulated based on deformations separated into two parts, which are the global displacements corresponding to CLT, and the local displacements representing local states. As the local displacements can be separated from the global displacements based on CLT, the effect of local geometrical irregularities is directly evaluated. GQ3 DFEM is used to determine displacements, stresses and energy release rates. Finally it is shown that GQ3 DFEM based on the Kirchhoff hypothesis is useful for predicting the behavior of composite laminates.

1. 序

近年航空宇宙分野では、繊維強化複合材積層板が機体の軽量化や構造の耐熱化などに大きな貢献を果たすようになってきた。それに伴い、積層板の層間の剝離や局所的な破壊（トランスバースクラック）など、従来の均質材料では生じ得ない破壊様式が顕在化し、それが構造部材の強度を左右する場合も生じている。このような破壊のメカニズムの理解やそれに基づく設計手法の確立などにおいて、積層板を構成する各層を個別にモデル化した解析が重要な役割を果たしている。このような積層板の解析において、一般の荷重条件や部材形状を対象とすれば三次元領域での解析が不可欠

であるのは明らかであるが、変位等の近似関数の複雑化、或いは、有限要素法であればモデル化における自由度の増大などから、その利用は限られている。これに対し、荷重条件と部材形状を限定することで、二次元領域での解析に問題を簡略化して解析し、破壊のメカニズムなどの本質を追究しようとする試みが行われてきた。その一つの解析法として準三次元解析がある。

準三次元解析の対象として、例えば一方に断面形状が一定でその方向（長手方向）に引張り荷重を受ける対称積層板を考える。この状態では、長手方向垂直ひずみが一定で、他のひずみ成分が長手方向によらない。この条件とひずみ変位関係式を変位について解くと、変位は長手方向への一様な伸びを表す長手方向座標の一次関数と、長手方向によらない二変数関数の和となる。このため、一次関数の係数一つ（長手方向ひずみ）と積層板の断面内の二変数関数を解析変数とすればよい。準三次元解析では、二次元の断面を解析するので自由度が三次元に比べはるかに少なくすむ一方で、二次元では扱えない面外せん断なども解析できる。

Pipes and Pagano¹⁾ は、この準三次元解析に基づく定式化により、層間応力を差分法により計算した。Wang and Choi²⁾ は、二つの材質の間にあるクラックの応力拡大係数、エネルギー解放率を計算した。Wang³⁾ は、引張り荷重を受けるアングルプライ積層板の自由端剝離の解析を行った。青木ら⁴⁾ は、同等の定式化に基づいた有限要素法により、剝離の進展に伴うエネルギー解放率を計算した。

しかし、準三次元解析では対称積層板の引張りのみしか扱えず、非対称積層板や曲げ変形を扱うことができない。この準三次元解析を一般化し、形状や材質の非対称や曲げ荷重の取り扱いを可能とした一般化準三

^{*1} 平成9年10月7日原稿受理^{*2} 東京大学大学院工学系研究科航空宇宙工学専攻

次元解析法が行われるようになった。一般化された場合でも、準三次元解析と同様、対象の積層板は一方方向に長く、断面形状、材料定数ともに長手方向に変化せず、引張り、曲げ、ねじり荷重が長手方向の端で加えられている状態を考える。この状態でも、ひずみ場、応力場は長手方向によらないものとなる。

逆に、ひずみが長手方向に変化しない条件で、ひずみ変位方程式を変位について解くと、変位が座標変数の多項式と、長手方向によらない二変数関数の和になる。一般的な三次元解析では変位が三変数関数となるが、この変位を利用して三次元物体を解析する場合、多項式の係数と長手方向によらない二変数関数を求めることになるので、三次元変形を許しつつ、二次元解析を行えばよい。

一般化準三次元解析では、対称積層板の引張りのみでなく、非対称積層板への曲げ荷重、ねじり荷重をも扱える。Chan and Ochoa⁵⁾は、この一般化準三次元解析に基づいた有限要素法により、引張り荷重だけでなく、曲げ荷重を受ける積層板のエネルギー解放率などを計算した。Kunoo ら⁶⁾は、一般化準三次元有限要素法解析により、クラックが非対称に存在する積層板の解析を行い、さらに、一般化準三次元古典積層理論を定式化し、有限要素法による結果と比較した。

本論文では、一般化準三次元有限要素法解析を、Kirchhoff の仮説をもとに、古典積層理論に対応した場所によらない一様なひずみ状態による変位と、自由端やクラックなどの存在に起因した局所的な変位に分離した定式化を行う。そのため、古典積層理論による変形と、それ以外のものを分離することができ、ここでの解析結果と古典積層理論に基づく結果の比較が容易となる。すなわち、自由端、クラックなどの影響が古典積層理論からのずれの変位として表せる。

さらに、この解析法により変形、層間応力、エネルギー解放率を計算し、積層板の自由端剝離問題を解析する。そして、Kirchhoff の仮説に基づいた一般化準三次元有限要素法の有効性を示す。

2. 定 式 化

2.1 一般化された準三次元問題 積層板と x, y, z 軸の関係を第1図のように、定義する。板の長手方向は十分に長く、 x 方向には断面形状と材料定数が一定とし、さらに、引張り、曲げ、ねじり外力が十分遠方で加わるとする。このような形状と材質と外力の条件がある場合、積層板内のすべてのひずみが x 方向に一定となる。つまりひずみは x に依存せず、 y, z のみの関数となる。式で表すと、

第1図 積層板と座標軸

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \varepsilon_x(y, z), \quad \varepsilon_y = \varepsilon_y(y, z), \quad \varepsilon_z = \varepsilon_z(y, z) \\ \gamma_{yz} &= \gamma_{yz}(y, z), \quad \gamma_{zx} = \gamma_{zx}(y, z), \quad \gamma_{xy} = \gamma_{xy}(y, z) \end{aligned} \quad (1)$$

となる。このように、ひずみ場が長手方向によらない場合、変位場がひずみ-変位方程式より、次式のように求まる。

$$\begin{aligned} u &= (C_1 y + C_2 z + C_3) x + U(y, z) \\ v &= (C_4 z + C_5) x - C_1 x^2 / 2 + V(y, z) \\ w &= (-C_4 y + C_6) x - C_2 x^2 / 2 + W(y, z) \end{aligned} \quad (2)$$

(2) 式の変位場を用いた解析が、一般化準三次元解析と呼ばれる。

Kirchhoff の仮説から、 x, y 方向変位 u, v は、中央面の x, y, z 方向変位 u_0, v_0, w_0 により、

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial x} \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial y} \end{aligned} \quad (3)$$

また、 w については w_0 と中央面に対する z 方向の相対変位 $\bar{w}(z)$ により表す。

$$w(x, y, z) = w_0(x, y) + \bar{w}(z) \quad (4)$$

以上の(3)、(4)式より、面内ひずみは

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\varepsilon}_x \\ \bar{\varepsilon}_y \\ \bar{\gamma}_{xy} \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} \bar{\kappa}_x \\ \bar{\kappa}_y \\ \bar{\kappa}_{xy} \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon}_x &= \frac{\partial u_0}{\partial x}, \quad \bar{\kappa}_x = -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ \bar{\varepsilon}_y &= \frac{\partial v_0}{\partial y}, \quad \bar{\kappa}_y = -\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \end{aligned} \quad (6)$$

$$\bar{\gamma}_{xy} = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x}, \quad \bar{\kappa}_{xy} = -2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y}$$

$\bar{\varepsilon}_x, \bar{\varepsilon}_y, \bar{\gamma}_{xy}, \bar{\kappa}_x, \bar{\kappa}_y, \bar{\kappa}_{xy}$ が x, y によらないとして、(6) 式の u_0, v_0, w_0 を解く。

$$\begin{aligned}
 u_0(x, y) &= \bar{\varepsilon}_x x + \frac{1}{2} \bar{\gamma}_{xy} y \\
 v_0(x, y) &= \bar{\varepsilon}_y y + \frac{1}{2} \bar{\gamma}_{xy} x \\
 w_0(x, y) &= -\frac{1}{2} \bar{\kappa}_x x^2 - \frac{1}{2} \bar{\kappa}_y y^2 - \frac{1}{2} \bar{\kappa}_{xy} xy
 \end{aligned} \quad (7)$$

ここで古典積層理論に合わせるように、(4)式の $\bar{w}(z)$ を求める。

表面力が加わらない無限平板は平面応力状態なので、板厚方向応力 σ_z 、せん断応力 τ_{yz} 、 τ_{zx} は零となり、直交異方性材の構成方程式を用いると、応力とひずみの関係は

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{16} \\ S_{12} & S_{22} & S_{26} \\ S_{16} & S_{26} & S_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} \\
 \gamma_{yz} &= 0, \quad \gamma_{zx} = 0, \quad \varepsilon_z = S_{13}\sigma_x + S_{23}\sigma_y + S_{36}\tau_{xy}
 \end{aligned} \quad (8)$$

となる。

(8)式より

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{16} \\ Q_{12} & Q_{22} & Q_{26} \\ Q_{16} & Q_{26} & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad (10)$$

積層板は n 層の一方方向単層板より構成されているとする。各 i 層の厚さ方向ひずみ ε_{zi} は i 層の材料定数 S_{13i} 、 S_{23i} 、 S_{36i} と応力 σ_{xi} 、 σ_{yi} 、 τ_{xyi} により決まる。

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{zi} &= [S_{13}, S_{23}, S_{36}]_i \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}_i \\
 &= \bar{\varepsilon}_{zi} + z \bar{\kappa}_{zi}
 \end{aligned} \quad (11)$$

$$\bar{\varepsilon}_{zi} = (R_{1i}\bar{\varepsilon}_x + R_{2i}\bar{\varepsilon}_y + R_{3i}\bar{\gamma}_{xy}) \quad (12)$$

$$\bar{\kappa}_{zi} = (R_{1i}\bar{\kappa}_x + R_{2i}\bar{\kappa}_y + R_{3i}\bar{\kappa}_{xy}) \quad (13)$$

$$\begin{bmatrix} R_{1i} \\ R_{2i} \\ R_{3i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{16} \\ Q_{12} & Q_{22} & Q_{26} \\ Q_{16} & Q_{26} & Q_{66} \end{bmatrix}_i \begin{bmatrix} S_{13} \\ S_{23} \\ S_{36} \end{bmatrix}_i \quad (14)$$

(11)式より、中央面からの厚さ方向変位 $\bar{w}(z)$ が計算できる。

$$\begin{aligned}
 \bar{w}(z) &= \int_0^z \varepsilon_z(z) dz \\
 &= \bar{\varepsilon}_{zm} z_m + \frac{1}{2} \bar{\kappa}_{zm} z_m^2 \\
 &\quad + \sum_{i=m+1}^{l-1} \left\{ \bar{\varepsilon}_{zi}(z_i - z_{i-1}) + \frac{1}{2} \bar{\kappa}_{zi}(z_i^2 - z_{i-1}^2) \right\} \\
 &\quad + \bar{\varepsilon}_{zl}(z - z_{l-1}) + \frac{1}{2} \bar{\kappa}_{zl}(z^2 - z_{l-1}^2)
 \end{aligned} \quad (15)$$

積層板は、第2図に示す構成をしているとする。 m 層は中央面を含む層、 l 層は $z_{l-1} < z < z_l$ となる層とする。

(12)、(13)、(15)式より

第2図 積層板の層

$$\begin{aligned}
 \bar{w}(z) &= F_1(z) \bar{\varepsilon}_x + F_2(z) \bar{\varepsilon}_y + F_3(z) \bar{\gamma}_{xy} \\
 &\quad + F_4(z) \bar{\kappa}_x + F_5(z) \bar{\kappa}_y + F_6(z) \bar{\kappa}_{xy}
 \end{aligned} \quad (16)$$

ここで、 $F_k(z)$ 、 $F_{k+3}(z)$ ($k=1, 2, 3$) は

$$\begin{aligned}
 F_k(z) &= R_{km} z_m + \sum_{i=m+1}^{l-1} R_{ki}(z_i - z_{i-1}) \\
 &\quad + R_{kl}(z - z_{l-1}) \\
 F_{k+3}(z) &= \frac{1}{2} R_{km} z_m^2 + \sum_{i=m+1}^{l-1} \frac{1}{2} R_{ki}(z_i^2 - z_{i-1}^2) \\
 &\quad + \frac{1}{2} R_{kl}(z^2 - z_{l-1}^2)
 \end{aligned}$$

(7)、(16)式を(3)、(4)式に代入すると

$$\begin{aligned}
 u &= \bar{\varepsilon}_x x + \bar{\gamma}_{xy} y / 2 + z(\bar{\kappa}_x x + \bar{\kappa}_{xy} y / 2) \\
 v &= \bar{\varepsilon}_y y + \bar{\gamma}_{xy} x / 2 + z(\bar{\kappa}_y y + \bar{\kappa}_{xy} x / 2) \\
 w &= -\bar{\kappa}_x x^2 / 2 - \bar{\kappa}_y y^2 / 2 - \bar{\kappa}_{xy} xy / 2 \\
 &\quad + \bar{\varepsilon}_x F_1(z) + \bar{\varepsilon}_y F_2(z) + \bar{\gamma}_{xy} F_3(z) \\
 &\quad + \bar{\kappa}_x F_4(z) + \bar{\kappa}_y F_5(z) + \bar{\kappa}_{xy} F_6(z)
 \end{aligned} \quad (17)$$

2.2 有限要素法 以上この古典積層理論に対応した、一般化準三次元問題の変位場では、自由端やクラックの影響を考慮できない。その影響を表現するために(2)式を参考にし、局所変位 $U(y, z)$ 、 $V(y, z)$ 、 $W(y, z)$ を加える。自由端やクラックの形状も x 方向に変化しないとし、局所変位は y, z のみによる関数とする。

$$\begin{aligned}
 u &= \bar{\varepsilon}_x x + \bar{\gamma}_{xy} y / 2 \\
 &\quad + z(\bar{\kappa}_x x + \bar{\kappa}_{xy} y / 2) + U(y, z) \\
 v &= \bar{\varepsilon}_y y + \bar{\gamma}_{xy} x / 2 \\
 &\quad + z(\bar{\kappa}_y y + \bar{\kappa}_{xy} x / 2) + V(y, z) \\
 w &= -\bar{\kappa}_x x^2 / 2 - \bar{\kappa}_y y^2 / 2 - \bar{\kappa}_{xy} xy / 2 \\
 &\quad + \bar{\varepsilon}_x F_1(z) + \bar{\varepsilon}_y F_2(z) + \bar{\gamma}_{xy} F_3(z) \\
 &\quad + \bar{\kappa}_x F_4(z) + \bar{\kappa}_y F_5(z) + \bar{\kappa}_{xy} F_6(z) + W(y, z)
 \end{aligned} \quad (18)$$

局所変位に対して、(17)式を一樣変位とする。積層板の変形は、一樣変位と局所変位の和となる。

ベクトル表示にすると、

$$\mathbf{u} = \mathbf{N}^0 \bar{\mathbf{e}} + \mathbf{U} \quad (19)$$

ここで

$$\begin{aligned}
 \mathbf{u} &= \{u, v, w\}^T \\
 \mathbf{U} &= \{U(y, z), V(y, z), W(y, z)\}^T \\
 \bar{\mathbf{e}} &= \{\bar{\varepsilon}_x, \bar{\varepsilon}_y, \bar{\gamma}_{xy}, \bar{\kappa}_x, \bar{\kappa}_y, \bar{\kappa}_{xy}\}^T
 \end{aligned}$$

$$N^0 = \begin{bmatrix} x & 0 & y/2 & xz \\ 0 & y & x/2 & 0 \\ F_1(z) & F_2(z) & F_3(z) & -x^2/2 + F_4(z) \\ 0 & yz/2 & & \\ yz & xz/2 & & \\ -y^2/2 + F_5(z) & -xy/2 + F_6(z) & & \end{bmatrix}$$

ひずみ-変位関係式より、 i 層のひずみ ϵ と応力 σ は、

$$\epsilon = B^0 \bar{e} + E \quad (20)$$

ここで、

$$E = \left\{ 0, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial W}{\partial z}, \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z}, \frac{\partial U}{\partial y} \right\}^T$$

$$B^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & z & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & z & 0 \\ R_{1i} & R_{2i} & R_{3i} & zR_{1i} & zR_{2i} & zR_{3i} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & z \end{bmatrix}$$

$$\sigma = D(B^0 \bar{e} + E - \epsilon_0) \quad (21)$$

ここで、 D は弾性定数マトリックス、 ϵ_0 は初期ひずみである。(21)式において $D(B^0 \bar{e} - \epsilon_0)$ が古典積層理論による応力、 DE が自由端やクラックによる応力となる。

局所変位 $U (= \{U, V, W\}^T)$ を離散化し、有限要素法を行う。局所変位を節点変位 q と内挿関数 N を用いて表す。

$$U = Nq \quad (22)$$

上式より、変位 u は

$$u = [N^0, N] \begin{bmatrix} \bar{e} \\ q \end{bmatrix} \quad (23)$$

(20)、(21)式よりひずみと応力は

$$\epsilon = [B^0, B] \begin{bmatrix} \bar{e} \\ q \end{bmatrix} \quad (24)$$

$$\sigma = D \left([B^0, B] \begin{bmatrix} \bar{e} \\ q \end{bmatrix} - \epsilon_0 \right) \quad (25)$$

物体力のない場合の仮想仕事の原理は、表面力を f として

$$\int_V \delta \epsilon^T \sigma dV - \int_S \delta u^T f dS = 0 \quad (26)$$

$$f = \{f_x, f_y, f_z\}^T \quad (27)$$

(24)、(25)、(26)式より、各剛性要素方程式は

$$\begin{bmatrix} K_{ee} & K_{eq} \\ K_{qe} & K_{qq} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{e} \\ q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_e \\ X_q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Q_e \\ Q_q \end{bmatrix} \quad (28)$$

ここで、それぞれのマトリックスは

$$\begin{bmatrix} K_{ee} & K_{eq} \\ K_{qe} & K_{qq} \end{bmatrix} = \int_V \begin{bmatrix} B^{0T} D B^0 & B^{0T} D B \\ B^T D B^0 & B^T D B \end{bmatrix} dV$$

第3図 有限要素法でのクラック先端

$$\begin{bmatrix} X_e \\ X_q \end{bmatrix} = \int_V \begin{bmatrix} B^{0T} \\ B^T \end{bmatrix} D \epsilon_0 dV$$

$$\begin{bmatrix} Q_e \\ Q_q \end{bmatrix} = \int_S \begin{bmatrix} N^{0T} \\ N^T \end{bmatrix} f dS$$

各要素の剛性方程式を重ね合わせ

$$\begin{bmatrix} \tilde{K}_{ee} & \tilde{K}_{eq} \\ \tilde{K}_{qe} & \tilde{K}_{qq} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{e} \\ q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{X}_e \\ \tilde{X}_q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{Q}_e \\ \tilde{Q}_q \end{bmatrix} \quad (29)$$

積層板を扱うこの論文では、(29)の Q_e は、古典積層理論の合力、合モーメントに積層板の幅を掛けた値となる。

本論文ではクラックの評価をするために、Crack Closure Integral 法⁷⁾を用い、エネルギー解放率の計算を行う。

クラック先端の有限要素法分割を、第3図に示す。第3図(b)は、(a)のクラック先端を Δa 閉じさせた状態である。 $u_i = \{u_i, v_i, w_i\}^T$ ($i = A, A', B, B'$) は剥離進展時(第3図(a))の i 節点の変位、 $X_i = \{X_i, Y_i, Z_i\}^T$ ($i = A, B$) は剥離進展前(第3図(b))の節点 i の節点力とする。

クラックを閉じるエネルギーを、クラックの長さ Δa で割った値がエネルギー解放率となる。エネルギー解放率 G は以下の式により求まる。

$$G = [(u_{A'} - u_A)X_A + (u_{B'} - u_B)X_B] / 2\Delta a \quad (30)$$

3. 数値解析例

定式化した一般化準三次元有限要素法により CFRP (炭素繊維強化プラスチック) の解析を行い、積層板の変形や層間の応力、エネルギー解放率を計算する。解析する積層板の炭素繊維強化プラスチック層は、第1表の材料定数をもつ。 L は繊維方向、 T は繊維に垂直な方向を表す。 E_L, E_T はそれぞれ L, T 方向の縦弾性係数、 G_{LT} はせん断弾性係数、 ν_{LT}, ν_{TT} はポアソン比、 t は単層の厚さとする。この解析において、繊維に垂直な2つの方向、すなわち板の面内方向と厚さ方向では材料の性質は同一であるとし、両方向に関する弾性定数は等しいとする。解析例として取

第1表 Carbon/Epoxy 層の材料定数

E_L (GPa)	127.5
E_T (GPa)	12.26
G_{LT} (GPa)	4.415
ν_{LT}	0.30
ν_{TT}	0.30
t (mm)	0.13

(a) 総変形 u (b) 局所変形 U 第4図 引張り荷重を受ける積層板の自由端付近 yz 断面の変形 (0/90 層間に剥離をもつ (45/-45/0/90)_s 積層板)

り上げる積層板は、幅 25.4 mm、厚さ 1.04 mm、8 層積層板で (45/-45/0/90)_s の積層構成をもつ。この積層板に曲げ荷重、引張り荷重が加わる場合の挙動を調べる。

引張り外力 (10 GPa mm²) が加わる積層板の解析結果を第4図から第7図に示す。剥離は左右自由端の4個所の0/90層間に入っている。

第4図は0/90層間には3mmの剥離が存在している積層板の自由端付近の yz 断面変形図 ($x=0$) である。この変形図では外形と各層間を実線で、変形前の外形と中央面を点線で表しており、第9図の変形図も同様とする。

断面の総変形 (第4図(a)) では、0/90層間の剥離が開く様子が分かる。この剥離の開口は各層のポアソン比の違いが原因となる。断面の局所変形 (第4図(b)) を第4図(a)と比較すると、局所変形は y 方向の縮みが含まれていない。これは y 方向への縮みが古典積層理論の変形であるためである。この例では、中央面のひずみ $\bar{\epsilon}_x$, $\bar{\epsilon}_y$, $\bar{\gamma}_{xy}$, 曲率 $\bar{\kappa}_x$, $\bar{\kappa}_y$, $\bar{\kappa}_{xy}$ の古典積層理論による値との差は、2.6%以内におさまる。これは、Kirchhoff の仮説に基づいている効果である。そして、古典積層理論では考慮されていない変形が、第4図(b)の局所変位により表されている。

引張り荷重が加わるクラックが無い積層板の0/90

第5図 引張り荷重を受ける (45/-45/0/90)_s 積層板の0/90層間応力 第6図 引張り荷重を受ける (45/-45/0/90)_s 積層板の各層間での剥離進展によるエネルギー解放率の変化

層間に発生する応力を、第5図に示す。層間応力の発生は自由端の存在により起こるが、古典積層理論では自由端を考慮していないので層間応力は計算できない。第5図では垂直応力 σ_z が自由端で発散し、せん断応力 τ_{yz} も大きなピークをもつが、せん断応力 τ_{zx} は σ_z , τ_{yz} に比較して低い値である。この層間の引張り応力、せん断応力により層間剥離が発生する。しかし、層間応力を層間剥離の発生の指標とすることは難しい。

第6図に各層間の剥離進展に伴うエネルギー解放率 G を示す。第6図でのエネルギー解放率はすべての層間で同じ値に近づくが、剥離進展初期での各層間のエネルギー解放率はそれぞれ大きく違う。剥離初期では0/90層間のエネルギー解放率の値が最も大きい。このエネルギー解放率の比較より、0/90層間が最も剥離の発生しやすい層であることが分かる。

この0/90層間のエネルギー解放率を、さらにモードごとに分けてみる (第7図)。第7図において、重

第7図 引張り荷重を受ける(45/-45/0/90)_s積層板の0/90層間剥離進展によるエネルギー解放率の変化

重ね合わせ法⁹⁾により計算したエネルギー解放率と一般化準三次元有限要素法の結果を比較する。

重ね合わせ法では、剥離が十分進展しているとしてエネルギー解放率を計算している。一般化準三次元有限要素法によるエネルギー解放率 $G (=G_I + G_{II} + G_{III})$ が、剥離の自由端からの進展につれ、重ね合わせ法による値に漸近していることから、この計算の妥当性がうかがえる。

モード別に見てみると、クラックを開口させるモードIが、エネルギー解放率 G の大部分を占めている。剥離先端での垂直方向応力 σ_z の発散の影響が大きい。モードIIIは他のモードに比べると非常に小さい。第5図の応力場において、モードIIIに対応する応力 τ_{zx} の低さからも、面外せん断による剥離が発生しにくいことが分かる。

曲げ荷重 ($M_x = 1 \text{ GPa mm}^3$) が加わる積層板の解析結果を、第8図から第12図に示す。

上側の0/90層間に剥離を有する積層板全体の变形を第8図に示す。この図において、点線は变形前の形状となっている。x方向の曲げやねじりを考慮した二次元的解析により、第8図のような三次元変形解析が可能としている点が、一般化準三次元解析の特徴である。

引張りの場合と違い、曲げ荷重を加えた場合は $\bar{\kappa}_{xy}$ によるねじれ変形も生じる。この解析での中央面のひずみ $\bar{\epsilon}_x, \bar{\epsilon}_y, \bar{\gamma}_{xy}$ 、曲率 $\bar{\kappa}_x, \bar{\kappa}_y, \bar{\kappa}_{xy}$ と、古典積層理論による値との差は、 $\bar{\kappa}_{xy}$ の16%が最大となる。積層板が自由端を持ち有限幅なので、無限板を仮定している古典積層理論との差が $\bar{\kappa}_{xy}$ に生じる。この解析において積層板の幅を増加させると、 $\bar{\kappa}_{xy}$ は古典積層理論により計算された値に漸近する。

第9図(a)、(b)に、曲げを受ける積層板の自由端

第8図 曲げ荷重を受ける積層板の变形 (0/90層間に剥離をもつ(45/-45/0/90)_s積層板)

(a) 総変形 u

(b) 局所変形 $U \times 10$

第9図 曲げ荷重を受ける積層板の自由端付近 yz 断面の变形 (0/90層間に剥離をもつ(45/-45/0/90)_s積層板)

付近の yz 断面 ($x=0$) のそれぞれ総変形と局所変形を示す。第9図においては、局所変位を10倍して強調している。

両図とも、曲げ荷重による剥離の開口が描かれている。総変形(第9図(a))では、変形の大きな割合を、古典積層理論で求められる変形が占めており、剥離が開く大きさは、全体の变形に比べ小さい。

局所変形図(第9図(b))では、(90/90/0/-45/45)積層部の剥離下部と比べ、剛性の弱い剥離上部の(45/-45/0)積層部が大きく変形している。

第10図の自由端上面側0/90層間応力分布図では、板厚方向垂直応力 σ_z の発散が自由端で現れている。せん断応力 τ_{yz} は他の応力と比べ低い値である。

曲げ変形をする積層板の各層でのエネルギー解放率を第11図に示す。この積層板が曲げ荷重を受ける場合、層間によってはクラックが閉じる変形が起きる。しかしこの解析では、接触や滑りの効果を考慮してお

第10図 曲げ荷重を受ける (45/-45/0/90)_s 積層板の 0/90 層間応力

第11図 曲げ荷重を受ける (45/-45/0/90)_s 積層板の各層間での剥離進展によるエネルギー解放率の変化

第12図 曲げ荷重を受ける (45/-45/0/90)_s 積層板の 45/-45 層間剥離進展によるエネルギー解放率の変化

き、下面側は閉じることが分かる。接触や滑りを考慮しない場合、対称積層板の上面側と下面側の対称層間でのエネルギー解放率が同じになる。しかし、層の接触があった場合、エネルギー解放率のモード I は発生せず、エネルギー解放率 G からモード I 成分 G_I を差し引いた値を接触が起こる層間でのエネルギー解放率と近似できる。

第11図にて、各層のエネルギー解放率は、引張り荷重を受ける場合とは異なり、剥離進展 0.15 mm 前後でピークが表れ、さらに進展すると一定値に近づく。Chan ら⁵⁾も、曲げの積層板の解析で、このピークの報告をしている。

全ての層間で剥離初期にピークがあるが、最も高いエネルギー解放率は 45/-45 層間で発生している。この 45/-45 層間のエネルギー解放率をモード別に分け、第12図に示す。

モード別に見ると、全体の9割以上を、モードIIIが占めており、モード I, II は、モードIIIに比べ僅かである。下面側の 0/90 層間はいきこみが生じるのが、モード I が僅かなので、上面、下面両方の 0/90 層間ともに高いエネルギー解放率 G をもつことになり、0/90 層間に剥離を生じやすい。

4. 結 論

本論文では、古典積層理論をもとに、変位を一樣変位と局所変位に分け、一般化準三次元有限要素法を定式化した。一樣変位は古典積層理論の変形、局所変位は自由端やクラックの影響をそれぞれ表している。この局所変形の分離により、古典積層理論からのずれであるクラックや自由端などの影響による変形を取り出し、変形図として表示できる。

複合積層板において、自由端とクラックなどの存在により、層間剥離を引き起こす応力の特異性が起こる。この解析によってもその特異性が確認された。

一般化準三次元有限要素法に Crack Closure Integral 法を用いることで、エネルギー解放率を容易に計算できる。層間剥離を評価するために、応力拡大係数なども用いられているが、本解析では Crack Closure Integral 法により計算されたエネルギー解放率を用いた。引張り荷重の加わる積層板のエネルギー解放率は剥離の進展とともに単調に増加し、重ね合わせ法による値に漸近した。一方、曲げ荷重の加わる積層板の層間でのエネルギー解放率は剥離の初期でピークが起こり、進展するにつれ一定値に落ち着く。そして、層間の違いや、荷重の種類の違いにより、エネルギー解放率の値、モードの比率の違いが大きくなる。

本解析では、局所変位の解析領域が二次元なので、

らず、剥離面上部と下部の層がいきこむことになる。剥離のある (45/-45/0/90)_s 積層板の変形解析において、曲げ荷重により積層板上面側の各層間は開

三次元有限要素法に比べ計算量が多くならないが、節点は三次元の自由度をもち、曲げやねじりの考慮もされており、数値解析例に示すような三次元変形の解析が可能となる。

以上のように、Kirchhoffの仮説に基づいた一般化準三次元有限要素法解析は、積層板の三次元挙動を解析するための有用な手段といえる。

参 考 文 献

- 1) Pipes, P. B. and Pagano, N. J.: Interlaminar Stresses in Composite Laminates under Uniform Axial Extension, *J. Compos. Mater.*, **4** (1970), pp. 538-548.
- 2) Wang, S. S. and Choi, I.: The Interface Crack Behavior in Dissimilar Anisotropic Composites under Mixed-Mode Loading, *J. Appl. Mech.*, **50** (1983), pp. 179-183.
- 3) Wang, S. S.: Edge Delamination in Angle-Ply Composite Laminates, *AIAA J.*, **22** (1984), pp. 256-264.
- 4) 青木隆平, 近藤恭平: 異方性複合材積層板の層間剝離(I)理論的検討, 日本航空宇宙学会誌, **37** (1989), pp. 29-38.
- 5) Chan, W. S. and Ochoa, O. O.: An Integrated Finite Element Model of Edge-Delamination Analysis for Laminates Due to Tension, Bending, and Torsion Loads, *AIAA Paper No. 87-0704-CP, Proc. AIAA SDM Conf.*, 1987.
- 6) Kunoo, K., Uda, N., Ono, K. and Onohara, K.: Generalized Quasi-Three Dimensional Analysis of Composite Laminates with Unsymmetrically Located Free-Edge Delamination, *Theoret. Appl. Mech.*, **41** (1992), pp. 137-146.
- 7) Rybicki, E. F., Schmueser, D. W. and Fox, J.: An Energy Release Rate Approach for Stable Crack Growth in the Free-Edge Delamination Problem, *J. Compos. Mater.*, **11** (1977), pp. 470-487.
- 8) 青木隆平, 近藤恭平: 積層板の層間剝離に伴うエネルギー解放率の簡易計算法, 日本航空宇宙学会誌, **37** (1989), pp. 193-201.