楕円型格子形成法における格子の重なりについて^{*1}

On Grid Folding in Elliptic Grid Generation

松 野 謙 —^{*2}
Kenichi MATSUNO

Key Words : CFD, Grid Generation, Elliptic Equation, Difference Scheme

Abstract : This paper discusses on grid folding in the Laplace system of equations of grid generation. Although it is widely believed that a grid-generation method using the Laplace system does not result grid folding due to maximum principle, we have often encountered the grid folding especially at a trailing edged of an airfoil of O-grid topology. This paper gives an explanation of the phenomenon by considering that the elliptic grid-generation equations include partly a characteristic of a steady advection-diffusion equation. A method for avoiding grid folding in the Laplace system is presented using upwind-type finite difference discretization.

1. 緒 言

楕円型方程式、とくにラプラス方程式やポアソン方程式を用いた格子形成法¹⁾は、差分法を適用するための構造格子形成法として、よく用いられる方法で、しばしば、楕円型格子形成法と呼ばれる。楕円型格子形成法を用いて格子を形成する場合、ラプラス方程式の場合には最大値原理が存在し、それゆえ格子が重なることは無いと一般には信じられているが、たとえば、翼型まわりにO型格子を形成する場合など、翼後縁部で格子点が境界の外に出てしまうことを、多くの者が経験している。

本論文の目的は、このような格子点が重なるあるいは境界の外に出てしまう問題について楕円型偏微分方程式の離散化手法の観点から議論し、その解決策を与えることである。

2. 楕円型格子形成法と格子の重なり

二次元楕円型格子形成法の最も簡単な方程式は、ラプラスの式 ($\xi_{xx} + \xi_{yy} = 0$ および $\eta_{xx} + \eta_{yy} = 0$) である。通常は、より解き易い従属変数と独立変数の役割を交換した次の式が用いられる。

$$\alpha r_{\xi\xi} - 2x r_{\xi\eta} + \beta r_{\eta\eta} = 0. \quad (1)$$

ここに、 $r = [x, y]^T$ であり、また、

$$\alpha = x_\xi^2 + y_\xi^2, \quad \beta = x_\eta^2 + y_\eta^2, \quad x = x_\xi x_\eta + y_\xi y_\eta. \quad (2)$$

格子形成は、予め生成された境界上の格子点を境界条件として内部の格子点の座標 $r_{i,j}$ を式(1)を解くことによって得る。この場合、偏微分の離散化は中心差分が通常用いられる。いま、 i, j をそれぞれ ξ, η 方向の格子番号とし、 $\Delta\xi = 1$ を仮定すると中心差分は、例えば

$$(r_{\xi\xi})_{i,j} = r_{i+1,j} - 2r_{i,j} + r_{i-1,j}$$

$$(r_\eta)_{i,j} = \frac{1}{2}(r_{i+1,j} - r_{i-1,j}) \quad (3)$$

で表される。ここで、一階微分の中心差分近似は、中央の点 $r_{i,j}$ を参照しないことに注意されたい。ラプラス方程式は、最大値原理が成り立つにもかかわらず、その解である格子点が重なったり境界の外側に出るのは、離散近似によって解かれるからである。

Roache ら²⁾は、第1図に示すような 3×3 の格子点 ($i, j = 1, 2, 3$) で構成される領域で、中央 (2, 2) の格子点 $r_{2,2} = (x_{2,2}, y_{2,2})$ のみが内点で他は境界点となる格子形成問題を用いてその現象を示し経験的な解決策を示している。第1図に示す領域について上述の格子形成法を適用すると、未知数は内点の格子点座標 $r_{2,2}$ のみであるから、手計算で次のように求められる。

$$x_{2,2} = \frac{(h_1 + h_2)^2 (k_1 + k_2)}{2(h_1 + h_2)^2 + 2(k_2 - k_1)^2}, \quad y_{2,2} = 0 \quad (4)$$

したがって、格子点 $r_{2,2}$ が領域の内側に位置するためには $k_1 < x_{2,2} < k_2$ でなければならない、これは

$$0 < \left(1 + \frac{h_2}{h_1}\right)^2 - 2\left(\frac{k_1}{h_1}\right)^2 \left(\frac{k_2}{k_1} - 1\right) \quad (5)$$

を意味する。すなわち、上式を満足するような制限が領域に必要となる。言い換えれば、翼後縁部のような式(5)を満足しない領域に格子形成をする場合、形成された格子は領域外に位置することとなる。Roache ら²⁾は、この原因として、中心差分による離散化は一階微分項が、中央の点、この場合 (2, 2) を参照しないためであり、次の片側差分近似を用いることにより回避できると述べている。

$$\begin{aligned} x_\xi &= x_{i+1,j} - x_{i,j}, & \text{for } x_{\xi\xi} < 0, \\ x_\xi &= x_{i,j} - x_{i-1,j}, & \text{for } x_{\xi\xi} > 0. \end{aligned} \quad (6)$$

ただし、正負符号は、モデル問題より帰納したもので一般性については未知としている。

本論文では、この問題について、離散化された移流拡散方程式のもつ「ウイグル振動」の観点から考察し、格子点

^{*1} 平成 11 年 10 月 1 日原稿受理

^{*2} 京都工芸繊維大学工芸学部

第1図 鋭い凸境界を持つ領域に対する3×3格子

の重なり回避法を示す。第1図に示す条件下では、 x 軸について対称であることを考慮するとつねに $y_{2,2}=0$ であり、残る格子形成方程式を変形すると次式となる。

$$(y_\eta^2)x_{\xi\xi} + (x_\xi x_{\eta\eta})x_\xi = 0 \quad (7)$$

上式は、見方を変えたと一種の移流拡散型の方程式と見ることができる。我々は、この方程式の単調増加解 x を求めているわけである。文献3)に示されているように、単調増加(減少)する解を持つ移流拡散方程式

$$u_{\xi\xi} + Pu_\xi = 0 \quad (8)$$

を中心差分を用いて離散近似した場合、次の条件

$$|P\Delta\xi| < 2 \quad (9)$$

を満足しない場合、単調解が得られず、「ウィグル (wiggles)」とよばれる振動が起ることが解析的に示される。

式(7)と式(8)を対比すると、単調増加する解を得るためには条件式(9)に対応して $(\Delta\xi=1$ および $y_\eta^2 \neq 0$ を考慮して)

$$\left| \frac{x_\xi x_{\eta\eta}}{y_\eta^2} \right| = \left| \frac{k_2 - k_1}{2} \cdot \frac{(-2x_{2,2})}{\left(\frac{h_1 + h_2}{2}\right)^2} \right| < 2 \quad (10)$$

が成立することが必要で、これは式(5)と同様の意味を持つ。したがって上式が満足されない場合は、文献3)に解析的に示されたように、単調増加する解が得られず「振動解」この場合は格子の重なりとなるのである。格子の重なりを回避するには、このウィグル型の振動が起きないような差分近似をとれば良く、したがって、文献3)に示されたように、風上差分近似をとれば単調増加解が得られる。

Roache ら²⁾は、理論的根拠無くモデル問題を通して式(6)に見られるように $x_{\xi\xi}$ の正負符号に応じて片側差分をとったが、ここでは、移流拡散型方程式とみなし、風上差分となるようにとれば良いと主張する。すなわち、 $M = x_\xi x_{\eta\eta} / y_\eta^2$ において、風上差分近似

$$(x_\xi)_{i,j} = x_i - x_{i-1}, \text{ for } M < 0$$

$$(x_\xi)_{i,j} = x_{i+1} - x_i, \text{ for } 0 \leq M \quad (11)$$

とすることにより、格子の重なりが生じないようにできる。

上述は、第1図に示された特殊な形状の場合である。一般の場合は基本的には、一階微分項が中央の格子点 $r_{i,j}$ を参照する必要があることを考慮し、上述の例を参考に式(1)を、次のように変形する。

$$\begin{aligned} & [(y_\eta^2)x_{\xi\xi} + (-x_\eta x_{\xi\eta} + x_\xi x_{\eta\eta})x_\xi] \\ & + [(y_\xi^2)x_{\eta\eta} + (-x_\xi x_{\eta\eta} + x_\eta x_{\xi\xi})x_\eta] \\ & - 2y_\xi y_\eta x_{\xi\eta} = 0, \\ & [(x_\eta^2)y_{\xi\xi} + (-y_\eta y_{\xi\eta} + y_\xi y_{\eta\eta})y_\xi] \\ & + [(x_\xi^2)y_{\eta\eta} + (-y_\xi y_{\eta\eta} + y_\eta y_{\xi\xi})y_\eta] \\ & - 2x_\xi x_\eta y_{\xi\eta} = 0. \end{aligned} \quad (12)$$

まず、上式の各項を中心差分で評価し、次に大括弧 [...] で囲まれた項について、一階微分項の係数の大きさを評価し、「ウィグル型振動」が生じないように、それが大きい場合には風上差分にする。

3. 結 言

一階および二階微分が混在する方程式の離散化に中心差分を適用した場合、一階微分項の係数の大きさに依存して「ウィグル型振動」が起ること、またそれを避けるためには風上型差分が有効であることを、ここでは楕円型格子形成法における格子の重なりに関連付けて議論した。本論文の議論は、帰納的に導いたもので、一般性についての議論は更に必要であると思われる。

参 考 文 献

- 1) Thompson, J. F., Warsi, Z. U. A. and Mastin, C. W.: Numerical Grid Generation: Foundations and Applications, North-Holland, New York, 1985.
- 2) Roache, P. J. and Steinberg, S.: A New Approach to Grid Generation Using a Variational Formulation, AIAA-85-1527, Proc. of AIAA 7th CFD Conf., 1985, pp. 360-370.
- 3) 松野謙一: "Wiggles" と中心-風上混合差分, 日本航空宇宙学会誌, 38 (1990), pp. 386-389.