節理分布性状の確率統計学的モデル化に関する研究 (その 3)

— パラメトリック推定手法とモデル化 —

菊地宏吉*・水戸義忠*・本多 眞**

Stochastic Modelling of Rock Joint Distribution Part 3: Parametric Estimation and Modelling

Kokichi KIKUCHI*, Yoshitada MITO* and Makoto HONDA**

Key words : 節理分布 joint distribution, 推計 stochastic estimation, 確率モデル probabilistic model.

Abstract

Based on the probabilistic space model which is defining the distribution of joint characteristic elements [1) orientation, 2) persistence, 3) density, 4) aperture, 5) filling, 6) roughness and 7) conductivity], the authors suggest the stochastic point-estimation and interval-estimation method is to generate the joint traces or joint disks in two dimensional area or three dimensional space, respectively, considering probabilistic space of each joint characteristic element.

1. 緒 言

本論文は、大型土木構造物の基礎となる硬質岩盤の力学特性ならびに透水特性等の工学的特性に強く影響を与えるとされる節理の分布性状を定量的に把握し、確率的にモデル化を行う手法について提案することを目的として 3 編に分けて論じるものである。既に、「その 1」では節理の調査手法と標本データの偏向の補正方法、それに加えて確率分布に基づく統計処理を施すための調査標本の層別化に関する手法について述べた。また、「その 2」では節理の分布を特徴づける特性要素を明確にし、それぞれの工学的問題点や既往の研究について述べた。さらに、各特性要素毎にその分布形態について既往の調

査データから検討して確率構造を各々確率変数としてモデル化した。

これらの要素毎にモデル化した確率モデルは複数の確率変数から成り立っており、多次元を成している。この多次元確率モデルは、複数の未知パラメータを含んでおり、この確率モデルを基に節理分布のモデル化を行うためには、これらの未知パラメータを調査標本データから統計的に推定する必要がある。そこで本論文「その 3」では、特性要素毎に確率分布を規定する未知パラメータの統計的推定手法について提案し、その確率構造を基にした節理分布の幾何学的なモデル化手法について述べる。さらに解析モデルの予察として、この節理分布モデルを用いた解析手法についても触れる。

2. 管理特性要素の確率モデルの概要

確率モデルの定義については既に「その 2」で述べた

* 京都大学工学部 Faculty of Engineering, Kyoto Univ.

** 清水建設(株)大崎研究室 Ohsaki Reserch Institute, Shimizu Co.

が、ここで節理分布の特性要素毎の各確率関数を列挙し、推定すべき未知パラメータを明確にする。節理分布性状を支配する特性要素としては次の 7 つを考えている。

- 1) 方向性：節理の方向
- 2) 連続性：節理面の寸法
- 3) 稠密性：節理の分布密度
- 4) 開口性：節理の開口幅
- 5) 挟在性：節理内に含まれる挟在物
- 6) 粗面性：節理面の粗さ
- 7) 連結性：節理面の連結状態

「その 2」で定義した確率モデルを以下にまとめて示す。

1) 方向性

○確率密度関数

〈節理群〉

$$f_O(\omega, \varepsilon) = \frac{1}{2\pi\sigma_\omega^2\sigma_\varepsilon^2} \exp \left[-\frac{1}{2} \left\{ \frac{(\omega - \varphi_S)^2}{\sigma_\omega^2} + \frac{(\varepsilon - \theta_S)^2}{\sigma_\varepsilon^2} \right\} \right] \quad (1)$$

ω, ε ：節理面方向の方位角と天頂角，

φ_S, θ_S ：節理群の平均方向の方位角と天頂角，

$\sigma_\omega^2, \sigma_\varepsilon^2$ ：走向方向および傾斜方向の分散

〈非節理群〉

$$f_O(x, y, z | \overline{\text{set}}) = \frac{1}{\Omega(\overline{\text{set}})} \quad (2)$$

x, y, z ：全体デカルト座標成分， $\Omega(\overline{\text{set}})$ ：節理群以外の空間座標

○未知パラメータ

節理群平均方向 (φ_S, θ_S)，分散 $\sigma_\omega^2, \sigma_\varepsilon^2$

2) 連続性

○確率密度関数

〈トレース長〉

$$f_L(l) = \frac{1}{\bar{l} - l_0} \exp \left(-\frac{l - l_0}{\bar{l} - l_0} \right) \quad (3)$$

l ：トレース長， l_0 ：最小トレース長，

$\bar{l}$ ：平均トレース長

〈節理半径〉

$$f_R(r) = \int_L \frac{\bar{r}^2}{2r^3 \sqrt{4r^2 - \bar{l}^2}} \cdot f_L(l) dl \quad (4)$$

r ：節理半径， $\bar{r}$ ：平均円盤半径

○未知パラメータ

平均トレース長 $\bar{l}$ ，平均円盤半径 $\bar{r}$

3) 稠密性

○確率関数

$$P_L(m) = \frac{(\rho_L)^m}{m!} \exp(-\rho_L) \quad (5)$$

$$P_A(m) = \frac{(\rho_A)^m}{m!} \exp(-\rho_A) \quad (6)$$

$$P_V(m) = \frac{(\rho_V)^m}{m!} \exp(-\rho_V) \quad (7)$$

ρ_L ：1 次元密度， ρ_A ：2 次元密度，

ρ_V ：3 次元密度

○未知パラメータ

1, 2, 3 次元密度 ρ_L, ρ_A, ρ_V

4) 開口性

○確率密度関数

$$f_T(\ln t | l) = N(\ln \alpha + \beta \ln l, \sigma_T(l)) \quad (8)$$

$\sigma_T(l)$ ： l における開口幅の分散

○未知パラメータ

帰定数 α, β ，分散 $\sigma_T^2(l)$

5) 挟在性

○確率関数

$$P(X=k | \text{set}) = \frac{\binom{Np_m(\text{set})}{k} \binom{N(1-p_m(\text{set}))}{n-k}}{\binom{N}{n}} \\ = \frac{(Np_m(\text{set}))! \{N(1-p_m(\text{set}))\}! n! (N-n)!}{k! (Np_m(\text{set}) - k)! (n-k)! \{N(1-p_m(\text{set}))\}! N!} \quad (9)$$

X ： N 個の節理母集団のより n 個の節理を抽出する際の挟在物を含む節理の数

○未知パラメータ

挟在物の存在確率 p_m

6) 粗面性

○確率密度関数

$$f_B(b) = N(\bar{b}, \sigma_B) \quad (10)$$

$\bar{b}$ ：粗面性の指標

○未知パラメータ

平均 $\bar{b}$ ，分散 σ_B^2

7) 連結性

○確率関数

$$P_C(1)=p_I \quad (11)$$

$$P_C(2)=p_L \quad (12)$$

$$P_C(3)=p_T \quad (13)$$

○未知パラメータ

各連結タイプ出現確率 p_I, p_L, p_T

3. 確率モデルのパラメトリック推定手法

前章では各特性要素毎の確率構造と推定すべき未知パラメータについて列挙した。そこで、これらモデル関数の各パラメータを統計的に推定する手法を提案すると同時に、得られる統計量の信頼性について明確にする。なお、推定には母数の推定値を求める点推定と母数を含む区間を推定して、その確率（すなわち信頼度）を同時に求める区間推定の両方について述べており、推定値の信頼性についても考慮している。

3.1 方向性分布

・点推定

式(1)のように仮定した節理方向分布の確率密度関数において、標本データから統計的に推定すべきパラメータは各節理群の平均方向 (φ_S, θ_S) および分散 $\sigma_\omega^2, \sigma_\varepsilon^2$ である。

GROSSMAN¹⁾は等方両正規分布の母数を求めるべく、最尤法による推定値を与えているが、本論文においてもこの2次元正規分布の未知パラメータの推定に最尤法を適用する。

最尤法では次式で示されるような、推定すべきパラメータを変数とする関数（尤度関数）を設定する。

$$p(\mathbf{x}|\boldsymbol{\theta}) = \prod_{i=1}^N f(x_i|\boldsymbol{\theta}) \quad (14)$$

ここで、 $f(x_i|\boldsymbol{\theta})$ は確率密度関数であり、標本データ x_i が与えられたとき、 $\boldsymbol{\theta}$ （未知パラメータベクトル）のみの関数となる。ここでとりうるすべての $\boldsymbol{\theta}$ に対して、 $p(\boldsymbol{\theta}^*) > p(\boldsymbol{\theta})$ が成り立つような $\boldsymbol{\theta}^*$ が、求める推定値である。

いま、確率密度関数が式(1)で与えられているので、 N 個の標本データから N 次元同時確率密度関数である尤度関数が次式で与えられる。

$$p(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\varepsilon}|\boldsymbol{\theta}) = \prod_{i=1}^N f(\omega_i, \varepsilon_i) = \frac{1}{(2\pi\sigma_\omega^2\sigma_\varepsilon^2)^N} \times \exp \left[-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \left\{ \frac{(\omega_i - \varphi_S)^2}{\sigma_\omega^2} + \frac{(\varepsilon_i - \theta_S)^2}{\sigma_\varepsilon^2} \right\} \right] \quad (15)$$

ここで、 $\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\varepsilon}$ は標本値ベクトル、 $\boldsymbol{\theta}$ はここで推定するパラメータベクトルで、 $\{\varphi_S, \theta_S, \sigma_\omega^2, \sigma_\varepsilon^2\}$ を成分とする。

最尤推定法では、この尤度関数を最大とするようなパラメータベクトル $\boldsymbol{\theta}$ を求めることになるが、計算上次式で示す負の対数尤度を最小化することにより決定する。

$$L(\boldsymbol{\theta}) = -\ln p(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\varepsilon}|\boldsymbol{\theta}) = N \ln(2\pi) + N \ln \sigma_\omega^2 + N \ln \sigma_\varepsilon^2 + \frac{\sum (\omega_i - \varphi_S)^2}{2\sigma_\omega^2} + \frac{\sum (\varepsilon_i - \theta_S)^2}{2\sigma_\varepsilon^2} \quad (16)$$

ここで、この対数尤度を最小化する方法としてニュートン・ラフソン法による繰り返し計算を行う。ニュートン・ラフソン法では、各反復において関数 $L(\boldsymbol{\theta})$ をある点 $\boldsymbol{\theta}^{(k)}$ でテイラー展開して得られる次式の2次関数が最小となる点を、次の反復点 $\boldsymbol{\theta}^{(k+1)}$ とする。

$$q^{(k)}(\boldsymbol{\theta}) = L(\boldsymbol{\theta}^{(k)}) + \nabla L(\boldsymbol{\theta}^{(k)})^T (\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}^{(k)}) + \frac{1}{2} (\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}^{(k)})^T \nabla^2 L(\boldsymbol{\theta}^{(k)}) (\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}^{(k)}) \quad (17)$$

ここで、 $\nabla L(\boldsymbol{\theta})$ および $\nabla^2 L(\boldsymbol{\theta})$ はそれぞれ関数 L の勾配ベクトルとヘッセマトリックスであり、

$$\nabla L(\boldsymbol{\theta}) = \begin{Bmatrix} \partial L(\boldsymbol{\theta}) / \partial \varphi_S \\ \partial L(\boldsymbol{\theta}) / \partial \theta_S \\ \partial L(\boldsymbol{\theta}) / \partial (\sigma_\omega^2) \\ \partial L(\boldsymbol{\theta}) / \partial (\sigma_\varepsilon^2) \end{Bmatrix} \quad (18)$$

$$\nabla^2 L(\boldsymbol{\theta}) = \begin{bmatrix} \partial^2 L(\boldsymbol{\theta}) / \partial \varphi_S^2 & \cdots & \partial^2 L(\boldsymbol{\theta}) / \partial (\sigma_\omega^2) \partial \varphi_S \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial^2 L(\boldsymbol{\theta}) / \partial (\sigma_\omega^2) \partial \varphi_S & \cdots & \partial^2 L(\boldsymbol{\theta}) / \partial (\sigma_\omega^2)^2 \end{bmatrix} \quad (19)$$

で定義される。

そこで、関数 $q^{(k)}$ が最小となるためには $\nabla q^{(k)}(\boldsymbol{\theta}) = 0$ より、そのときの点 $\boldsymbol{\theta}^{(k+1)}$ は

$$\boldsymbol{\theta}^{(k+1)} = \boldsymbol{\theta}^{(k)} - \nabla^2 L(\boldsymbol{\theta}^{(k)})^{-1} \nabla L(\boldsymbol{\theta}^{(k)}) \quad (20)$$

と表される。この反復計算を繰り返すことにより、未知パラメータの推定値、平均方向 $(\varphi_S^*, \theta_S^*)$ および分散 $\sigma_\omega^{*2}, \sigma_\varepsilon^{*2}$ が求められる。

なお、節理群の局所座標系を全体デカルト座標系に変換するには、次式を用いる。

$$\begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_S \cos \varphi_S & \sin \varphi_S & \sin \theta_S \cos \varphi_S \\ -\cos \theta_S \cos \varphi_S & \cos \varphi_S & -\sin \theta_S \sin \varphi_S \\ -\sin \theta_S & 0 & \cos \theta_S \end{bmatrix}$$

$$\times \begin{pmatrix} \sin \xi \cos \zeta \\ \sin \xi \cos \zeta \\ \cos \xi \end{pmatrix} \quad (21)$$

• 区間推定

点推定で求めたパラメータの信頼性を把握するためには、区間推定を行い母数を含む確率を明確にする必要がある。方向性分布のパラメータは節理群の平均方向を軸とする 2 次元正規分布であり、走向方向および傾斜方向それぞれの区間推定量 ϕ_S^* , θ_S^* は標準正規確率変数 S を用いて次式で表される。

$$\phi_S^* = \phi_S^* \pm \frac{S\sigma_\phi^*}{\sqrt{N-1}} \quad (22)$$

$$\theta_S^* = \theta_S^* \pm \frac{S\sigma_\theta^*}{\sqrt{N-1}} \quad (23)$$

3.2 連続性・稠密性分布

連続性および稠密性分布の確率関数を規定するパラメータの間には密接な関係があるので、ここでまとめて述べることにする。

連続性分布の確率関数を規定するパラメータは式(3)で平均トレース長 $\bar{l}$ 、稠密性分布の確率関数を規定するパラメータは式(5), (6)で 1, 2 次元密度 ρ_L , ρ_A が挙げられる。これら 3 つのパラメータの間には次のような関係が存在する²⁾。

$$\rho_L = \bar{l}\rho_A \quad (25)$$

この証明についてはここでは触れないが、各節理群においてこの式が成り立つためには、3 つのパラメータのうち何れか 2 つのパラメータについて推定を行えばよいことになる。また同様に非節理群については、次のような関係が存在する。

$$\rho_L = \frac{2}{\pi} \bar{l}\rho_A \quad (26)$$

以下にそれぞれ調査手法別に推定手法を述べる。

a) 調査線サンプリングデータによる推定

• 点推定

調査線情報から推定可能なパラメータは、1 次元密度 ρ_L 、平均トレース長 $\bar{l}$ である。2 次元密度 ρ_A はこの 2 つの推定値から式(25), (26)を用いて求める。

1 次元密度

$$\rho_L^* = \sum_{i=1}^{N_L} \left(\frac{1}{\sum_{j=1}^{N^{(i)}} \{L_{Li} | \mathbf{n}_{Li} \cdot \mathbf{n}_j^{(i)}\}} \right) \quad (27)$$

ここで、 N_L : 調査線数

$N^{(i)}$: 調査線 i の節理数

L_{Li} : 調査線 i の寸法

$\mathbf{n}_{Li}$: 調査線 i の単位方向ベクトル

$\mathbf{n}_j^{(i)}$: 調査線 i で節理面 j の単位法線ベクトル

である。

一方で、非節理群における推定量 ρ_L^* は次式の通りである。

$$\rho_L^* = \frac{\sum_{i=1}^{N_L} N^{(i)}}{\sum_{i=1}^{N_L} L_{Li}} \quad (28)$$

平均トレース長

平均トレース長の推定値 $\bar{l}$ は調査線と交差する管理の平均トレース長の推定値 $\bar{l}_S^*$ を用いて次のように導く。すなわち、調査線と交差する節理の平均トレース長 $\bar{l}_S^*$ は $f_L(l|I)$ の確率変数 (ここで I は調査線と交差するという条件) の 1 次積率と等しいので、

$$\begin{aligned} \bar{l}_S^* &= \int_{l_0}^{\infty} l f_L(l|I) dl \\ &= \int_{l_0}^{\infty} \frac{l^2}{\bar{l}(\bar{l}-l_0)} \exp\left(-\frac{l-l_0}{\bar{l}-l_0}\right) dl \\ &= \int_{l_0}^{\infty} \frac{l^2}{\bar{l}(\bar{l}-l_0)} \left\{ -(\bar{l}-l_0) \exp\left(-\frac{l-l_0}{\bar{l}-l_0}\right) \right\}' dl \\ &= -\left[\frac{l^2}{\bar{l}} \exp\left(-\frac{l-l_0}{\bar{l}-l_0}\right) \right]_{l_0}^{\infty} + \frac{2}{\bar{l}} \int_{l_0}^{\infty} l \\ &\quad \times \exp\left(-\frac{l-l_0}{\bar{l}-l_0}\right) dl \\ &= \frac{l_0^2}{\bar{l}} + \frac{2}{\bar{l}} \int_{l_0}^{\infty} l \exp\left(-\frac{l-l_0}{\bar{l}-l_0}\right) dl \\ &= \frac{l_0^2}{\bar{l}} + \frac{2}{\bar{l}} A \end{aligned}$$

ここで、

$$\begin{aligned} A &= \int_{l_0}^{\infty} l \exp\left(-\frac{l-l_0}{\bar{l}-l_0}\right) dl \\ &= \int_{l_0}^{\infty} l \left\{ -(\bar{l}-l_0) \exp\left(-\frac{l-l_0}{\bar{l}-l_0}\right) \right\}' dl \\ &= \left[-l(\bar{l}-l_0) \exp\left(-\frac{l-l_0}{\bar{l}-l_0}\right) \right]_{l_0}^{\infty} + \int_{l_0}^{\infty} (\bar{l}-l_0) \\ &\quad \times \exp\left(-\frac{l-l_0}{\bar{l}-l_0}\right) dl \\ &= l_0(\bar{l}-l_0) + (\bar{l}-l_0) \int_{l_0}^{\infty} \exp\left(-\frac{l-l_0}{\bar{l}-l_0}\right) dl \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= l_0(\bar{l}-l_0) + (\bar{l}-l_0) \left[-l(\bar{l}-l_0) \exp\left(-\frac{l-l_0}{\bar{l}-l_0}\right) \right]_{l_0}^{\infty} \\
&= l_0(\bar{l}-l_0) + (\bar{l}-l_0)^2 \\
&= \bar{l}(\bar{l}-l_0)
\end{aligned}$$

であるので、

$$\begin{aligned}
\bar{l}_{IS}^* &= \frac{l_0^2}{\bar{l}} + \frac{2}{\bar{l}} \bar{l}(\bar{l}-l_0) \\
&= \frac{2\bar{l}^2 - 2\bar{l}l_0 + l_0^2}{\bar{l}}
\end{aligned}$$

となる。したがって、平均トレース長の推定値は次式で表される。

$$\bar{l}^* = \frac{2l_0 + \bar{l}_{IS}^* + \sqrt{\bar{l}_{IS}^{*2} + 4l_0\bar{l}_{IS}^* - 4l_0^2}}{4} \quad (29)$$

また、 $\bar{l}_{IS}^*$ の分散 σ_{IS}^{*2} は、 $f_L(l|I)$ の確率変数（ここで I は調査線と交差するという条件）の2次積率と等しいので、

$$\begin{aligned}
\sigma_{IS}^{*2} &= 2 \int_{l_0}^{\infty} l \{1 - F_L(l|I)\} dl \\
&= 2 \int_{l_0}^{\infty} \frac{l + \bar{l} - l_0}{\bar{l}} \exp\left(-\frac{l-l_0}{\bar{l}-l_0}\right) dl \\
&= \frac{2}{\bar{l}} \int_{l_0}^{\infty} l^2 \exp\left(-\frac{l-l_0}{\bar{l}-l_0}\right) dl + \frac{2(\bar{l}-l_0)}{\bar{l}} \int_{l_0}^{\infty} l \\
&\quad \times \exp\left(-\frac{l-l_0}{\bar{l}-l_0}\right) dl \\
&= \frac{(2\bar{l}^2 - 2\bar{l}l_0 + l_0^2)(\bar{l}-l_0)}{2\bar{l}} + 2(\bar{l}-l_0)^2 \\
&= \frac{(6\bar{l}^2 - 6\bar{l}l_0 + l_0^2)(\bar{l}-l_0)}{2\bar{l}} \quad (30)
\end{aligned}$$

で推定される。

• 区間推定

1次元密度 ρ_L は、式(5)に示されるポアソン分布を仮定しているので、その母平均、母分散は共に ρ_L である。したがって、標準正規確率変数 S は

$$S = \frac{(\rho_L^* - \rho_L) \sqrt{N}}{\sqrt{\rho_L^*}} \quad (31)$$

と表され、したがって、 ρ_L の区間推定量 $\rho_L^{\pm}$ は、

$$\rho_L^{\pm} = \rho_L^* \pm \frac{S \sqrt{\rho_L^*}}{\sqrt{N}} \quad (32)$$

として得られる。

また、 $\bar{l}_{IS}$ の区間推定量 $\bar{l}_{IS}^{\pm}$ は、標準正規確率変数 S を

用いて次式で与えられる。

$$\bar{l}_{IS}^{\pm} = \bar{l}_{IS}^* \pm S \frac{\sigma_{IS}^*}{\sqrt{N-1}} \quad (33)$$

これにより S に適当な値 ($S(75\%)=1.15$, $S(95\%)=1.96$, $S(99\%)=2.58$) を与えることにより、信頼区間を得ることができる。

b) 調査平面サンプリングデータによる推定

• 点推定

調査平面を用いた調査手法から得られる情報から推定可能なパラメータは1次元密度 ρ_L と2次元密度 ρ_A である。平均トレース長 $\bar{l}$ はこの2つの値から式(25, 26)を用いて求める。

1次元密度

節理群において1次元密度の推定量は次式で求められる。

$$\rho_L^* = \sum_{i=1}^{N_S} \left[\frac{\sum_{j=1}^{N^{(i)}} l_{ISj}}{A_i \sin \{\cos(\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}_{Ai})\}} \right] \quad (34)$$

ここで、 N_S : 調査平面数

$N^{(i)}$: 調査平面毎の節理数

A_i : 調査平面 i の面積

l_{ISj} : 調査平面 i で節理 j のトレース長

$\mathbf{n}_{Ai}$: 調査平面 i の単位法線ベクトル

$\mathbf{n}$: 節理群の単位法線ベクトル

である。

2次元密度

$$\rho_A^* = \frac{\sum_{i=1}^{N_S} N^{(i)}}{\sum_{i=1}^{N_S} A_i \sin \{\cos^{-1}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}_{Ai})\}} \quad (35)$$

上式により2次元密度の推定量が得られる。

• 区間推定

1次元密度 ρ_L および2次元密度 ρ_A の標準正規確率変数 S は、

$$S = \frac{(\rho_{L \text{ or } A}^* - \rho_{L \text{ or } A}) \sqrt{N}}{\sqrt{\rho_{L \text{ or } A}^*}} \quad (36)$$

と表され、したがって、 ρ_L or ρ_A の区間推定量 $\rho_{L \text{ or } A}^{\pm}$ は、

$$\rho_{L \text{ or } A}^{\pm} = \rho_{L \text{ or } A}^* \pm S \frac{\sqrt{\rho_{L \text{ or } A}^*}}{\sqrt{N}} \quad (37)$$

として得られる。

3次元モデル化に不可欠なパラメータとして平均円盤半径 $\bar{r}$ および3次元密度 ρ_V がある。これらは上記調査手法から得られる情報からは、直接推定は不可能である。しかし、平均トレース長 $\bar{l}$ 、1次元密度 ρ_L および平均節理面積 $\bar{s}$ を推定することにより求めることが可能となる。 $\bar{r}$ は r の平均値であり、次の数値積分を行うことによって求めることができる。

$$\frac{1}{\bar{r}} = \int_{l_0/2}^{\infty} \frac{1}{r} f_R(r|I) dr \quad (38)$$

ここで $f_R(r|I)$ は、地表面を切っているという条件の下での r の確率密度関数であり、次式で表される。

$$f_R(r|I) = \int_L f_R(r|l, I) \cdot f_L(l|I) dl \quad (39)$$

ここで、 $f_R(r|l, I)$ はトレース長 l において地表面を切っているという条件の下での r の確率密度関数であり、また、 $f_L(l|I)$ は地表面を切っているという条件の下での l の確率密度関数で、それぞれ次のように表される。

$$f_R(r|l, I) = \frac{l^2}{2r^2 \sqrt{4r^2 - l^2}} \quad (40)$$

$$\begin{aligned} f_L(l|I) &= \frac{l}{\bar{l}} f_L(l) \\ &= \frac{l}{\bar{l}(\bar{l} - l_0)} \exp\left(-\frac{l - l_0}{\bar{l} - l_0}\right) \end{aligned} \quad (41)$$

また式(25)と同様に、3次元密度 ρ_V は1次元密度 ρ_L 、平均節理面積 $\bar{s}$ との間に次のような関係が存在する。

$$\rho_V = \frac{\rho_L}{\bar{s}} \quad (42)$$

ここで ρ_L は既知であるが、 $\bar{s}$ を求めなくてはならない。節理面積を s とし、その確率変数を S とすると $\bar{s}$ は S の1次積率と等しい。そこで、 $S = \pi R^2$ から

$$R = \sqrt{\frac{S}{\pi}} \quad (43)$$

となり、 S の分布関数は r の分布関数に R を代入したものに等しくなる。したがって、それを $\bar{s}$ で微分すれば S の確率密度関数となる。 r の確率密度関数は式(37)から次のようになる。

$$f_R(r) = \frac{\bar{r}}{r} f_R(r|I) \quad (44)$$

そこで、 S の確率密度関数 $f_S(s)$ は、

$$\begin{aligned} f_S(s) &= \frac{df_R(\sqrt{s/\pi})}{ds} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi s}} f_R(\sqrt{s/\pi}) \end{aligned} \quad (45)$$

となり、したがって、 $\bar{s}$ はこの1次積率をとって

$$\bar{s} = \int_{\pi l_0^2/4}^{\infty} s f_S(s) ds \quad (46)$$

と求めることができる。

3.3 開口性分布

• 点推定

開口性に関してはトレース長を条件とする確率構造を仮定しており、推定すべきパラメータは回帰定数 α, β およびトレース長を固定した開口幅の分散 $\sigma_T(l)^2$ である。推定式は次の通りである。

$$\alpha = \exp\left(\frac{\sum_{i=1}^N (\ln l_i)^2 \sum_{i=1}^N \ln t_i - \sum_{i=1}^N \ln l_i \sum_{i=1}^N \ln l_i \ln t_i}{N \sum_{i=1}^N (\ln l_i)^2 - \left(\sum_{i=1}^N \ln l_i\right)^2}\right) \quad (47)$$

$$\beta = \frac{N \sum_{i=1}^N \ln l_i \ln t_i - \sum_{i=1}^N \ln l_i \sum_{i=1}^N \ln t_i}{\sum_{i=1}^N (\ln l_i)^2 - \left(\sum_{i=1}^N \ln l_i\right)^2} \quad (48)$$

$$\sigma_T(l)^2 = \frac{\sum_{i=1}^N (\ln t_i - \ln \alpha + \beta \ln l_i)^2}{N-1} \quad (49)$$

ここで l_i, t_i は節理 i のトレース長、開口幅である。

• 区間推定

確率構造が $N(\ln \alpha + \beta \ln l, \sigma_T(l)^2)$ の正規分布であり、標準正規確率変数 S を用いて、次のように区間推定量が得られる。

$$\ln \alpha + \beta \ln l - \frac{S \sigma_T(l)}{\sqrt{N-1}} \leq t \leq \ln \alpha + \beta \ln l + \frac{S \sigma_T(l)}{\sqrt{N-1}} \quad (50)$$

3.4 挟在性分布

挟在物の存在する場合の確率分布は、式(9)の超幾何分布に従う。この超幾何分布の平均値および分散は次

のように与えられる。

$$\mu = np_m \quad (51)$$

$$\sigma^2 = \frac{np_m(1-p_m)(N-n)}{N-1} \quad (52)$$

したがって、無作為に取り出した n 個の節理の挟在性に関する確率変数は正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ に従い、その標準正規確率変量を求めることで区間推定が可能である。

3.5 粗面性分布

粗面性指標の分布を正規分布 $N(\bar{b}, \sigma_B^2)$ と仮定し、 $\bar{b}$, σ_B^2 の推定を行う。

サンプルを $b_1, b_2, b_3, \dots, b_N$ とすると、標本平均は

$$\bar{b} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n b_i \quad (53)$$

と表され、信頼度 $(1-\alpha)$ の下での信頼区間は、 t 分布の $\alpha(\%)$ に対する値 t_α を用いて

$$\bar{b} - \frac{t_\alpha \sigma_B}{\sqrt{N-1}} \leq \bar{b}_\alpha \leq \bar{b} + \frac{t_\alpha \sigma_B}{\sqrt{N-1}} \quad (54)$$

となる。また標本分散 s^2 は

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (b_i - \bar{b})^2 \quad (55)$$

と表される。したがって、

$$\chi^2 = \frac{ns^2}{\sigma_B^2} \quad (56)$$

が、自由度 $n-1$ の χ^2 分布に従うため、 χ^2 に対する下限値を χ_1^2 (信頼区間を下方にはずれる確率を $\alpha/2(\%)$)、上限値を χ_2^2 (信頼区間を上方にはずれる確率を $\alpha/2(\%)$) とすると、 σ_B^2 の信頼度 $(1-\alpha)$ の信頼区間は次式ようになる。

$$\frac{ns^2}{\chi_1^2} < \sigma_B^2 < \frac{ns^2}{\chi_2^2} \quad (57)$$

3.6 連結性分布

任意の節理端点が I, L, T のタイプである確率が、式 (11), (12), (13) の確率関数で表されるが、ここで、任意の n 個の節理端点が I タイプ (または L, T タイプ) である数 X は次のような超幾何分布に従う。

$$P(X=x) = \frac{\binom{Np_I}{x} \binom{N(1-p_I)}{n-x}}{\binom{N}{n}} \quad (58)$$

したがって、平均および分散は次のように与えられる。

$$\mu = np_I \quad (59)$$

$$\sigma^2 = \frac{np_I(1-p_I)(N-n)}{N-1} \quad (60)$$

無作為に取り出した n 個の節理端点の確率変数は正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ に従い、その標準正規確率変量を求めることで区間推定が可能である。

なお、次の関係が成り立つので、I, L, T のうち 2 つについて区間推定が行われれば、残りの 1 つが決められる。

$$p_I + p_L + p_T = 1 \quad (61)$$

4. 節理系のモデル化

最終的に解析の対象となるモデルは、3 章で推定した統計量をパラメータとする確率関数を基に、2 次元平面あるいは 3 次元空間に節理を擬似発生して、構造化された節理系を表現することになる。ここでは、2 次元平面および 3 次元空間での節理擬似発生の手法について述べる。

4.1 2 次元平面モデル

1) 節理発生領域と発生節理数の算定

a) 節理発生領域と解析領域

2 次元平面モデルでは、解析の対象となる有限平面領域に節理トレースを擬似発生させて節理系モデルを作成することになるが、節理トレースの中点を解析領域内でのみ発生させると、中点は解析領域の外にあって、トレースが一部解析領域内に入り込んでいるような場合を考慮できないことになり、解析領域の周囲において密度が低く評価されてしまう。そこで発生領域を解析領域より十分に大きくとり、そこで節理トレース中点を発生させるという方法をとる (図-1)。また、解析領域内にトレースを持たない節理が発生することが起こりうるが、この場合はこれを削除する。

b) 発生節理数の算定

発生する節理数は、各節理群毎に次式で算定する。

$$N_k = \text{int}(\rho_{Ak} S_A) \quad (62)$$

図-1 節理の発生領域と解析領域 (平面領域)

ここで ρ_{Ak} : 節理群 k の 2 次元密度
 S_A : 発生領域の面積

である。

2) 節理の発生方法

a) 節理の位置決定

節理を発生する位置を決める際には、節理トレースの中点を代表点として、一様乱数を用いて解析領域内に一様にばらつかせる。

b) 節理の方向性決定

各節理群毎に式(1)の確率分布に従う乱数を用いて節理方向を決定する。節理群の範囲(中心角)を外れた方向性を持つ節理が生成された場合には、これを削除して再度発生し直す。また、非節理群については各節理群域外で一様分布とするが、節理の方向は単位球面上の点で表されるため、単位球面上のランダム点を図-2に示す手法³⁾により作成する。

c) 節理の連続性の決定

式(3)に示されるトレース長の確率分布に基づく乱数を発生させ、各節理の寸法を決定する。この段階で解析領域内に存在しない節理については削除する。

d) 節理の開口幅の決定

節理の開口幅の確率分布は、式(8)に示されるように、トレース長 l が決定されたときに正規分布を示す条件付き確率分布であり、トレース長を決定した後に、この確率分布に従う乱数によって開口幅が決定される。

e) 節理の挟在性の決定

式(9)の挟在性に関する確率分布に基づく乱数により挟在物の有無および種類について決定を行う。

f) 節理の粗面性の決定

節理の粗面性は、JRC 値に関して式(10)に示される正規分布を仮定しており、これに基づく正規乱数の発生

図-2 単位球面上のランダム点の作成方法

図-3 節理の発生領域と解析領域 (空間領域)

で決定する。

4.2 3次元モデル

1) 節理発生領域と発生節理数の算定

a) 節理発生領域とモデル空間および表示領域

3次元モデルでは、解析の対象となる有限空間領域に円盤節理を擬似発生させて節理系モデルを作成することになるが、2次元モデルと同様、円盤節理を解析領域内でのみ発生させると解析領域の周囲で密度が低く評価されることになる。そこで、3次元密度の均質化を図るため、解析領域より十分大きな空間領域に円盤節理の中心点を発生させる(図-3)。

図-4 I島A地点（花崗岩地域）における本モデル化手法の適用例

b) 発生節理数の算定

発生する節理数は、各節理群毎に次式で算定する。

$$N_k = \text{int}(\rho_{V_k} V) \quad (63)$$

ここで ρ_{V_k} : 節理群 k の3次元密度

V : 発生領域の体積

である。

2) 節理の発生方法

a) 節理の位置決定

3次元モデルで節理の発生位置を決める際には、円盤

の中心点をその代表点とする。空間領域に直交 3 次元座標系を設定し、各方向に一樣乱数を発生させて代表点の位置を決定する。

b) 節理の方向性の決定

2 次元モデルと同様である。

c) 節理の連続性の決定

3 次元モデルにおいて節理の連続性に関するパラメータは円盤半径 r であり、先に示した式 (4) の節理半径の確率分布に基づく乱数を発生させ、各節理の半径を決める。

d) 節理の開口幅の決定

開口幅の確率分布はトレース長 l について条件付き確率分布であり、半径 r の決定後、次式に示す半径 r に規定されるトレース長の分布関数からトレース長 l を乱数で決めて、それを基に 2 次元モデルと同じ方法で開口幅を発生させる。

$$F_L(l|r) = \int_0^{l/2} \frac{4}{\pi r^2} \sqrt{r^2 - x^2} dx \quad (64)$$

e) 節理の挟在性の決定

2 次元モデルと同様である。

f) 節理の粗面性の決定

2 次元モデルと同様である。

以上の要領で、種々の解析に必要となる岩盤内節理の分布に関する 2 次元あるいは 3 次元の幾何学的モデルを作成することができる。

6. 適用例

以上のモデル化手法を用いて、先に既報「その 2」で示した白亜系広島型花崗岩の I 島 A 地点において節理系のモデル化を行った例について示す。図-4 は露頭観察面の節理トレース図と本手法による節理系のモデル図の比較を示したものである。

これを見ると節理長、節理間隔の分布は観察面とモデル図とで良く一致しているのがわかり、本モデル化手法の妥当性が示されている。また、連結タイプについては、その構成比に差異があるが、これは、本モデル化手法においては連結性が現在のところ考慮されていないためであり、実際にはモデルを多数発生することにより、その構成比が可能な限り近いものをモデルとして選択するものとする。これについては、今後、節理発生確率過程をポアソン過程ではなくマルコフ過程とすることによって、より現実近似したモデルを作成する所存である。

図-5 岩盤浸透流のネットワーク解析モデル

なお、開口幅、挟在物、粗面性については図化していないが、開口幅については、節理群 1 で大きな値のものが多く、節理群 2 では比較的小さい。もちろん、節理長に比例して大きくなる傾向も反映している。挟在物については、節理群 1 にカルサイト等の鉱物脈を含むものが多く見られる。また粗面性については、節理群 1 よりも節理群 2 のほうが全体的に大きな値となっている。

7. 結語

大型土木構造物の基礎となる岩盤の力学的あるいは水理学的挙動を把握することが不可欠となってきている今日、解析モデルを考える上で特に重要となる岩盤内の不連続面の評価・モデル化に関して、確率統計学的な手法を提案した。これにより、これまで行われていなかった岩盤内節理の分布の特性要素をすべて取り入れた、系統化されたモデルの作成が可能となった。

ここで述べたモデル化は、あくまで節理の分布に関する幾何学的なモデル構築を対象としており、最終的な解析モデルとは異なるものである。そこで各種解析を行う上では、この構造化されたモデルから必要となる情報を

用いて解析手法に合わせたモデルを作成することが必要となる。ここで、筆者らがこの節理分布モデルを岩盤内浸透流の解析に利用した例について簡単に紹介する。

岩盤における浸透流解析は、多くの場合、割れ目を含む岩盤を等価な多孔質媒体と仮定して連続体解析を行っているのが現状であるが、より局所的な流れを扱ったり、流速について考える場合、個々の節理内の流れを評価したモデルで解析を行う必要が生じる。図-5は著者らが行った節理内浸透流の実験的研究から得られた流れの性質や構造を取り入れた解析モデルの概念図である^{4)~6)}。著者らは原位置における浸透流実験^{7)~9)}から、節理面の流れの構造は一樣な平板流れではなく、局所的に流れる複雑なチャンネリング形態を示すことを明らかにした。この事実と数種の実験結果を基に、単一節理内の局所的な流れを考慮した流路ネットワークによる解析モデルを提案し、妥当な解析結果を得ている。

これは節理分布の幾何学モデルを直接利用した例であるが、幾何学的分布を直接利用するだけでなく、このように岩盤内の節理分布を確率統計学的に把握しておくことにより、その統計量そのものを解析モデルに取り入れることも可能である。今後は、このモデルを利用して各種解析への適用に関する研究を進めていく所存である。

参 考 文 献

1) LNEC (1973) : Sines area-studies by the integral sampling

method, a report LNEC, Lisbon, Portugal. p. 25.

- 2) 水戸義忠, 菊地宏吉, 黒田英高 (1988) : 節理分布性状の評価手法——トレース長・間隔・密度の評価について——, 第20回岩盤力学に関するシンポジウム講演論文集, pp. 176 - 180.
- 3) 宮武 修, 脇本和昌 (1978) : 乱数とモンテカルロ法, 数学ライブラリ, 森北出版, p. 30.
- 4) 菊地宏吉, 水戸義忠, 本多 眞, 三室俊昭, 吉田 順 (1990) : 原位置試験による節理性岩盤の浸透流解析に関する研究, 第8回岩の力学国内シンポジウム講演論文集, pp. 435 - 440.
- 5) 菊地宏吉, 水戸義忠, 三室俊昭, 本多 眞, 山本佳正 (1991) : 節理性岩盤の浸透流解析に関する実験的研究, 第23回岩盤力学に関するシンポジウム講演論文集, pp. 237 - 241.
- 6) K. KIKUCHI, Y. MITO, M. HONDA, T. MIMURO and J. YOSHIDA (1991) : In-situ experimental studies on groundwater flow analysis for jointed rockmasses., ISRM 7th Cong. Aachen, GERMANY, pp. 393 - 396.
- 7) 菊地宏吉, 水戸義忠, 本多 眞 (1988) : 節理内流れに関する現場実験と結果の考察, 第9回西日本岩盤工学シンポジウム講演論文集, pp. 28 - 37.
- 8) 水戸義忠, 菊地宏吉, 鶴田 修, 本多 眞 (1990) : 実岩盤の節理内流れに関する実験と考察 (その2), 第22回岩盤力学に関するシンポジウム講演論文集, pp. 176 - 180.
- 9) 菊地宏吉, 水戸義忠, 本多 眞, 鶴田 修 (1990) : 節理内流れに関する現場実験と結果の考察 (その2), 第11回西日本岩盤工学シンポジウム講演論文集, pp. 101 - 110.

(1992年3月11日受付, 1992年9月22日受理)