飽和水蒸気圧の計算誤差

Errors in Calculation of Saturation Vapor Pressure

菅原広史* (東北大学理学部)

Hirofumi SUGAWARA Geophysical Institute, Tohoku University

近藤純正*

Junsei KONDO

Keywords: Saturation vapor pressure, Surface heat balance

キーワード: 飽和水蒸気圧, 地表面熱収支

I. はじめに

飽和水蒸気圧を温度の関数として表す式は、現在色々なものが知られており、どれを使用すべきか迷うことが多い。つまり、それぞれの式による値がどれほど違うのか、大量のデータ処理にあたって計算時間はどれが最も短いのか、さらに地表面の熱収支の計算にどれほどの違いが生じるかという問題がある。前2者の問題に対しては過去に様々な比較が発表されている (Gibbins, 1990; Flatau et al, 1992)。ここでは主に3番目の問題を取り上げる。まず代表的な式を比較し、その差が地表面の熱収支にどれほど影響するかを調べ、さらに飽和水蒸気圧の微係数についても検討する。

II. 飽和水蒸気圧の比較

比較した式は一般に使われている以下のものである。温度 T の単位は $^{\circ}\text{C}$ 、飽和水蒸気圧 e_{sat} の単位はhPaとする。式(1)、(2)はある温度範囲を対象とした近似式であり、その範囲を括弧内に示した。 e_{sat} には、水面上と氷面上に対する2種類があるが、ここでは水面上に対する値について検討する。

Lowe (1977) の式: ($-50 \sim 50^{\circ}\text{C}$)

$$e_{sat} = A_0 + T(A_1 + T(A_2 + T(A_3 + T$$

$$(A_4 + T(A_5 + A_6 T)))))) \quad (1)$$

$$A_0 = 6.107799961$$

$$A_1 = 4.436518521 \times 10^{-1}$$

$$A_2 = 1.428945805 \times 10^{-2}$$

$$A_3 = 2.650648471 \times 10^{-4}$$

$$A_4 = 3.031240396 \times 10^{-6}$$

$$A_5 = 2.034080948 \times 10^{-8}$$

$$A_6 = 6.136820929 \times 10^{-11}$$

Tetens (1930) の式:

$$e_{sat} = 6.1078 \times 10^K \quad (2)$$

$$K = \frac{(7.5T)}{(T+237.3)}$$

Bolton (1980) の式: ($-35 \sim 35^{\circ}\text{C}$)

$$e_{sat} = 6.112 \exp \frac{17.67T}{T+243.5} \quad (3)$$

これらを $-50 \sim 100^{\circ}\text{C}$ の範囲で計算し、Smithsonian Tables (List, 1966) と比較した。この表の数値はGoff-Gratchの式に基づき作成されており、(1)~(3)式を導出するものになったものであるが、Goff-Gratchの式も近似式であり、けっしてこれが真値であるわけではない。しかし、最近の精密測定に基づくWexler (1976) の式と比較して差がわずかであるので、ここではSmithsonian Tablesを基準にして比較する。結果は表-1と図-1に示す。

*東北大学理学部地球物理学教室 〒980 仙台市青葉区荒巻字青葉
Geophysical Institute, Tohoku University

表-1 Smithsonian Tablesによる飽和水蒸気圧
(基準値)と各式の比較,
差 = (各式の値) - (基準値)

温度 (°C)	基準値 (hPa)	Smithsonian Tables (基準値) との差					
		Lowe (hPa)	%	Tetens (hPa)	%	Bolton (hPa)	%
-50	0.0635	-0.0002	-0.293	-0.0027	-4.286	0.0000	0.108
-40	0.1891	0.0000	0.026	-0.0049	-2.576	0.0005	0.252
-30	0.5088	-0.0010	-0.203	-0.0070	-1.382	0.0016	0.305
-20	1.2540	-0.0001	-0.011	-0.0078	-0.620	0.0034	0.271
-10	2.8627	0.0008	0.028	-0.0056	-0.196	0.0050	0.175
0	6.1078	0.0000	0.000	0.0000	0.000	0.0042	0.069
10	12.272	-0.001	-0.010	0.007	0.056	-0.000	-0.002
20	23.373	-0.002	-0.008	0.008	0.034	-0.004	-0.015
30	42.430	-0.001	-0.002	-0.004	-0.009	0.026	0.061
40	73.777	-0.002	-0.002	-0.030	-0.040	0.172	0.233
50	123.40	0.01	0.006	-0.05	-0.040	0.62	0.506
60	199.26	0.13	0.064	0.04	0.020	1.78	0.893
70	311.69	0.60	0.191	0.42	0.136	4.30	1.379
80	473.67	2.00	0.421	1.49	0.315	9.30	1.964
90	701.13	5.49	0.783	3.91	0.557	18.52	2.642
100	1013.25	13.08	1.291	8.69	0.857	34.46	3.401

図-1 飽和水蒸気圧についての各式と Smithsonian Tablesとの差。実線: Boltonの式, 破線: Loweの式, 1点鎖線: Tetensの式

図-1を見ると, ほぼ全域で相対誤差1%以下, 大きくても4%程度であることがわかる。Loweの式は計算時間が短いという特徴があり, Tetensの式とBoltonの式は表現形式が簡単であるという特徴がある。

Ⅲ. 地表面熱収支の計算における飽和水蒸気圧の式の違い

前節で各式を比較した結果, どの式による値も大きな差がないことがわかった。それでは地表面の熱収支において飽和水蒸気圧の誤差が, 結果にどれほど影響するのかを調べてみよう。

気温 T , 比湿 q , 地表面での蒸発効率 β を仮定し, 地表面温度 T_s , 顕熱輸送量 H , 潜熱輸送量 IE の3つ

表-2 地表面の熱収支に対する e_{sat} の敏感度共通
条件 $R' = (1 - \alpha)S \downarrow + L \downarrow = 1000$
(Wm^{-2}),

相対湿度=50%, 気温 $T=40^\circ C$

条件1: $C_H U = 0.002$ (m/s), $\beta = 0.05$

条件2: $C_H U = 0.002$ (m/s), $\beta = 1.0$

条件3: $C_H U = 0.04$ (m/s), $\beta = 0.05$

条件4: $C_H U = 0.04$ (m/s), $\beta = 1.0$

条件	e_{sat} の式	地表面温度 T_s °C	顕熱 H W/m^2	潜熱 IE W/m^2
条件1	Tetens	76.15	81.65	74.26
	Lowe	76.14	81.63	74.26
	Bolton	76.06	81.45	75.25
条件2	Tetens	51.43	25.82	344.9
	Lowe	51.43	25.82	344.9
	Bolton	51.36	25.66	345.6
条件3	Tetens	44.75	214.6	206.1
	Lowe	44.75	214.6	206.1
	Bolton	44.74	214.1	206.8
条件4	Tetens	32.39	-343.8	850.5
	Lowe	32.39	-343.8	849.8
	Bolton	32.40	-343.3	849.1

を未知数として求めることにする。

地表面での熱収支式は

$$(1 - \alpha)S \downarrow + L \downarrow = H + IE + G + \sigma T_s^4 \quad (4)$$

である。ただし $S \downarrow$ は日射量, $L \downarrow$ は下向き大気放射量, G は地中伝導熱, α は地表面のアルベード, σ はステファン・ボルツマン定数である。ここで,

$$R' = (1 - \alpha)S \downarrow + L \downarrow - G \quad (5)$$

とすると式(4)は次のようになる。

$$R' = H + IE + \sigma T_s^4 \quad (6)$$

ここで H と IE は次のバルク式で表される。

$$H = \rho c_p C_H U (T_s - T) \quad (7)$$

$$IE = l \rho C_H U \beta (q_{sat}(T_s) - q) \quad (8)$$

ここに $q_{sat}(T_s)$ は地表面温度 T_s における飽和比湿, $C_H U$ は交換係数, c_p は空気の比熱, ρ は空気の密度, l は蒸発の潜熱である。 $q_{sat}(T_s)$ と $e_{sat}(T_s)$ とのあいだには p を大気圧とすれば

$$q_{sat}(T_s) = \frac{0.622 e_{sat}(T_s)}{p - 0.378 e_{sat}(T_s)} \quad (9)$$

の関係がある。

式(6)(7)(8)より R' , $C_H U$, β , T , q を与えて T_s , H , IE を解くことができる(たとえばKondo and Watanabe, 1992)。ここで簡単化のため $G = 0$ とし, いろいろな条件で計算した結果を表-2に示す。条件はできるだけ T_s が大きくなる(e_{sat} の違いが出る)ようにした。これによると一番違いの大きかった条件

1 ($T_s \approx 76^\circ\text{C}$, e_{sat} の差が1%程度)のときでも, T_s の結果に出る差は 0.09°C , 潜熱で 1.1 W/m^2 程度である。よって飽和水蒸気圧の式にどれを使っても結果には実質上ほとんど影響がないことがわかる。

IV. 地表面熱収支の近似計算の場合

実際問題に適用する際に, 式(6)(7)(8)を線形化して熱収支式を近似式で表すことがある (たとえば近藤・桑形, 1992)。

$$\sigma T_s^4 \approx \sigma T^4 + 4\sigma T^3(T_s - T) \quad (10)$$

$$q_{sat}(T_s) \approx q_{sat}(T) + \left(\frac{dq_{sat}}{dT}\right)_T (T_s - T) \quad (11)$$

とすると, 式(6)~(9)から T_s は次のような近似式で表される。

$$T_s - T \approx \frac{R' - \sigma T^4 - \rho C_H U \beta (q_s - q)}{4\sigma T^3 + \rho C_p C_H U + \rho C_H U \beta \Delta} \quad (12)$$

$$q_s = \frac{0.622 e_{sat}(T)}{p - 0.378 e_{sat}(T)} \quad (13)$$

$$\Delta = \left(\frac{dq_{sat}}{dT}\right)_T \quad (14)$$

$$\frac{dq_{sat}}{dT} = \frac{0.622 p}{(p - 0.378 e_{sat})^2} \frac{de_{sat}}{dT} \quad (15)$$

ただし $q_{sat}(T)$ は気温 T における飽和比湿である。このとき $\frac{de_{sat}}{dT}$ を計算する必要がある。これを計算する方法には次の2つがある。

1. 各式(1, 2, 3)をそのまま温度について微分する方法。
2. クラウジウス-クラペイロンの式を使う方法である。クラウジウス-クラペイロンの式は

$$\frac{de_{sat}}{dT} = \frac{le_{sat}}{R_w T^2} \quad (16)$$

ここで R_w は水蒸気の気体定数, T の単位は K 。また Lowe (1977) は $\frac{de_{sat}}{dT}$ を求める式として次式を表している。

$$\frac{de_{sat}}{dT} = B_0 + T(B_1 + T(B_2 + T(B_3 + T(B_4 + T(B_5 + B_6 T)))))) \quad (17)$$

$$B_0 = 4.438099984 \times 10^{-1}$$

$$B_1 = 2.857002636 \times 10^{-2}$$

$$B_2 = 7.938054040 \times 10^{-4}$$

$$B_3 = 1.215215065 \times 10^{-5}$$

$$B_4 = 1.036561403 \times 10^{-7}$$

$$B_5 = 3.532421810 \times 10^{-10}$$

$$B_6 = -7.090244804 \times 10^{-13}$$

図-2 $\frac{de_{sat}}{dT}$ の比較。実線: Loweの式(1)の微分と式(17)の差, 破線: 式(1)(16)と式(17)の差, 1点鎖線: Tetensの式(2)の微分と式(17)の差, 2点鎖線: 式(2)(16)と式(17)の差。

図-2にはLoweの式とTetensの式を利用し, 2つの方法で求めた $\frac{de_{sat}}{dT}$ の差について示した。

図-2を見ると差は常温域で1%以下, 最大でも数%程度であることがわかる。III章より e_{sat} の値が1%程度変わっても熱収支にはほとんど影響がないことがわかった。したがって, 式(10)~(14)のように線形化した場合, どの方法で求めた $\frac{de_{sat}}{dT}$ を使っても熱収支はほとんど変化しないことがわかる。

なお補足として, 式(9)は分母第2項を無視して使われることがある。これは温度が低いとき, e_{sat} が大気圧 p より小さいとした近似である。この q_{sat} そのものの近似の誤差を計算したところ, 温度が 40°C では2.8%, 60°C では7.4%, 80°C では17.7%であった。したがって温度が 60°C 以上になるとこの近似は精度が悪いことが分かる。

V. まとめ

飽和水蒸気圧を表す各種実験式を比較し, その違いが地表面の熱収支量にどれくらい影響するかを調べた。その結果, 実験式による違いは事実上無視できることが分かった。

また $\frac{de_{sat}}{dT}$ を計算する方法についても比較した。これについても方法による違いは熱収支にはほとんど影響しないことがわかった。そえゆえ, 莫大な量のデータ処理でなければ, 式の簡単なTetensの式(2)と式(16)の利用で十分である。

参考文献

Bolton, D. (1980): The computation of equiva-

- lent potential temperature. *Mon. Wea. Rev.*, **108**, pp. 1046-1053
- Flatau, P.J., R.L. Walko, and W.R. Cotton (1992): Polynomial fits to saturation vapor pressure. *J. Appl. Meteor.*, **31**, pp. 1507-1513
- Gibbins, C.J. (1990): A survey and comparison of relationships for the determination of the saturation vapour pressure over plane surfaces of pure water and of pure ice. *Ann. Geophys. Atmos.*, **8**, pp. 859-886
- List, R.J. (1966): *Smithsonian Meteorological Tables*. 6th, Revised, Ed. The Smithsonian Institution. pp. 347-353
- Lowe, P.R. (1977): An approximating polynomial for the computation of saturation vapor pressure. *J. Appl. Meteor.*, **16**, pp. 100-103
- Tetens, O. (1930): Über einige meteorologische Begriffe. *Z. Geophys.*, **6**, pp. 297-309
- Wexler, A. (1976): Vapor pressure formulation for water in range 0 to 100°C, A revision. *J. Res. NBS*, **80(A)**, pp. 775-785
- Kondo, J. and T. Watanabe (1992): Studies on the bulk transfer coefficients over a vegetated surface with a multilayer energy budget model. *J. Atmos. Sci.*, **49**, pp. 2183-2199
- 近藤純正・桑形恒男 (1992): 日本の水文気象(1)放射量と水面蒸発. *水文水資源学会誌*, **5(2)**, pp. 13-27
(1993年6月15日受付, 1993年8月20日受理)