測定データのノイズ除去について*

Recent Advances in Noise Reduction for Real-World-Objects

吉澤 信**
Shin YOSHIZAWA

Key words

smoothing, white noise reduction, bilateral filter, non-local means, mean curvature flow, nonlinear diffusion

1. はじめに

近年の観察・計測システムの急速な発達に伴い、対象の実測デジタルデータに基づく自然現象の解明・工業製品のCAD/CAM/CAEを行うことが、理工学全般の基盤技術となりつつある。しかしながら、観察・計測装置を通してデジタル化した情報は通常ノイズを含み、確度の高い解析や目的の処理を行うためにはノイズの除去が必要である。本稿では加算性白色ガウスノイズと呼ばれる一般的なランダムノイズを対象に、実用上よく用いられているノイズ除去計算法とその理論的背景を解説する。さらにNL-Meansと呼ばれる最新のパターン保存ノイズ除去法を紹介する。

自然科学においてよく用いられる観察・計測データはCT・MRI・望遠鏡・顕微鏡等による立体情報や時間変化を含む高次元画像情報である。例えば、細胞生物学では共焦点レーザー顕微鏡による生きた細胞の4次元観察とそのデータ解析が現在主流である。ものづくりでも工業製品の内部情報をCT等のX線解析により測定・計測する。一方、製品形状はレーザー・構造光式・接触式等の表面形状スキャナーにより、点群や多角形メッシュで近似された曲面として計測する。

本稿で取り扱う加算性白色ガウスノイズとはノイズが入力データに依存せず、そのパワースペクトル（自己相関のフーリエ変換）がすべての周波数で一定かつ振幅強度が正規分布となる信号である。簡単に言うと、計測データの真の値を平均としてランダムな摂動を正規分布に従って加えた信号であり、その摂動の分散がノイズの幅を表す。これ

は、自然界の雑音をよく近似するノイズモデルであり、最小二乗的に最適な除去法としてウィナーフィルタ（Wiener Filter）が知られている。しかしながら、理想的ウィナーフィルタを構成するためには原信号とノイズのパワースペクトルが必要であり、その見積りが困難なため、高次元の複雑な計測データでは実用的ではない。そのため、本稿では実用上よく用いられている平滑化法として知られるノイズ除去法を紹介する。

2. ガウスぼかし・拡散・ロウパスフィルタ

連続で滑らかな2つの関数 $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ と $g \in C^\infty(\mathbb{R})$ を考える。ここで $|x| \rightarrow \infty$ のとき $f(x) \rightarrow 0$, $g(x) \rightarrow 0$ とすると、 f と g の畳み込みは $f * g = \int f(\tau) g(x - \tau) d\tau$ で定義される。さらに、畳み込み核 g を標準偏差 $\sqrt{4t}$ のガウス関数を用いて $g(x, t) = G_{\sqrt{4t}}(|x|) / (4\pi t)^{n/2}$ に拡張すると、畳み込みの結果定義される関数 $h(x, t)$ は $f(x, t) = f(x)$ を用いて

$$h(x, t) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int G_{\sqrt{4t}}(|x - y|) f(y) dy, \quad (1)$$

となる。ただし、ガウス関数は $G_a(b) = \exp(-(b/a)^2)$ で定義する。上式は拡散方程式の初期値問題

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \Delta h, \quad (x \in \mathbb{R}^n, t > 0), \quad h(x, 0) = f(x), \quad (2)$$

の基本解 $h(x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} g(x - y, t) f(y) dy$ になる。ただし、初期条件 $f(x)$ は既知の関数でラプラス作用素を

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}, \quad x = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \in \mathbb{R}^n$$

図1 ガウス畳み込み例。左：入力信号。右：ガウス畳み込みによって平滑化された信号群。ここで、複数の曲線はそれぞれ式(1)の t を変化させた $h(x, t)$ に対応する。

*原稿受付 平成20年10月2日

**理化学研究所VCADシステム研究プログラム
生物基盤構築チーム（埼玉県和光市広沢2-1）

吉澤 信

2006年マックスプランク・コンピュータ科学研究
所Ph.D. 奨学生修了。Dr.-Ing. (ドイツ国立ザ
ールランド大学)。CG/CAGD, 特に意匠曲面生成,
幾何変形法, メッシュの媒介変数化, 平滑化法,
特徴線抽出, 離散微分幾何量の研究に従事。

図2 様々な画像平滑化によるノイズ除去例。下段の画像はノイズなし画像と人工的に加算性白色ガウスノイズ（最左下図）を加えた画像（最左上図）の差分である。NL-Means が最もエッジやパターンを保存していることがわかる。

図3 様々なメッシュ平滑化による曲面メッシュのノイズ除去例。入力曲面メッシュは図6に記載。

と定義する。つまりガウス畳み込みの標準偏差を正の方向に動かすことは熱伝導や拡散の正方向への時間変化と同義であり、ガウスぼかし Laplacian 平滑化と呼ばれる平滑化作用を $f(x)$ に及ぼす（図1参照）。

さらに簡単のため1次元で、 $0 \leq x \leq l$ 、境界条件 $h(0, t) = h(l, t) = 0$ の場合の $h(x, t)$ を Fourier 解で表すと

$$h(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \exp\left(-\frac{k^2 \pi^2}{l^2} t\right) \sin \frac{k \pi}{l} x,$$

$$b_k = \frac{2}{l} \int_0^l f(y) \sin \frac{k \pi}{l} y dy,$$

となり、解 $h(x, t)$ の Fourier 係数は $\exp(-k^2 \pi^2 t / l^2)$ の定数倍となることが確認される。上記 Fourier 解によって変数（時間） t を正の方向に動かす $t \rightarrow \infty$ と高モードの Fourier 係数（高周波成分）ほど急速に減衰することが確認でき、熱伝導・拡散の平滑化作用が説明される（ロウパスフィルタ）。また、この平滑化作用は式(2)が勾配の二乗を積分したいわゆるディレクレエネルギーを最小化することからも直感的理解が可能である。

これらガウスぼかし・拡散・ロウパスフィルタは信号・画像処理ではガウスフィルタ⁸⁾と呼ばれ、古くからノイズ除去法として用いられてきた。式(2)のラプラス作用素 Δ の代わりに高階のラプラス作用素を考えることもできる。その場合は Δ のときも含めて、微分方程式の極限で $h(x, \infty)$ は境界条件を満たす多重調和写像となる。また、曲面メッシュに対しても、曲面上の高階の拡散方程式を考え、曲面ラプラス作用素をグラフラプラス作用素によって近似し平滑化を行う方法⁴⁾¹⁵⁾が提案されている。ここで曲面ラプラス作用素の曲面自体への適用は、その曲面の平均

曲率と法線ベクトルの掛算の2倍になる。それゆえ、曲面上の単純拡散方程式は平均曲率流（Mean Curvature Flow: MC-Flow）と呼ばれ、極限では境界条件を満たす極小曲面へ収束する。また曲面上の2重拡散方程式の極限は曲率の2乗を最小化する意匠曲面の近似として知られている。図2の左から2番目と図3の左端の画像はそれぞれ、ガウスフィルタ⁸⁾と離散平均曲率流⁴⁾を用いたノイズ除去例である。

これらガウスぼかし・拡散・ロウパスフィルタは計測データの対象部分が調和関数の場合最適であるが、特異点（エッジやパターン境界）近傍でのノイズ除去結果の質は悪く、特徴を平滑化してしまう欠点がある。

3. エッジ・パターン保存フィルタ

前章で紹介した線形フィルタでは対応できない稜線（エッジ）やパターンを保存する特徴保存ノイズ除去法は、重み付き畳み込みが実用上よく用いられている。計測データを高次元画像とし、その輝度値を $I(x) \in \mathbb{R}$ で表す。ここで、拡散方程式のラプラス作用素を $\Delta I(x) = \text{div } c \nabla I(x)$ としたときに、拡散係数 c を輝度値 $I(x)$ の勾配 $\nabla I(x)$ を用いた汎関数 $c = c(I(x), \nabla I(x))$ へ拡張する。特に $c = G_\sigma(|\nabla I(x)|)$ や $c = 1/(1 + \epsilon |\nabla I(x)|^2)$ とした場合は、勾配（エッジ）が大きな場所での拡散を抑制する非線形拡散法¹³⁾として知られる。同様に、勾配の代わりとして曲面の主曲率を重みに用いて曲面メッシュ上の特徴を保存する方法が異方性平均曲率流⁶⁾（Anisotropic Mean Curvature Flow: AMC-Flow）や法線拡散法¹⁾として知られており、特徴保存に有用なノイズ除去法である。これら一般の重み

図4 Bilateral フィルタによる3次元画像のノイズ除去例. 左: ノイズを含んだ計測データ, 頭部 MRI Volume (左上, Erlangen 大学提供) とエンジン部品の CT Volume (左下, General Electric 社提供). 右: Bilateral フィルタによる3次元画像のノイズ除去例.

付き畳み込みにより新たな輝度値 $J(x)$ を計算することは

$$J(x) = \int_{\Omega} W(x, y) I(y) dy / \int_{\Omega} W(x, y) dy, \quad (3)$$

とも表せる. ここで, $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ とし, 積分の離散実装は重み付き和で行う. 例えば, x の近傍 y での輝度値 $I(x)$ と $I(y)$ との差分 $I(x) - I(y)$ は, 勾配 $\nabla I(x)$ の差分近似と考えられる. 実際に, $W(x, y) = G_{\sigma}(|I(x) - I(y)|)$ のとき式(3)を Yaroslavsky フィルタ³⁾と呼び, エッジを保存する平滑化フィルタである. また, 畳み込み核を導入し, $W(x, y) = G_{\sigma_1}(|I(x) - I(y)|) G_{\sigma_2}(|x - y|)$ とした場合に式

(3) は Bilateral フィルタ¹⁶⁾と呼ばれる. Bilateral フィルタは近年最もよく用いられているエッジ保存平滑化フィルタであり, 高階調画像の表示・圧縮や周波数分解等の幅広い応用が存在する. 特にデジタルカメラの普及に伴って爆発的發展を遂げている計算 Photography にて最も重要な要素技術である. 図4は MRI と CT による計測データに対しての Bilateral フィルタを用いたノイズ除去の例である.

Bilateral フィルタに関する導入・パラメータの役割等の詳細な調査文献としては文献12)を参照されたい. また, 2次元画像に対する高速 Bilateral フィルタのプログラム集や関連論文が WEB¹¹⁾ から入手可能である. Bilateral フィルタと比べてパラメータが少ないエッジ保存フィルタとして Median フィルタが有名であるが, ノイズの標準偏差の情報を使えないことや本来エッジ特徴がない場所に新たに偽のエッジ特徴を生成する等の難点がある. さらに, Bilateral フィルタの曲面メッシュへの拡張が文献5)7)にて提案されている. これら Bilateral メッシュフィルタは, 近傍のメッシュ頂点から平滑化したい頂点の接平面への距離を画像における輝度値とみなすことで計算法を構成している.

Bilateral フィルタでは, エッジを横断する平均化を抑

図5 NL-Means の直感的概念図

図6 NL-Means メッシュフィルタによるノイズ除去例. 左図: 構造光式スキャナーによって計測された曲面メッシュ (Caltech Vision Group 提供). 中: 曲面メッシュ上に対応する離散平均曲率⁴⁾を表示することによって, 微小な凹凸が強調されて計測ノイズが存在することがわかる. 右: NL-Means メッシュフィルタ¹⁷⁾によるノイズ除去例. 離散平均曲率表示は図2に記載.

制するように $W(x, y)$ が構成されている. この概念を一般化しパターンの境界を横断する平均化を抑制するように式(3)で

$$W(x, y) = G_{\sigma} \left(\int_{\mathbb{R}^n} G_{\sigma}(|t|) |I(x-t) - I(y-t)|^2 dt \right) \quad (4)$$

とするフィルタを Non-Local Means フィルタ²⁾³⁾ (NL-Means) と呼ぶ. NL-Means フィルタでは図5に示すように, 各画素の近傍を局所的パターンとみなし, そのパターンの差が大きい場所の平滑化を抑制する. つまり, x と y を中心とした二つの領域間の輝度値の相関を取ることににより, パターン境界を横断した平均化を防ぐフィルタである. NL-Means フィルタは現在最新のノイズ除去法でビデオ処理・メッシュのノイズ除去¹⁷⁾等に応用されている. また, 理論的には NL-Means フィルタは確率過程や微分方程式として解析可能である³⁾. ウィナーフィルタや既存の画像処理フィルタと NL-Means フィルタとの詳細な比較文献は3)を参照されたい. 図2と3はそれぞれ, 2次元画像と実測された曲面メッシュに対して, 本稿で紹介した平滑化法を用いたノイズ除去の一例である.

特に NL-Means フィルタは複雑なパターンをもった生体データに関して, 実用上驚くべき高品質なノイズ除去結果を提供する (図6, 7, 8 参照). パラメータの選び方として, 輝度に関する畳み込み核の標準偏差 (Bilateral フィルタの σ_1 や式(4)の σ) は, 実験的に対象画像の平面・

図7 NL-Means フィルタによるノイズ除去例. 上: 共焦点レーザー顕微鏡による酵母 Golgi 体の観察画像 (細胞小器官, 理研: 中野生体膜研究室提供) とその高さ関数の陽的曲面表示. 超高感度撮影により高階調な情報を取得しているため, ノイズ比が非常に高い. 中・下段の画像は NL-Means フィルタ²⁾によるノイズ除去の結果. それぞれ, 目的としているパターンの大きさをパラメータを変えることによって実現.

図8 NL-Means フィルタによる3次元画像のノイズ除去例. 左: 共焦点レーザー顕微鏡によって観察された HeLa 細胞 (分裂期, 理研: 細胞機能探索技術開発チーム提供). 右: NL-Means 画像フィルタ²⁾によるノイズ除去例.

調和写像に近い部分領域での輝度値標準偏差の 0.2 から 1.5 倍とした場合に, 良い結果が得られる. 空間のパラメータ (Bilateral フィルタの σ_2 や式(4)の積分範囲) は保存したい特徴の大きさに依存する. 詳しくは文献3)12)のパラメータに関する記述を参照されたい.

4. ま と め

本稿では, 平滑化に基づく最新のノイズ除去法と実測データに対する例を紹介し, その理論的背景を解説した. 特

に Bilateral フィルタとその拡張である NL-Means フィルタは, 自然界の雑音をよく近似している加算性白色ガウスノイズに対して高品質なノイズ除去を行うことを示した. しかしながら, 大規模で複雑な高次元計測データに対しては計算量が莫大になる. それゆえ現在, FFT¹¹⁾やヒストグラム¹⁴⁾を用いた Bilateral フィルタの高度な高速化計算法の研究が盛んである. NL-Means フィルタの部分的高速化法³⁾⁹⁾¹⁰⁾もいくつか提案されてきている. 今後の展望としては大規模高速化計算法の他にパラメータの自動決定が課題である.

謝 辞

本研究は科学研究費 (若手 B: 20700175) の助成を一部受けて実施された. 図7と8の入力細胞観察データはそれぞれ, 理化学研究所の中野生体膜研究室と細胞機能探索技術開発チームの厚意で提供していただいた.

参 考 文 献

- 1) A. Belyaev and Y. Ohtake: Nonlinear Diffusion of Normals for Crease Enhancement, SPIE, (2001) 42-47.
- 2) A. Buades, B. Coll and J.M. Morel: A Non-local Algorithm for Image Denoising, CVPR, (2005) 60-65.
- 3) A. Buades, B. Coll and J.M. Morel: A Review of Image Denoising Algorithms, with a New One, SIAM Multiscale Modeling & Simulation, **4**, 2 (2005) 490-530.
- 4) M. Desbrun, M. Meyer, P. Schroder and A.H. Barr: Implicit Fairing of Irregular Meshes Using Diffusion and Curvature Flow, ACM SIGGRAPH, (1999) 317-324.
- 5) S. Fleishman, I. Drori and D. Cohen-Or: Bilateral Mesh Denoising, ACM TOG, **22**, 3 (2003) 950-953.
- 6) K. Hildebrandt and K. Polthier: Anisotropic Filtering of Nonlinear Surface Features, Computer Graphics Forum, **23**, 3 (2004) 391-400.
- 7) T.R. Jones, F. Durand and M. Desbrun: Non-iterative, Feature-preserving Mesh Smoothing, ACM TOG, **22**, 3 (2003) 943-949.
- 8) M. Lindenbaum, M. Fischer and A.M. Bruckstein: On Gabor's Contribution to Image Enhancement, Pattern Recog., **27**, 1 (1994) 1-8.
- 9) M. Mahmoudi and G. Sapiro: Fast Image and Video Denoising via Non-local Means of Similar Neighborhoods, IEEE Signal Processing Letters, **2**, 12 (2005) 839-842.
- 10) J. Orchard, M. Ebrahimi and A. Wong: A Faster Nonlocal Means Image Denoising Using the FFT, Submitted, (2008). <http://www.math.uwaterloo.ca/~m2ebrahi/papers/double.pdf>
- 11) S. Paris and F. Durand: A Fast Approximation of the Bilateral Filter Using a Signal Processing Approach. In Press, Int. Journal of Computer Vision, 2008. <http://people.csail.mit.edu/sparis/bf/>
- 12) S. Paris, P. Kornprobst, J. Tumblin and F. Durand: A Gentle Introduction to Bilateral Filtering and Its Applications, ACM SIGGRAPH Courses, (2007).
- 13) P. Perona and J. Malik: Scale-space and Edge Detection Using Anisotropic Diffusion, IEEE PAMI, **12**, 7 (1990) 629-639.
- 14) F. Porikli: Constant Time $O(1)$ Bilateral Filtering, CVPR 2008.
- 15) G. Taubin: A Signal Processing Approach to Fair Surface Design, ACM SIGGRAPH, (1995) 351-358.
- 16) C. Tomasi and R. Manduchi: Bilateral Filtering for Gray and Color Images, IEEE ICCV, (1998) 839-846.
- 17) S. Yoshizawa, A. Belyaev and H. -P. Seidel: Smoothing by Example: Mesh Denoising by Averaging with Similarity-based Weights, IEEE SMI, (2006) 38-44.