曲げと圧縮による円筒殻の座屈^{*1}

Buckling of Circular Cylindrical Shells under Combined Bending and Compression

大塚 裕 光^{*2}・古賀 達 蔵^{*2}
Hiromitsu OTSUKA and Tatsuzo KOGA

Key Words: Structural Analysis, Buckling, Circular Cylindrical Shell, Bending, Compression

Abstract: This paper presents results of an experimental study on the buckling of circular cylindrical shells loaded simultaneously with a bending moment and a compressive force. A high precision loading apparatus was designed, by which both the torque and the axial compression can be applied equally on both ends of the cylinder, so that the state of the bending under axial compression is established in the cylinder. Test specimens were made from polyester films, which had length-to-diameter ratios of 2, 5 and 10 and a diameter-to-thickness ratio of 300. In the experiment, the axial force was applied to induce axial stress varying in the range from 0 to 50% of the classical buckling stress. It has been shown that the buckling occurs when the bending stress added to the compressive stress approaches to the classical buckling stress. The experimental buckling stresses were compared with theoretical ones obtained by solving Budiansky's non-linear shell equations numerically.

1. 結 言

薄肉円筒殻が構造物の一部として実際に使用され曲げモーメントが負荷される場合、曲げモーメントと同時に軸力、ねじりモーメント、内外圧等の外力が負荷される場合が多い。円筒殻に曲げおよび軸圧縮力が同時に負荷されると、座屈を支配すると考えられる曲げ圧縮側の最大応力は、第1図のように軸力 P による応力 σ_t と曲げモーメント M による曲げ応力 σ_e の和となる。その結果、曲げ座屈応力 $\sigma_{e,cr}$ は低下すると考えられる。したがって、この場合の座屈応力の解明は重要な課題である。

円筒殻に軸力と曲げモーメントが同時に負荷された場合の解析には、Flügge¹⁾ による理論解析および Seide²⁾ らによる数値解析がある。Flügge は、軸力の増加に伴い円筒殻の曲げ座屈応力が低下することを示した。しかし、これは軸方向の座屈波形の波数を1とした場合であり、異なった波数において、より低い座屈応力が存在する可能性については検討がなされていない。Seide らは、波数と直径/肉厚比を変化させてそれぞれの座屈応力を数値解析により得ている。その結果は、曲げ圧縮側の最大応力が軸圧縮座屈応力にほぼ等しい値で座屈することを示している。一方、曲げモーメントによる座屈に及ぼす軸力の影響について、実験的に検討した例はないようである。

筆者らは、純曲げ状態において円筒殻の座屈モーメントが、その長さが大きくなるにつれて低下すること、座屈は

局部的であり座屈応力は座屈前の変形状態を基準にして算定した古典座屈応力に近いことなどを明らかにしてきた^{3,4)}。

本研究では、軸圧縮力と曲げモーメントが同時に負荷される場合に注目し、軸力と曲げ座屈応力との関係について実験的に検討し、軸圧縮力により生じる一様な軸圧縮応力および曲げモーメントにより生じる曲げ応力と座屈強度との関係を明らかにする。そのため、軸圧縮力と曲げモーメントをそれぞれ任意の大きさと設定でき同時に円筒殻に負荷できる試験装置を作製した。次にこの装置を用いて曲げ試験を行い、曲げ圧縮座屈応力と軸圧縮応力の関係を調べた。また Budiansky によって導出された円筒殻の座屈方程式⁵⁾ による数値計算結果との比較を行った。

2. 実 験

2.1 試験装置 軸力および曲げモーメントを同時に独立に円筒殻試験体に負荷するため、まず軸力を負荷する第2図(a)のような圧縮試験用治具を製作した。これを第2図(b)に示したように前報で使用した純曲げ試験装置の試験体支持部に取り付け、円筒殻に曲げモーメントと軸力をそれぞれ独立にかつ同時に負荷できる曲げ試験装置を製作した。

第2図(a)で試験体①は、その両端を負荷側取付金具②と支持側取付金具③に取り付け、締付金具④と⑤で固定した。試験体の円筒殻としての長さは、取付金具および締付金具に接触していない中央の部分の長さで定義する。取付金具端部にはフランジを設け、負荷された軸力で試験体が取付金具内で軸方向に滑るのを防いでいる。取付金具②と

^{*1} 平成5年7月8日、第35回構造強度に関する講演会にて一部発表。平成10年5月26日原稿受理

^{*2} 工業技術院生命工学工業技術研究所

第1図 曲げと軸力を負荷された薄肉円筒殻

③は、それぞれスラストベアリング⑮と⑯を介して、支持台⑧と⑨に固定された取付金具用軸⑥と⑦に保持される。これにより試験体の取付金具は、その軸方向には自由に移動できる。負荷軸⑫の先端には容量196 Nのロードセル⑩を固定してあり、これを介して取付金具②の軸を押す。取付金具③の軸には、同じく容量196 Nのロードセル⑪を固定してある。軸力はこれらのロードセルにより計測できる。調節ねじ⑭は、それがロードセル⑪と、また、ロードセル⑩が取付金具②とそれぞれ接触するように、試験体と支持台の相対的な位置を決めるために用いる。モーター⑬でそれに連結したギアを回転させ、負荷軸⑫を0~5 mmの範囲で軸方向に繰り出すことにより、試験体端部の断面中心に任意の軸力を負荷することができる。

第2図(b)に示すように、曲げモーメントは糸⑤の張力をロードセル⑥で検出し算出する。負荷速度はモーター⑦をコントローラ⑧で制御して調節する。円筒殻の曲げの圧縮側と引張側の変位は光学の変位計⑨(測定範囲±5 mm)を用いて非接触で計測する。軸力、モーメントおよび変位はA/D変換して解析用コンピュータ⑩に転送し記録する。第2図(c)は、装置全体の写真を示す。

2.2 試験体 円筒殻の試験体には前報の純曲げ試験で用いたものと同じの厚さ0.1 mm、ヤング率5.39 GPaのポリエスチルフィルムを用い、その作成法も前報と同一の方法をとった。円筒殻試験体の直径は30 mm、したがって直径/肉厚比 D/t は300である。また、長さ直径比 L/D は2.5および10とした。実験に供した試験体数は、各寸法について5~9本、合計138本である。

2.3 実験 実験では、まず、装置が水平であることを確認した上、第2図(a)の試験体①を取付金具②③に取り付けた後、純曲げ試験と同様に試験体の両端部が支持台⑧⑨の回転中心と一致する位置で支持台を固定した。次に、調節ネジ⑭がロードセル⑪に軽く接触するように調節した後、モーター⑬を起動して負荷軸⑫を繰り出した。ロードセル⑩および⑪が取付金具③および調節ねじ⑭にそれぞれ接触するのを動ひずみ計の出力で確認した。次に、モーター⑬の回転数を調整しながら軸力を徐々に増加させ、ロードセル⑩および⑪の出力が所定の軸力値に達した時点でモーターを停止した。ロードセル⑩および⑪の出力が同一であることを確認した後、第2図(b)のモーター⑦を起動し、曲げ実験を開始した。曲げモーメントは試験体が座屈するまでほぼ一定の割合で増加させた。

たわみと断面の偏平化など、曲げ負荷による円筒殻の変

(c) 装置の写真

第2図 圧縮曲げ試験装置

形を調べるため曲げの圧縮側と引張側に設置した光学変位計(測定範囲±5 mm)の出力を記録した。曲げ変形により試験体の軸が湾曲すると、試験体両端がわずかに軸方向に近寄るため、軸力が低下する可能性がある。そこで、実験では軸力も同時に座屈するまで記録した。

2.4 圧縮・曲げ試験の結果と考察 第3図は、圧縮曲

げ試験において負荷される曲げモーメントより算出した曲げ圧縮側の最大応力 σ_e と軸圧縮力から算出した軸応力 σ_r とを、円筒の中心軸曲率の増加に対し示したものである。肉厚 h は半径 R に比較して小さいので σ_e と σ_r はそれぞれ、

$$\sigma_e = \frac{M}{\pi R^2 h} \quad (1)$$

$$\sigma_r = \frac{P}{2\pi R h} \quad (2)$$

とした。軸力は、試験開始から座屈発生までほぼ一定であり、大きく変動することはない。第4図は、 $L/D=5$ である試験体に、軸応力 σ_r を変化させて負荷し、曲げ試験を行った場合の中心軸曲率と、曲げ応力の関係を示す。 σ_r は、同一寸法の円筒殻の軸圧縮理論座屈応力 σ_c の0%から45%に変化させた。ここで、円筒殻のヤング率とポアソン比をそれぞれ E 、 ν として、

$$\sigma_c = \frac{Eh}{\sqrt{3(1-\nu^2)}R} \quad (3)$$

である⁹⁾。 $\sigma_r=0$ 即ち、純曲げ試験の場合を最高として座屈応力は σ_r に相当する量だけ減少している。また曲げ応力と円筒の中心軸曲率の関係は σ_r の変化には影響されず、曲げ応力-中心軸曲率曲線は、ほぼ同じ線上に重なることが分かる。

曲げ試験では、 $L/D=2$ と5の試験体は座屈前の変形は小さく、 $L/D=2$ の試験体では、第5図(a)のように圧縮

座屈と同様な座屈パターンが見られた。一方、 $L/D=10$ の試験体では中心軸のたわみと断面の偏平化が明らかに観察された。 $L/D=5$ と10の試験体では断面が潰れるように変形した。これらの座屈後の変形は、前報の純曲げ試験で得られたものと同様であった。

2.5 曲げ座屈応力の計算 得られた実験結果との比較のため、薄肉円筒殻の曲げ座屈方程式として Budiansky の殻方程式⁵⁾を用い解析を行う。円筒殻の半径を R 、肉厚を h とし、座標系を第6図(a)のようにとる。単位幅あたりの垂直力 N_x 、 N_θ 、せん断力 $N_{x\theta}$ およびモーメント M_x 、 M_θ 、 $M_{x\theta}$ は殻の微小要素に対して第6図(b)のように負荷される。これらを用いて平衡方程式は(4)~(6)のようになる。

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial N_{x\theta}}{\partial \theta} - \frac{1}{2R^2} \frac{\partial M_{x\theta}}{\partial \theta} + \sigma_x h \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (4)$$

$$\frac{\partial N_{x\theta}}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial N_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial M_\theta}{\partial \theta} + \frac{3}{2R} \frac{\partial M_{x\theta}}{\partial x} + \sigma_x h \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0 \quad (5)$$

$$-\frac{N_\theta}{R} + \frac{\partial^2 M_{x\theta}}{\partial x^2} + \frac{2}{R} \frac{\partial^2 M_{x\theta}}{\partial x \partial \theta} - \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 M_\theta}{\partial \theta^2} + \sigma_x h \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad (6)$$

ここで σ_x は外力の軸方向応力成分である。円筒殻のヤング率とポアソン比をそれぞれ E 、 ν として、円筒殻の構成式は、変位、 u 、 v 、 w を用いて、

第3図 曲げ試験中の軸圧縮応力と曲げ応力の変化

第4図 曲げ試験中の曲げ応力の変化

(a) $L/D=2$

(b) $L/D=5$

第5図 座屈後の試験体の形状

(a) 円筒殻の座標

(b) 殻要素と断面力および断面モーメント

第6図 円筒殻の座標と要素

$$N_x = \frac{Eh}{1-\nu^2} \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \nu \left(\frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{w}{R} \right) \right] \quad (7)$$

$$N_\theta = \frac{Eh}{1-\nu^2} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{w}{R} + \nu \frac{\partial u}{\partial x} \right) \quad (8)$$

$$N_{x\theta} = \frac{Eh}{2(1+\nu)} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) \quad (9)$$

$$M_x = \frac{-Eh^3}{12(1-\nu^2)} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\nu}{R^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} - \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) \right] \quad (10)$$

$$M_\theta = \frac{-Eh^3}{12(1-\nu^2)} \left[\frac{1}{R^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} - \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] \quad (11)$$

$$M_{x\theta} = \frac{Eh^3}{24(1+\nu)R} \left(-2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \theta} + \frac{3}{2} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{1}{2R} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) \quad (12)$$

である。ここで、

$$(\cdot)' = R \frac{\partial}{\partial x}, \quad (\cdot)^* = \frac{\partial}{\partial \theta}, \quad \frac{1}{12} \left(\frac{h}{R} \right)^2 = k \quad (13)$$

とおき、式(7)~(12)を式(4)~(6)に代入すると、

$$\begin{aligned} & \left(1 + \frac{1-\nu^2}{E} \sigma_x \right) u'' + \frac{(1-\nu)(1+k/4)}{2} u^{**} \\ & + \left[\frac{1+\nu}{2} - \frac{3(1-\nu)k}{8} \right] v'^* + \nu w' + \frac{k(1-\nu)}{2} w'^{**} = 0 \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} & \left[\frac{1+\nu}{2} - \frac{3(1-\nu)k}{8} \right] u'^* \\ & + \left[\frac{(1-\nu)(1+9/4k)}{2} + \frac{1-\nu^2}{E} \sigma_x \right] v'' \\ & + (1+k) v'^{**} - \frac{(3-\nu)k}{2} w'^* + w^* - k w'^{***} = 0 \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} & -\nu u' - \frac{(1-\nu)k}{2} u'^{**} + \frac{(3-\nu)k}{2} u''^* - v^* + k v''' \\ & + w + k(w'''' + 2w''^{**} + w'^{****}) - \frac{(1-\nu^2)}{E} \sigma_x w' = 0 \end{aligned} \quad (16)$$

また、軸方向応力は、

$$\sigma_x = \sigma_b \cos \theta + \sigma_a \quad (17)$$

となる。ここで、 σ_b と σ_a はそれぞれ曲げ応力および軸圧縮応力である。次に、境界条件を考慮して変位 u, v, w を

$$\begin{aligned} u &= \cos \frac{\lambda x}{R} \sum_{m=1}^{\infty} A_m \cos m\theta \\ v &= \sin \frac{\lambda x}{R} \sum_{m=1}^{\infty} B_m \sin m\theta \\ w &= \sin \frac{\lambda x}{R} \sum_{m=1}^{\infty} C_m \cos m\theta \end{aligned} \quad (18)$$

と仮定する。ここに λ は軸方向の座屈波数、 m は周方向の座屈波数である。 u, v, w を式(14)~(16)に代入して係数 A_m, B_m, C_m について整理し、 $\cos m\theta$ と $\sin m\theta$ の係数について比較し整理する。ここで、 q_1 および q_0 をそれぞれ曲げモーメントおよび軸力による単位長さ当たりの負荷とし、

$$q_1 = \frac{1-\nu^2}{E} \sigma_b, \quad q_0 = \frac{1-\nu^2}{E} \sigma_a \quad (19)$$

とする。

q_1 の高次の項を省略して $C_0, C_1, \dots$ について整理すると、

$$a_{11,m} A_m + a_{12,m} B_m + a_{13,m} C_m = \frac{1}{2} q_1 \lambda^2 (A_{m-1} + A_{m+1}) \quad (20)$$

$$a_{21,m} A_m + a_{22,m} B_m + a_{23,m} C_m = \frac{1}{2} q_1 \lambda^2 (B_{m-1} + B_{m+1}) \quad (21)$$

$$a_{31,m} A_m + a_{32,m} B_m + a_{33,m} C_m = \frac{1}{2} q_1 \lambda^2 (C_{m-1} + C_{m+1}) \quad (22)$$

が得られる。但し、 $a_{i,j}$ ($i, j=1, 3$)を次のようにおく。

$$\begin{aligned} a_{11} &= \lambda^2 + \frac{1-\nu}{2} m^2 (1+k/4) - q_0 \lambda^2 \\ a_{12} &= a_{21} = - \left(\frac{1+\nu}{2} + \frac{3(1-\nu)k}{8} \right) \lambda m \\ a_{13} &= a_{31} = -\nu \lambda + \frac{1-\nu}{2} k \lambda^2 m \\ a_{22} &= m^2 (1+k) + \frac{1-\nu}{2} \lambda^2 (1+9/4k) - q_0 \lambda^2 \\ a_{23} &= a_{32} = m (1+m^2 k) + \frac{3-\nu}{2} k \lambda^2 m \\ a_{33} &= 1 + k (\lambda^4 + 2\lambda^2 m^2 + m^4 - m^2 + 1) - q_0 \lambda^2 \end{aligned} \quad (23)$$

A_m, B_m を消去して

$$\begin{aligned} |a_{i,j}|_m C_m &= \frac{1}{2} q_1 \lambda^2 [(a_{11} a_{22} - a_{12}^2)_m (C_{m-1} + C_{m+1})] \\ &[-(a_{31} a_{22} - a_{21} a_{32})_m (A_{m-1} + A_{m+1}) \\ &\quad - (a_{11} a_{32} - a_{12} a_{31})_m (B_{m-1} + B_{m+1})] \\ &= \frac{1}{2} q_1 \lambda^2 [D_{m-1} C_{m-1} + D_{m+1} C_{m+1} + q_1(\cdots)] \quad (24) \end{aligned}$$

ここで,

$$\begin{aligned} D_k &= [(a_{11} a_{22} - a_{12}^2)_m \\ &\quad - (a_{13} a_{22} - a_{21} a_{32})_m \frac{(a_{12} a_{23} - a_{13} a_{22})_k}{(a_{11} a_{22} - a_{12}^2)_k} \\ &\quad - (a_{11} a_{32} - a_{12} a_{31})_m \frac{(a_{21} a_{13} - a_{11} a_{23})_k}{(a_{11} a_{22} - a_{12}^2)_k}] \quad (25) \end{aligned}$$

である. 式(24)において q_1 の高次項は無視できるので C_k に関する以下の連立一次方程式が得られる.

$$\begin{bmatrix} |a_{i,j}|_0 & -\frac{1}{2} q_1 \lambda^2 D_0 & \cdots & \cdots \\ -\frac{1}{2} q_1 \lambda^2 D_1 & |a_{i,j}|_1 & -\frac{1}{2} q_1 \lambda^2 D_1 & \cdots \\ \cdots & -\frac{1}{2} q_1 \lambda^2 D_2 & |a_{i,j}|_2 & -\frac{1}{2} q_1 \lambda^2 D_2 \\ \cdots & \cdots & -\frac{1}{2} q_1 \lambda^2 D_3 & |a_{i,j}|_3 & -\frac{1}{2} q_1 \lambda^2 D_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_0 \\ C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix} = 0 \quad (26)$$

上式の第1項の係数行列式が0になるような q_1 および q_0 を計算する. q_1, q_0 を用いて座屈応力 $\sigma_{x(\max)}$ は

$$\sigma_{x(\max)} = \frac{(q_1 + q_0)E}{1 - \nu^2} \quad (27)$$

より得られる.

式(19), (26)を用いて軸方向波数 λ に対し曲げ座屈応力 σ_b を求めると第7図が得られる. ここでは曲げ座屈応力を同じ円筒殻の一樣軸圧縮時の理論座屈応力 σ_c で正規化した. σ_a は0から $0.47\sigma_c$ まで $0.047\sigma_c$ きざみで変化させた. σ_a の増加値とほぼ同じ減少値で曲げ座屈応力は低下している.

第8図～第10図には, 実験で得られた曲げ座屈応力 σ_e を軸圧縮座屈応力 σ_c との比で表し, σ_t と σ_c との比に対して示す. 同図には第7図で得られた各 σ_a に対する最小座

第7図 円筒殻の曲げ座屈応力と軸力との関係

第8図 曲げ座屈応力と軸力との関係 ($L/D=2$)

屈応力の計算値 σ_b を示した. 実験値はこの計算値より低い値に分布し, L/D の増加に伴って計算値との比率は減少した. また曲げ圧縮側の最大応力である σ_e と σ_t の和はほぼ一定になることが分かる. また各図には Brazier⁷⁾ の曲げモーメントに相当する曲げ圧縮側最大応力から σ_b を引いた値 (破線) も示した.

第8図～第10図で $\sigma_t/\sigma_c=0$ の場合は, 純曲げ試験に相当する. 第11図は前報の純曲げ試験¹⁾の結果と本研究との比較を示す. 両者に差異はなく, 本実験の結果が前報の結果と比較可能なことを示している.

第12図は, 座屈時の円筒殻の曲げ面内方向の断面直径の縮小率を偏平化率 $\rho(\%)$ を用いて示したものである. ρ は円筒殻断面の曲げの圧縮側の変位 δ_1 と引張側の変位 δ_2 を用いて,

第9図 曲げ座屈応力と軸力との関係 ($L/D=5$) 第11図 純曲げによる座屈応力と円筒殻の長さ (L/D) との関係 第10図 曲げ座屈応力と軸力との関係 ($L/D=10$)

第12図 円筒殻断面の偏平化

$$\rho = \frac{\delta_1 - \delta_0}{D} \times 100 (\%) \quad (28)$$

で定義する。 $L/D=10$ の試験体では大きな偏平化が見られたが、軸力の増加にともなって座屈時の偏平化率は減少した。偏平化率は、純曲げ試験の場合と同様に L/D が10では急激に大きくなり、 $\sigma_t=0$ での偏平化率は4%前後であり、断面の変形についても過去の試験と同様な結果が得られた。

第13図は、円筒殻の中心軸のたわみ δ を次式で定義し、その測定値を示したものである。

$$\delta = \frac{(\delta_1 + \delta_0)}{2D} \times 100 \quad (29)$$

δ は、偏平化率 ρ と同様に軸力の増加にともなって減少した。また $L/D=10$ では大きな値を示している。

第13図 座屈時のたわみ

3. 結 言

薄肉円筒殻に軸力と曲げモーメントを同時に負荷できる装置を製作し、直径/肉厚比 300、長さ/直径比 2.5 および 10 の円筒殻の曲げ試験を行った。座屈モーメントと軸力および変形量を計測しその座屈挙動について実験的に調べ、以下の結果を得た。

(1) 同じ長さの円筒殻では軸力の増加に従って曲げ座屈応力は低下した。

(2) 座屈応力は、Budiansky の殻座屈方程式による値と Brazier の屈服座屈モーメントによる曲げ圧縮側の最大応力値との間に分布した。軸力による応力と曲げモーメントによる応力の和である円筒殻の曲げ圧縮側の最大応力は、同じ長さの円筒殻では軸力の変化に拘わらずほぼ一定の値で分布した。またその値は各長さ/直径比の円筒殻について純曲げ試験で得られた値とほぼ同じであった。

(3) 長さ/直径比 $L/D=2$ および 5 では、座屈前の変形は小さく、座屈応力は一様圧縮座屈のそれに近かった。

長さ/直径比が大きくなると座屈時の偏平化率 ρ およびたわみ量 δ は増加したが、軸力の増加に従ってそれぞれ減少した。 $L/D=10$ の試験体は $L/D=5$ のものに比較して同じ軸力を負荷した場合に約 8 倍の偏平化が見られた。

参 考 文 献

- 1) Flügge, W.: Stresses in Shells, Springer-Verlag, Berlin, 1962, pp. 478-484.
- 2) Seide, P. and Weingarten, V. I.: On the Buckling of Circular Cylindrical Shells under Pure Bending, J. Appl. Mechanics, **28**, March (1961), pp. 112-116.
- 3) 大塚裕光, 古賀達蔵: 円筒殻のはり様曲げによる座屈 (第 1 報), 日本航空宇宙学会誌, **43** (1995), pp. 575-581.
- 4) 大塚裕光, 古賀達蔵: 円筒殻のはり様曲げによる座屈 (第 2 報), 日本航空宇宙学会誌, **44** (1996), pp. 609-614.
- 5) Budiansky, B.: Notes on Nonlinear Shell Theory: J. Appl. Mechanics, **35**, June (1968), pp. 393-401.
- 6) Brush, D. O. and Almroth, B. O.: Buckling of Bars, Plates and Shells, McGraw-Hill, New York, 1975, pp. 167-168.
- 7) Brazier, L. G.: On the Flexure of Thin Cylindrical Shells and other "Thin" Sections, Proc. of Royal Soc. of London (ser.a), **116** (1927), pp. 104-114.