貯留係数に関する一、二の議論

徳永朋祥*

1. はじめに

地殻内の流体の存在, 移動に関する検討は, 地下水の直接的な利用のためだけでなく, 廃棄物処分等の環境問題に対処するためにも重要な課題である. また, 純理学的な面においても, 断層周辺の力学的問題, 変成作用・鉱床形成過程における物質移動に対する地下流体の寄与は大きいと考えられてきている. したがって, 地下水の流れに関して定量的な議論を行うことは, 地球科学・応用地球科学の分野において重要な問題であることは論をまたない.

地下水の流れの問題を定式化する場合, 問題を多孔質媒体内の流れをモデル化し, Darcyの法則と流体の質量保存則を組み合わせた拡散型の支配方程式を用いることが多い¹⁾. この場合, 方程式には2つのパラメータが表れてくる. 透水係数と貯留係数がそれにあたる.

本論文では, 多孔質弾性論的な観点から一般的な貯留係数を定義し, 境界条件・物性の仮定の仕方によって, 各々の条件に応じた貯留係数が導出できることを示す. また, 室内実験における貯留係数計測に関する議論を行う.

2. 貯留係数の定義と多孔質弾性論からみた流体流動の定式化

貯留係数は一般に単位水頭の減少が起きたときに単位体積の多孔質媒体から排出される流体の体積として定義される^{2),3)}. すなわち,

$$S = \frac{1}{\rho_f} \left(\frac{dm_f}{dh} \right) = g \left(\frac{dm_f}{dP} \right) \quad (1)$$

である. ここに, S : 貯留係数, ρ_f : 基準とする状態における流体の密度, m_f : 多孔質媒体単位体積内の流体含有質量の変化, h : 水頭, g : 重力加速度, P : 間隙水圧である. 貯留係数は, 多孔質媒体自体の変形と流体の変形の両方が寄与しているために, その物理的意味を理解し, 考慮

している現象の条件に応じた貯留係数を適切に用いることが必要となる. とくに, 流動と変形の連成を考える場合, モデルの物性が互いに調和的でなければならず, そのためには, 各々の物性間の関係を明確に理解しておく必要がある.

多孔質弾性論は, BIOT⁴⁾によって導入された後, 応用力学の分野で発展してきた理論であり, 最近では, 地球科学や地下水学の分野にも応用されてきている^{5)~7)}. 線形等多孔質材料においては, 以下の2つの式によって応力-歪み-間隙水圧-流体含有量の変化の関係が表される^{5),7)}.

$$2G\varepsilon_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \left(1 - \frac{2G}{3K} \right) \sigma_{kk} \delta_{ij} + \frac{2G}{3} \left(\frac{1}{K} - \frac{1}{K_s} \right) P \delta_{ij} \quad (2)$$

$$m_f = \rho_f \left(\frac{1}{K} - \frac{1}{K_s} \right) \left(\frac{1}{3} \sigma_{kk} + \frac{1}{B} P \right) \quad (3)$$

ここに, G : 剛性率, ε_{ij} : 歪み, σ_{ij} : 応力, K : 排水条件における多孔質材料の体積弾性率, K_s : 固体粒子部分の体積弾性率, δ_{ij} : クロネッカーのデルタ, B : Skemptonの B 値である. 応力, 歪み, 間隙水圧, 流体含有質量の変化は, それぞれ基準とする状態からの変化と定義しており, 応力に関しては引っ張り, 歪みに関しては伸び, 間隙水圧は増加, 流体含有質量は増加を正としている.

多孔質媒体中の流体流動がDarcyの法則で表されるとすると,

$$q_i = -\frac{\kappa}{\rho_f g} \frac{\partial P}{\partial x_i} \quad (4)$$

となる. ここに, q_i : i 方向への単位面積を通過する体積流量, κ : 透水係数である. さらに, 流体の湧きだしがないとした場合, 流体の質量保存則は以下の様になる.

$$\frac{\partial(\rho_f q_i)}{\partial x_i} + \frac{\partial m_f}{\partial t} = 0 \quad (5)$$

透水係数, 流体の密度が空間的に変化しないと仮定し, (5)式に(3), (4)式を代入すると,

$$\kappa \nabla^2 P = \rho_f g \left(\frac{1}{K} - \frac{1}{K_s} \right) \frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial t} \left(P + \frac{B}{3} \sigma_{kk} \right) \quad (6)$$

* ウィスコンシン大学 Department of Geology and Geophysics University of Wisconsin-Madison
 (現)東京大学大学院工学系研究科 Department of Geosystem Engineering University of Tokyo(会員)

となる。ここで、

$$B = \frac{\frac{1}{K} - \frac{1}{K_s}}{\frac{1}{K} - \frac{1}{K_s} + \phi \left(\frac{1}{K_f} - \frac{1}{K_\phi} \right)} \quad (7)$$

より⁷⁾, (6)式は、

$$\kappa \nabla^2 P = \rho_f g \left[\left(\frac{1}{K} - \frac{1}{K_s} \right) + \phi \left(\frac{1}{K_f} - \frac{1}{K_\phi} \right) \right] \times \frac{\partial}{\partial t} \left(P + \frac{B}{3} \sigma_{kk} \right) \quad (8)$$

となる。ここに、 ϕ : 間隙率, K_f : 間隙流体の体積弾性率, K_ϕ : 平均拘束応力と間隙水圧を同じ大きさだけ変化させた場合の間隙の体積弾性率であり, 多孔質弾性材料の固体粒子部分がすべて単一の材料からできている場合は、

$$K_\phi = K_s \quad (9)$$

となることが知られている⁸⁾。(8)式は、一般的な流体流動に関する支配方程式であるが、これを解くためには、変形に関する支配方程式と連成することが必要である。ところで、多くの地下水学の問題は、流体流動を間隙水圧に関する拡散方程式として取り扱っている。その場合、変形に関する境界条件を(8)式の右辺が間隙水圧のみの微分の形になるように設定する必要がある。さらに、それらの条件の設定のしかたに応じて適切な貯留係数を用いる必要がある。このことは、逆に、ある貯留係数を用いる場合には、それがどのような条件で成立するのかを知っておく必要があることを意味する。

次節では、この問題について代表的な条件を取り上げ、議論を行う。

3. いくつかの貯留係数の導出

3.1 平均垂直応力が変化しない場合

平均垂直応力が一定の条件では、(8)式の右辺の応力の項が0となり、この式は間隙水圧に関する単純な拡散方程式となる。このときの貯留係数は、

$$S' = \rho_f g \left[\left(\frac{1}{K} - \frac{1}{K_s} \right) + \phi \left(\frac{1}{K_f} - \frac{1}{K_\phi} \right) \right] = \frac{\rho_f g \alpha}{BK} \quad (10)$$

となる。ここに、 α は、Biot-Willis係数⁷⁾といわれ、

$$\alpha = 1 - \frac{K}{K_s} \quad (11)$$

である。貯留係数の定義式(1)の形を用いると、 S' は、

$$S' = g \left(\frac{dm_f}{dP} \right)_{\sigma_{kk}=0} \quad (12)$$

と定義される。多孔質弾性論の分野では、 S' は、三次元貯留係数と呼ばれている⁹⁾。ここまでの定式化でわかるように、 S' は、最も基本的な流動方程式((8)式)の貯留項に

かかる係数であり、変形と流動を連成する場合における貯留係数として用いられるべきものと考えられ、最も一般的な貯留係数として定義される。

3.2 一定応力下における一軸歪状態(比貯留率)

水平で側方に無限に連続した被圧帯水層を考えた場合、水平方向の歪は0で、垂直方向の応力は一定であるという仮定が成立する。この条件は、より一般的には、

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = 0, \sigma_{33} = 0 \quad (13)$$

となる。より厳密な議論をすると、流体の移動(間隙水圧の変化)自体が媒体の変形を引き起こすので((2)式)、一定応力方向(下付きの3の方向)以外への流体移動が起こる場合には、 $\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = 0$ は成立しない。

(2)式を用いて、 ε_{11} と ε_{22} を求め、足しあわせると、

$$\frac{\sigma_{kk}}{3} = -\frac{4KG}{3K+4G} \left(\frac{1}{K} - \frac{1}{K_s} \right) P \quad (14)$$

となる。(14)式を(8)式に代入して整理すると、

$$\kappa \nabla^2 p = \rho_f \left[\left(\frac{1}{K} - \frac{1}{K_s} \right) \left(1 - \frac{4G \left(1 - \frac{K}{K_s} \right)}{3 \left(K + \frac{4G}{3} \right)} \right) + \phi \left(\frac{1}{K_f} - \frac{1}{K_\phi} \right) \right] \frac{\partial P}{\partial t} \quad (15)$$

が成り立つ。したがって、貯留係数として、

$$S_s = \rho_f g \left[\left(\frac{1}{K} - \frac{1}{K_s} \right) \left(1 - \frac{4G \left(1 - \frac{K}{K_s} \right)}{3 \left(K + \frac{4G}{3} \right)} \right) + \phi \left(\frac{1}{K_f} - \frac{1}{K_\phi} \right) \right] \quad (16)$$

が定義される。これは、地下水学で用いられている比貯留率である。(16)式と(10)式とを比較すると、

$$S_s = S' \left\{ 1 - \left(1 - \frac{K}{K_s} \right) \frac{4GB}{3K+4G} \right\} = S' \left(1 - \frac{4G\alpha B}{3K+4G} \right) \quad (17)$$

が成り立つ。(17)式は、三次元貯留係数と比貯留率の関係を表す式である。比貯留率は、貯留係数の定義式の形ですと、

$$S_s = g \left(\frac{dm_f}{dP} \right)_{\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = 0, \sigma_{33} = 0} \quad (18)$$

となる^{3),10)}.

3.3 岩石が拘束されている場合

考慮している領域が完全に拘束されている場合、その条件は、

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = 0 \quad (19)$$

となる。この場合、比貯留率を求めた場合と同様の式展開を行い整理すると、

$$S_\varepsilon = \rho_f g \left\{ \frac{K}{K_s} \left(\frac{1}{K} - \frac{1}{K_s} \right) + \phi \left(\frac{1}{K_f} - \frac{1}{K_\phi} \right) \right\} \quad (20)$$

となる。(10)式と(20)式との比較から、

$$S_\varepsilon = S' - \rho_f g K \left(\frac{1}{K} - \frac{1}{K_s} \right)^2 = S' - \frac{\rho_f g \alpha^2}{K} \quad (21)$$

が求められる。 S_ε は、貯留係数の定義式の形にすると、

$$S_\varepsilon = g \left(\frac{dm_f}{dP} \right)_{\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = 0} \quad (22)$$

となる。

3.4 固体粒子が非圧縮性的場合

固体粒子が非圧縮性的場合、 $K_s \rightarrow \infty$, $K_\phi \rightarrow \infty$ の条件が成り立つ。これは、多孔質弾性パラメータの $\alpha \rightarrow 1$ を仮定していることになる。このとき、三次元貯留係数と比貯留率はそれぞれ、

$$S' = \rho_f g \left(\frac{1}{K} + \frac{\phi}{K_f} \right) \quad (23)$$

$$S_s = \rho_f g \left(\frac{1}{K_v} + \frac{\phi}{K_f} \right) \quad (24)$$

となる。 S_ε は、3.6節の条件と同じになるのでここでは議論しない。(24)式は、JACOB¹¹⁾およびCOOPER¹²⁾の定義した比貯留率と一致する。ちなみに、

$$K_v = \left(K + \frac{4G}{3} \right) \quad (25)$$

であり、これは、一次元的な変形をする場合の多孔質媒体の排水条件下における体積弾性率を表している。

3.5 固体粒子・流体ともに非圧縮性的場合

前節の議論に加えて、さらに、流体が非圧縮性であると仮

表-1 本論で示された貯留係数のまとめ

Material	G (GPa)	K (GPa)	α	B	ϕ	S'	Ss	S ε	S'*	Ss*	S'	Ss	S*	S	Reference
						(1/m)	(1/m)	(1/m)	(1/m)	(1/m)	(1/m)	(1/m)	(1/m)	(1/m)	
Material properties									$K_s \rightarrow \infty$ $K_\phi \rightarrow \infty$		$K_s \rightarrow \infty$ $K_\phi \rightarrow \infty$ $K_f \rightarrow \infty$		$K \rightarrow \infty$ $K_s \rightarrow \infty$ $K_\phi \rightarrow \infty$ $K_f \rightarrow \infty$		
Ruhr sandstone	13	13	0.65	0.88	0.02	5.6E-7	3.8E-7	2.4E-7	8.1E-7	3.8E-7	7.5E-7	3.2E-7	5.9E-8	0	6)
Tennessee marble	24	40	0.19	0.51	0.02	9.1E-8	8.7E-8	8.2E-8	3.0E-7	2.0E-7	2.5E-7	1.4E-7	5.9E-8	0	6)
Charcoal granite	19	35	0.27	0.55	0.02	1.4E-7	1.3E-7	1.2E-7	3.4E-7	2.2E-7	2.8E-7	1.6E-7	5.9E-8	0	6)
Berea sandstone	6.0	8.0	0.79	0.62	0.19	1.6E-6	1.2E-6	8.0E-7	1.8E-6	1.2E-6	1.2E-6	6.1E-7	5.6E-7	0	6)
Westerly granite	15	25	0.47	0.85	0.01	2.2E-7	1.8E-7	1.3E-7	4.2E-7	2.5E-7	3.9E-7	2.2E-7	3.0E-8	0	6)
Weber sandstone	12	13	0.64	0.73	0.06	6.6E-7	4.9E-7	3.5E-7	9.3E-7	5.2E-7	7.5E-7	3.4E-7	1.8E-7	0	6)
Ohio sandstone	6.8	8.4	0.74	0.50	0.19	1.7E-6	1.4E-6	1.1E-6	1.7E-6	1.1E-6	1.2E-6	5.6E-7	5.6E-7	0	6)
Pecos sandstone	5.9	6.7	0.83	0.61	0.20	2.0E-6	1.5E-6	9.8E-7	2.1E-6	1.3E-6	1.5E-6	6.7E-7	5.9E-7	0	6)
Boise sandstone	4.2	4.6	0.85	0.50	0.26	3.6E-6	2.8E-6	2.1E-6	2.9E-6	1.7E-6	2.1E-6	9.6E-7	7.7E-7	0	6)
Berea sandstone	5.6	6.6	0.77	0.75	0.19	1.5E-6	1.1E-6	6.4E-7	2.3E-6	1.5E-6	1.5E-6	7.0E-7	8.1E-7	0	15)
Indiana limestone	12	21	0.71	0.46	0.13	7.2E-7	6.2E-7	4.9E-7	1.0E-6	8.2E-7	4.7E-7	2.7E-7	5.5E-7	0	15)

流体の密度は1000kg/m³, 重力加速度は9.8m/s²を仮定している

(*のついている貯留係数を求めるにあたっては、流体の体積弾性率として文献⁶⁾のデータでは3.3GPa, 文献¹⁵⁾では2.3GPaを用いた)

定すると、 $K_s \rightarrow \infty, K_\phi \rightarrow \infty, K_f \rightarrow \infty$ となり、(23)、(24)式は、

$$S' = \frac{\rho_f g}{K} \quad (26)$$

$$S_s = \frac{\rho_f g}{K_v} \quad (27)$$

となる。これは、多孔質弾性パラメータの $\alpha \rightarrow 1, B \rightarrow 1$ を意味している。(27)式は、境界条件・物性の仮定がともに Terzaghi 圧密と同じであり¹³⁾、その条件下での流体流動を考慮する場合の貯留係数と理解される。

3.6 岩石のフレームワークが変形しない場合

岩石が全く変形しない場合は、 $K \rightarrow \infty, K_s \rightarrow \infty, K_\phi \rightarrow \infty$ となる。このとき、(10)、(16)、(20)式より、貯留係数は、

$$S = S' = S_s = S_e = \rho_f g \frac{\phi}{K_f} \quad (28)$$

と定義できる。この式は、貯留項は流体の変形のみによることを意味している。この定義は、石油工学の分野で用いられることがある¹⁴⁾が、それは、多種類の流体が存在する場合には、岩石のフレームワークの変形よりも流体の間隙中を占める割合の変化の方が各流体の貯留項として重要であると捉えられてきたからである。

3.7 岩石も流体も変形しない場合

この場合、貯留係数は0となり、流体流動は定常状態になる。

既存の文献^{6),15)}のデータを用いて計算された種々の貯留係数の値は表-1にまとめられている。これを見ると、すべての場合において $S' > S_s > S_e$ の関係が成立していることがわかる。これは、一定の間隙水圧の変化が起きたときに、媒体の三次元的な変形が許される場合、一次元的な変形しか許されない場合、変形が許されない場合との違いによるものである。

4. 室内実験における貯留係数

室内実験においては、transient pulse 法や、flow pump 法の非定常な領域を用いることによって、透水係数と貯留係数を同時に求めるような研究が行われてきている^{16)~18)}。これらの試験では、一般に三軸試験装置を用い、それに、流体流動が可能になるようなエンドキャップを配置し、実験を行っていることが多い。この場合、応力条件は、平均垂直応力が一定であるという条件を満たしていることになり、求められた貯留係数は、三次元貯留係数ということになる。すなわち、一般に行われているような条件では、比貯留率を求められていない。flow pump 法における貯留係数に関する議論は、MORIN and OLSEN¹⁸⁾でなされている。また、三軸試験装置内での transient pulse 法に伴う変形と流体流動の連成問題に関する議論も最近、HART and WANG¹⁹⁾によってなされている。

表-1のデータを見ると、材料によっては、三次元貯留係

数と比貯留率とが違ってきている場合がある(約50%)。

5. ま と め

多孔質弾性論の観点から議論すると、流体流動は、本質的には媒体の変形とは切り離して考えられないことがわかる。今回の議論から明らかになったことは以下の点にまとめられる。

1. 変形と流体流動を連成させる場合には、貯留係数に対応するものとして三次元貯留係数を用いるべきである。
2. 変形の境界条件に応じては、変形と流動の連成を考えなくてもよい場合があり、単純な拡散方程式で流動を計算できるが、その場合には、条件に応じた貯留係数を用いなければならない。
3. 比貯留率は、一定応力下での一軸歪状態における貯留係数である。
4. 一般的な三軸試験装置を用いた実験では、三次元貯留係数が求められており、比貯留率は求められていない。

実際に原位置試験等で貯留係数を求める場合には、計測手法の精度の問題等もあり、この種の詳細な議論が困難であることも多々あろう。しかし、貯留係数が岩石および流体の物性によって定義できることを考えると、貯留係数の物理的な意味を理解することは、変形・流動の連成問題として現象を捉える場合等には重要となってくる。

記号の説明

B : Skempton の B 値[無次元]

G : 剛性率[Pa]

g : 重力加速度[m/s²]

h : 水頭[m]

K : 排水条件における多孔質材料の体積弾性率[Pa]

K_f : 間隙水の体積弾性率[Pa]

K_s : 固体粒子部分の体積弾性率[Pa]

K_v : 一次元的な変形をする場合の多孔質材料の排水条件下の体積弾性率[Pa]

K_ϕ : 間隙部分の体積弾性率(本文参照)[Pa]

m_f : 多孔質材料単位体積内の流体含有質量の変化
[kg/m³]

P : 間隙水圧[Pa]

q_i : i 方向への単位面積を通過する体積流量[m/s]

S : 貯留係数[1/m]

S' : 三次元貯留係数[1/m]

S_s : 比貯留率[1/m]

S_e : 変形が拘束された条件における貯留係数[1/m]

t : 時間[s]

x_i : i 方向への距離[m]

α : Biot-Willis 係数[無次元]

δ_{ij} : クロネッカーのデルタ[無次元]

ε_{ij} : 歪み[無次元]

κ : 透水係数[m/s]

ρ_f : 基準とする状態における流体の密度[kg/m³]

σ_{ij} : 応力[Pa]

ϕ : 間隙率[無次元]

謝辞 本研究は、筆者が Wisconsin 大学滞在中に行ったものである。筆者が1年間の海外滞在をすることを快く認めてくださった東京大学の小島圭二名誉教授、登坂博行助教授には感謝いたします。また、資金的な援助をしてくださった(財)村田海外留学奨学会にはこの場を借りてお礼申し上げます。Wisconsin 大学の Herbert F. Wang 教授、David J. Hart 氏との議論は非常に有益でした。また、大成建設(株)の青木智幸博士には、草稿に目を通していただき、貴重なご意見をいただきました。匿名の査読者の方々からは、有益なコメントをいただき、小論は改善されました。ここに記して感謝します。

引用文献

- 1) FREEZE, R. A. and CHERRY, J. A.(1979) : Groundwater, Prentice Hall. 604p.
- 2) NARASIMHAN, T. N. and KANEHIRO, B. Y.(1980) : A note on the meaning of storage coefficient, *Water Resour. Res.*, 16, pp.423-429.
- 3) GREEN, D. H. and WANG, H. F.(1990) : Specific storage as a poroelastic coefficient, *Water Resour. Res.*, 26, pp.1631-1637.
- 4) BIOT, M. A.(1941) : General theory of three-dimensional consolidation, *J. Appl. Phys.*, 12, pp.155-164.
- 5) RICE, J. R. and CLEARY, M. P.(1976) : Some basic stress diffusion solutions for fluid-saturated elastic porous media with compressible constituents, *Rev. Geophys. Space Phys.*, 14, pp.227-241.
- 6) DETOURNAY, E. and CHENG, A. H. D.(1993): Fundamentals of poroelasticity. In *Comprehensive Rock Engineering : Principles, Practice and Projects*, 2, Analysis and Design Method, (ed., Fairhurst, C.), Pergamon Press pp.113-171.
- 7) WANG, H. F.(1993) : Quasi-static poroelastic parameters in rock and their geophysical applications, *Pure Appl. Geophys.*, 141, pp.269-286.
- 8) BERRYMAN, J. G.(1992) : Effective stress for transport properties of inhomogeneous porous rock, *J. Geophys. Res.*, 97, pp.17409-17424.
- 9) KÜFMPEL, H. -J.(1991) : Poroelasticity: parameters reviewed, *Geophys. J. Int.*, 105, pp.783-799.
- 10) VAN DER KAMP, G. and GALE, J. E.(1983) : Theory of Earth tide and barometric effects in porous formations with compressible grains, *Water Resour. Res.*, 19, pp.538-544.
- 11) JACOB, C. E.(1940) : On the flow of water in an elastic artesian aquifer, *EOS Trans., AGU*, 21, pp.574-586.
- 12) COOPER, JR., H. H.(1966) The equation of groundwater flow in fixed and deforming coordinates. *J. Geophys. Res.*, 84, pp.7510-7512.
- 13) 山口柏樹(1984) : 土質力学, 技報堂出版, 415p.
- 14) AZIZ, K. and SETTARI, A.(1979) : Petroleum Reservoir Simulation, *Applied Science Publishers*, 476pp.
- 15) HART, D. J. and WANG, H. F.(1995) : Laboratory measurements of a complete set of poroelastic moduli for Berea sandstone and Indiana limestone, *J. Geophys. Res.*, 100, pp.17741-17751.
- 16) HSIEH, P. A., TRACY, J. V., NEUZIL, C. E., BREDEHOEFT, J. D. and SILLIMAN, S. E.(1981) : A transient laboratory method for determining the hydraulic properties of tight rocks, I. Theory. *Int. J. Rock Mech. Min. Sci. Geomech. Abstr.*, 18, pp.245-252.
- 17) ESAKI, T., ZHANG, M., TAKESHITA, A. and MITANI, Y. (1996) : Rigorous theoretical analysis of a flow pump permeability test. *Geotech. Test. J.*, 19, pp.241-246.
- 18) MORIN, R. H. and OLSEN, H. W.(1987) Theoretical analysis of the transient pressure response from a constant flow rate hydraulic conductivity test, *Water Resour. Res.*, 23, pp.1461-1470.
- 19) HART, D. J. and WANG, H. F., (1998) : Poroelastic effects during a laboratory transient pore pressure test, *Proc. Biot Conf. Poromechanics*, pp. 579-582.

(1998年3月2日受付, 1998年6月17日受理)

Discussion on the Concept of Storage Coefficient

Tomochika TOKUNAGA