3点法におけるパラメータ算出法および変位計の設置角度の推定に関する新手法*

佐瀬 浩 史** 藤 巻 研 吾** 三 井 公 之***

Study of new algorithm for weighting coefficient and sensor angle in three-point method

Hiroshi SASE, Kengo FUJIMAKI and Kimiyuki MITSUI

Three-point method is an error separation method for roundness and spindle error measurement. However, there are still some problems for practical use of three-point method. The discrepancy of the measurement sensitivity between three displacement sensors affects the measured result in the specific spatial frequency range. In three-point method, in-situ calibration of displacement sensors are difficult for some sensor angles. So, this paper reports new algorithm to correct measurement sensitivity of displacement sensors and demonstrates the feasibility of the algorithm through numerical simulations and experiments. The algorithm realizes precise roundness and spindle error measurement. This result show that the algorithm correct the difference of the measurement sensitivity to less than 2 %. And the algorithm applied to measurement of sensor angles also.

Key words: three-point method, roundness, rotation accuracy, sensor angle, sensor gain, spindle rotation

1. 緒 言

近年、金型加工の高精度化、IT技術の進展により、マシニングセンタなどの工作機械を用いた精密加工への要請が高まっている。これにともない、工作機械に搭載されるスピンドルにも高い回転精度が求められると同時に、高精度回転精度評価手法が求められている。しかし、従来の回転精度測定法には基準となる高精度な球ないし円筒などの形状が必要であり、基準となる形状の加工精度によって測定精度が制約されていた。しかし、3点法による回転精度測定法の提案により、測定基準の精度に制約されることなく高精度な回転精度測定を行うことが可能となった^{1) 2)}。

しかし、3点法の実用化にはまだいくつか解決しなければならない問題点が存在する。その1つとして、3本の変位計の感度の差異に起因する測定誤差があげられる。変位計の配置位置によっては、測定装置にセットした状態での変位計のキャリブレーションが困難であることや、変位計が3本必要なためキャリブレーションに時間がかかるといった問題がある。

各変位計に感度の差異がある場合、主に重み付け加算における伝達関数のゲインが零に近くなる空間周波数領域で測定誤差が大きくなることが報告されている³⁾。そこで、本研究では各変位計の測定感度に差異がある場合、最小二乗法を用いてこれを補正する手法を提案し、本手法の有効性をシミュレーションおよび測定実験により検証した。また、3点法により正確な測定を行うには、各変位計設置角度を正確に知ることが重要である。そこで本アルゴリズムを用いて変位計の設置角度を求めることが可能であることをシミュレーションによって示した。

2. 3点法の基本原理

3点法の原理について説明する。図1に示すように、3本の変位計1, 2, 3の中心軸の交点を点Oとし、各変位計設置角度を ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 とする。点Oを通る直交座標系をX-Yとし、Y軸からの回転角を θ とする。測定対象の平均半径を r_0 とすると測定対象の断面形状は

$$r(\theta) = r_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \cos k\theta + B_k \sin k\theta) \quad (1)$$

と表せる。スピンドルのX方向の振れを $x(\theta)$ 、Y方向の振れを $y(\theta)$ 、 l_1, l_2, l_3 を変位計と点Oとの間の平均の距離とすると、変位計1, 変位計2, 変位計3の出力 V_1, V_2, V_3 は

$$\begin{aligned} V_1(\theta) &= l_1 + r(\theta + \phi_1) + x(\theta) \sin \phi_1 + y(\theta) \cos \phi_1 \\ V_2(\theta) &= l_2 + r(\theta + \phi_2) + x(\theta) \sin \phi_2 + y(\theta) \cos \phi_2 \\ V_3(\theta) &= l_3 + r(\theta + \phi_3) + x(\theta) \sin \phi_3 + y(\theta) \cos \phi_3 \end{aligned} \quad (2)$$

となり、 V_2, V_3 の重み付け係数を a, b とすると変位計の合計出力 $S(\theta)$ は以下になる。

Fig.1 Principle of three-point method

* 原稿受付 平成 19 年 9 月 20 日

** 学生会員 慶應義塾大学大学院 (神奈川県横浜市港北区日吉 3-14-1)

*** 正 会 員 慶應義塾大学理工学部 (神奈川県横浜市港北区日吉 3-14-1)

Fig.2 Principle of new algorithm

$$\begin{aligned}
 S(\theta) &= V_1(\theta) + aV_2(\theta) + bV_3(\theta) \\
 &= l_1 + al_2 + bl_3 + r(\theta + \phi_1) \\
 &\quad + ar(\theta + \phi_2) + br(\theta + \phi_3) \\
 &\quad + (\sin \phi_1 + a \sin \phi_2 + b \sin \phi_3)x(\theta) \\
 &\quad + (\cos \phi_1 + a \cos \phi_2 + b \cos \phi_3)y(\theta)
 \end{aligned} \quad (3)$$

このとき

$$\begin{aligned}
 \sin \phi_1 + a \sin \phi_2 + b \sin \phi_3 &= 0 \\
 \cos \phi_1 + a \cos \phi_2 + b \cos \phi_3 &= 0
 \end{aligned} \quad (4)$$

を満足するように a , b を選択すれば合計出力 $S(\theta)$ は $x(\theta)$, $y(\theta)$ とは無関係になる。このとき, a , b は以下のように表すことができる。

$$\begin{aligned}
 a &= \sin(\phi_3 - \phi_1) / \sin(\phi_2 - \phi_3) \\
 b &= \sin(\phi_1 - \phi_2) / \sin(\phi_2 - \phi_3)
 \end{aligned} \quad (5)$$

ここで

$$\begin{aligned}
 \alpha_k &= \cos k\phi_1 + a \cos k\phi_2 + b \cos k\phi_3 \\
 \beta_k &= \sin k\phi_1 + a \sin k\phi_2 + b \sin k\phi_3 \\
 c_0 &= l_1 + al_2 + bl_3 + r_0(1 + a + b)
 \end{aligned} \quad (6)$$

と変換すると合計出力は以下のように表せる。

$$\begin{aligned}
 S(\theta) &= c_0 + \sum_{k=2}^{\infty} [(A_k \alpha_k + B_k \beta_k) \cos k\theta \\
 &\quad + (B_k \alpha_k - A_k \beta_k) \sin k\theta]
 \end{aligned} \quad (7)$$

$S(\theta)$ をフーリエ級数で表し, その係数を F_k , G_k と置くと

$$\begin{aligned}
 F_k &= A_k \alpha_k + B_k \beta_k \\
 G_k &= B_k \alpha_k - A_k \beta_k
 \end{aligned} \quad (8)$$

となり, 断面形状 $r(\theta)$ のフーリエ係数は

$$\begin{aligned}
 A_k &= (\alpha_k F_k - \beta_k G_k) / (\alpha_k^2 + \beta_k^2) \\
 B_k &= (\alpha_k G_k + \beta_k F_k) / (\alpha_k^2 + \beta_k^2)
 \end{aligned} \quad (9)$$

となる。また, 軸の振れは以下のように表せる。

$$\begin{aligned}
 x(\theta) &= \{V_1(\theta) - r(\theta + \phi_1)\} \cos \phi_2 \\
 &\quad - \{V_2(\theta) - r(\theta + \phi_2)\} \cos \phi_1 / \sin(\phi_1 - \phi_2) \\
 y(\theta) &= -\{V_1(\theta) - r(\theta + \phi_1)\} \sin \phi_2 \\
 &\quad - \{V_2(\theta) - r(\theta + \phi_2)\} \sin \phi_1 / \sin(\phi_1 - \phi_2)
 \end{aligned} \quad (10)$$

3. 変位計感度比補正原理

次に各変位計の感度比を補正する手法について説明する(図 2)。いま, 変位計 1 に対して, 変位計 2, 変位計 3 の感度に誤差があるものとし, このときの各変位計の出力を V'_1 , V'_2 , V'_3 とする。なお, 本研究では $V'_1/V_1 = 1$ とし変位計 1 の感度に誤差がないものと仮定している。また, 変位計 2 および変位計 3 の感度比をそれぞれ V'_2/V_2 , V'_3/V_3 と定義した。主軸を回転させずに, X および Y 方向に変位を与えたときに, 重み付け係数 a' , b' を選択しているとすると以下ようになる。

$$S = V'_1 + a'V'_2 + b'V'_3 \quad (11)$$

このとき振れ成分が重み付け加算によってキャンセルされるとすると, 合計出力 S は一定値になると考えられる。そこで最小二

Fig.3 White gaussian noise

乗法を用いて a' , b' を求める。式(7)の 2 乗和は式(12)のようになる。このとき, i を付記した値は離散値とする。以下の Σ は $i = 1, 2, \dots, n$ のときの総和を表し, c' は合計出力 S の平均値とする。

$$\begin{aligned}
 \Sigma (S_i - c')^2 &= \Sigma (V'_{1,i} + a'V'_{2,i} + b'V'_{3,i} - c')^2 \\
 &= \Sigma (V'^2_{1,i} + a'^2 V'^2_{2,i} + b'^2 V'^2_{3,i} + c'^2 \\
 &\quad + 2a'^2 V'_{1,i} V'_{2,i} + 2b'V'_{1,i} V'_{3,i} - 2c'V'_{1,i} \\
 &\quad + 2a'b'V'_{2,i} V'_{3,i} - 2a'c'V'_{2,i} - 2b'c'V'_{3,i})
 \end{aligned} \quad (12)$$

これらの a' , b' , c' に対する偏微分を 0 とおくと

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial a'} \Sigma (S_i - c')^2 &= 2a' \Sigma V'^2_{2,i} + 2b' \Sigma V'_{2,i} V'_{3,i} \\
 &\quad - 2c' \Sigma V'_{2,i} + 2 \Sigma V'_{1,i} V'_{2,i} \\
 &= 0 \\
 \frac{\partial}{\partial b'} \Sigma (S_i - c')^2 &= 2a' \Sigma V'_{2,i} V'_{3,i} + 2b' \Sigma V'^2_{3,i} \\
 &\quad - 2c' \Sigma V'_{3,i} + 2 \Sigma V'_{3,i} V'_{1,i} \\
 &= 0
 \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial c'} \Sigma (S_i - c')^2 &= -2a' \Sigma V'_{2,i} - 2b' \Sigma V'_{3,i} \\
 &\quad + 2c' \Sigma - 2 \Sigma V'_{1,i} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

となり, 行列式で表すと次式となる。

$$\begin{bmatrix} \Sigma V'^2_{2,i} & \Sigma V'_{2,i} V'_{3,i} & -\Sigma V'_{2,i} \\ \Sigma V'_{2,i} V'_{3,i} & \Sigma V'^2_{3,i} & -\Sigma V'_{3,i} \\ -\Sigma V'_{2,i} & -\Sigma V'_{3,i} & \Sigma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\Sigma V'_{1,i} V'_{2,i} \\ -\Sigma V'_{3,i} V'_{1,i} \\ \Sigma V'_{1,i} \end{bmatrix} \quad (14)$$

従って a' , b' , c' は次式で求められる。

$$\begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma V'^2_{2,i} & \Sigma V'_{2,i} V'_{3,i} & -\Sigma V'_{2,i} \\ \Sigma V'_{2,i} V'_{3,i} & \Sigma V'^2_{3,i} & -\Sigma V'_{3,i} \\ -\Sigma V'_{2,i} & -\Sigma V'_{3,i} & \Sigma \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -\Sigma V'_{1,i} V'_{2,i} \\ -\Sigma V'_{3,i} V'_{1,i} \\ \Sigma V'_{1,i} \end{bmatrix} \quad (15)$$

よって感度に差異のある変位計 2, 変位計 3 の出力 V'_2 , V'_3 は $V_2 = V'_2 a'/a$ $V_3 = V'_3 b'/b$ (16)

とすることにより補正される。また, 変位計 2 の感度に誤差がない場合 ($V_2 = V'_2$), 式(16)は

$$a' = aV'_2 / V'_2 = a \quad (17)$$

とかける。同様に, 変位計 3 の感度に誤差がない場合 ($V_3 = V'_3$) $b' = b$ (18)

となる。したがって, 式(5)から求めた重み付け係数と今回提案するアルゴリズムにより求めた重み付け係数は一致することになる。また, 重み付け係数は式(5)で表すことができるから, $\phi_1 = 0^\circ$ とすれば重み付け係数から, 変位計設置角度 ϕ_2 , ϕ_3 を求めることができる。

したがって, 変位計 1, 変位計 2, 変位計 3 の感度比に誤差がない場合 ($V'_1 = V_1$, $V'_2 = V_2$, $V'_3 = V_3$), 本アルゴリズムにより, 変位計設置角度を求めることができる。

Fig.4 Displacement in X and Y direction (simulation 1)

Fig.7 Displacement in X and Y direction (simulation 3)

Fig.5 Displacement (simulation 1, unsuccessful example)

Fig.8 Displacement (simulation 3, successful example)

Fig.6 Displacement (simulation 2, unsuccessful example)

Fig.9 Comparison of total output (simulation)

4. シミュレーション

4.1 変位計感度比の補正

変位計の感度比を補正するアルゴリズムを用い、3回のシミュレーションを行った。変位計1の感度比を1.0000としたとき、変位計2と変位計3の感度比を $V'_2/V_2 = 0.9600$, $V'_3/V_3 = 1.0500$ とし、変位計設置角度はそれぞれ $\phi_1 = 0.00^\circ$, $\phi_2 = 121.10^\circ$, $\phi_3 = 280.00^\circ$ とした。このとき、式(5)より求めた重み付け係数は $a = 2.7356$, $b = 2.3785$ となる。また、このときのデータ点数は10000点とした。各変位計へ、平均が0、標準偏差が0.01の正規分布する乱数を用いて、時系列信号を作成し、各変位計に加わるノイズを与えた(図3)。

はじめに、図4および図5で示されるような変位を主軸に与え、今回提案したアルゴリズムを用いて感度比を求めるシミュレーションを行った(シミュレーション1)。シミュレーションの結果、重み付け係数は $a' = -0.5414 \times 10^{-3}$, $b' = -0.4318 \times 10^{-3}$ と求まり、変位計2の感度比は -5.0526×10^3 , 変位計3の感度比は -5.5080×10^3 と推定されたが、これは、真値0.9600, 1.0500とは

全く異なっている。感度比を正しく求められなかったのは、X方向のみの変位を与えたため、X方向の振れだけしかキャンセルすることができない重み付け係数が導き出されたためである。

次に図4で示したX方向の変位をX方向およびY方向の双方に与え、変位計の感度比を求めるシミュレーションを行った(シミュレーション2)。このときの主軸の変位を図6に示す。シミュレーションの結果、重み付け係数は $a' = -0.3923$, $b' = 1.0239$ と求まり、変位計2の感度比は -6.9729 , 変位計3の感度比は2.3231と推定された。これも、真値0.9600, 1.0500とは全く異なっている。感度比を正しく求められなかったのは、X方向およびY方向に同じ変位を与えたため、ある1方向にしか振れをキャンセルすることができない重み付け係数が導き出されたためである。

最後に、図4で示したX方向の変位とX方向の変位の位相をずらした変位をY方向に与え、変位計の感度比を求めるシミュレーションを行った(シミュレーション3)。X方向およびY方向に与えた変位を図7、図8に示す。シミュレーションの結果、重み付け係数は $a' = 2.8486$, $b' = 2.2643$ となり、これらの値から変位計2の感度比を0.9603, 変位計3の感度比を1.0505と推定することができ、真値に近い値が得られた。また、式(5)で示した重み付け係数を用いて求めた合計出力 S と本アルゴリズムを用いて変位計の感度比の補正を行った場合の合計出力 S を比較した結果を図9に示す。この結果から、変位計の感度比

Fig.10 Measurement of sensor angles

Fig.11 Output of each sensor

に誤差がある場合には、感度比の補正を行うことにより合計出力から振れ成分の残差が非常に小さくなることが理解できる。

3回のシミュレーション結果から、本アルゴリズムを用いて変位計の感度比を正しく求めるためには図5や図6に示される1次元的な変位を用いず、図8に示されるような円運動や楕円運動などの2次元的な変位を与える必要がある。しかし、X、Y方向に同位相の変位しか与えることができない場合でも、X方向、Y方向にそれぞれ別々に変位を与え、後で測定データをつなぎ合わせることで正しい変位計の感度比を求めることができる。また、主軸に変位を与える方法としては微動ステージなどを用いて主軸を移動させる方法、主軸に力を加えることにより変位を与える方法、プラスチックハンマなどを用いてインパルス加振する方法など様々な方法が考えられる。第5章の実験結果において述べるように本研究では主軸に力を加え、変位を与えた。

4.2 変位計の設置角度の推定

一方、変位計1、変位計2、変位計3の感度比に誤差がない場合($V'_1 = V_1$, $V'_2 = V_2$, $V'_3 = V_3$)、本アルゴリズムにより、各変位計設置角度を推定することができる。このため本節では、変位計設置角度を正しく求められることをシミュレーションにより示した。

変位計の感度比は3本ともキャリブレーションにより等しく調整されているものとし、変位計設置角度 ϕ_1 , ϕ_2 , ϕ_3 の真値をそれぞれ 0.00° , 121.10° , 280.00° とし、4.1節で述べたものと同様の変位およびノイズを用いて変位計設置角度を推定するシミュレーションを行った。本アルゴリズムによって求めた重み付け係数は、 $a' = 2.6273$, $b' = 2.2521$ であった。よって式(5)よ

Fig.12 Comparison of total output (experiment)

Table 1 Weighting coefficient

	sensor2		sensor3	
number of times	a'	a/a'	b'	b/b'
1	-1.90	1.01	-1.85	0.88
2	-1.88	1.02	-1.82	0.89
3	-1.92	1.00	-1.87	0.87
4	-1.87	1.03	-1.82	0.90
5	-1.90	1.01	-1.85	0.88
average	-1.89	1.01	-1.84	0.88
standard deviation	0.02	0.01	0.02	0.01

り、各変位計設置角度は $\phi_1 = 0.00^\circ$ として、 $\phi_2 = 122.60^\circ$, $\phi_3 = 280.63^\circ$ と推定される。この推定値は真値と比べ、 1.5° 程度異なるが、実用上は問題とならない程度である。

5. 実験結果

5.1 変位計感度補正実験

本研究にて提案する変位計感度比補正手法の有効性を示すために実験を行った。実験には株式会社ナカニシ製スピンドルNR-452、日本エー・ディー・イー株式会社製の静電容量型変位計(マイクロセンス3401HR-2)を使用した。

図1に示す変位計1の設置角度 $\phi_1 = 0.00^\circ$ とし、他の2本の変位計の設置角度を従来の方法により測定した。ここで従来の方法とは主軸の測定対象面にテープを貼り、主軸を一定速度で回転する方法で、図10に示すように、このときのテープにより生じる各変位計出力波形の凸部間の位相差を測定することによって、変位計設置角度を求めている。この方法により変位計設置角度は、 $\phi_2 = 58.21^\circ$, $\phi_3 = 269.62^\circ$ と求められた。次に、停止中の主軸に適当な力を加え変位を与えた。このとき得られた各変位計の出力波形を図11に、変位計の感度比を補正する前の合計出力および本アルゴリズムを用いて補正した合計出力および、従来の重み付け係数を用いて求めた合計出力を示したものが図12である。サンプリング周波数を 100kHz とし、1秒間のサンプリングを行っている。各変位計の感度比が正しく調整されている場合、合計出力にはX、Y方向の振れ成分は含まれないので、合計出力は一定値となるはずであるが、図12に示すように補正前の合計出力は一定値となっていない。これは変位計の感度比にばらつきがあることを示すものである。一方、補正後は合計出力が一定値になっており、変位計の感度比の補正が正しく行われていることを示している。

以上の手順に従い重み付け係数を推定する実験を5回繰り返した結果を表1に示す。本アルゴリズムを用いて求めた重み付け係数は $a' = -1.89$, $b' = -1.84$ で、式(5)より角度から求めた重み付け係数は $a = -1.91$, $b = -1.62$ であった。ゆえに変位計

Fig.13 Total output obtained by proposed method

2の感度比は 1.01 ± 0.01 、変位計3の感度比は 0.88 ± 0.01 と求められた。変位計2および変位計3ともに0.01程度の感度比のばらつきがある。これは測定中のノイズによるものと考えられる。さらに、感度を補正した変位計2および変位計3の出力を故意に、それぞれ1.1倍、0.7倍して感度比に誤差を与えた。このときの各変位計の出力を図13に示す。この実験結果に対して本アルゴリズムを適用し変位計の感度比の誤差補正を行った結果、変位計2および変位計3の感度比は、それぞれ1.1倍、0.7倍と正しく推定された。

5.2 従来の変位計キャリブレーション方法との比較

変位計を微動ステージなどを用いてキャリブレーションすることにより求めた感度比と本アルゴリズムにより求めた感度比との比較を行った。

はじめに、従来のキャリブレーション方法により感度比を求めた。スピンドルを、図1のXY方向に移動可能な微動ステージに取り付けてキャリブレーションを行った。なお、5.1節にて述べた実験後、変位計を移動することなく、実験を続けて行ったため、変位計設置角度は5.1節にて述べた場合と同様、 $\phi_1 = 0.00^\circ$ 、 $\phi_2 = 58.21^\circ$ 、 $\phi_3 = 269.62^\circ$ である。変位計1および変位計3に関しては、変位計設置角度とステージの移動方向がほぼ一致しているため、それぞれX方向およびY方向にステージを $20\mu\text{m}$ 移動することにより、変位計のキャリブレーションを行った。変位計2に関しては $\phi_2 = 58.21^\circ$ であるため、X方向またはY方向の一方だけに動かした場合、変位計と主軸の測定面に傾きが生じるため変位計の線形性が低下する恐れがある。そのため、 $\tan 58.21^\circ \approx 16/10$ であるから、ステージをX方向に $10\mu\text{m}$ 、Y方向に $16\mu\text{m}$ 移動させることにより、変位計と測定対象面が常に垂直になるようにし、キャリブレーションを行った。なお、このステージを $20\mu\text{m}$ 動かした際の移動距離を分解能 $0.1\mu\text{m}$ のレーザ変位計(1000点平均)により測定した結果、位置決め精度は $0.1\mu\text{m}$ であり、本実験において十分な精度があることを確認した。この結

果、変位計1の感度は $0.397\text{V}/\mu\text{m}$ 、変位計2の感度は $0.393\text{V}/\mu\text{m}$ 、変位計3の感度は $0.359\text{V}/\mu\text{m}$ と求められた。変位計2および変位計3の感度比はそれぞれ0.991、0.904となる。今回提案したアルゴリズムが2%程度の精度で変位計の感度を推定できることが示された。本アルゴリズムを用いて求めた変位計3の感度比は0.88であり、このように変位計の感度比が大きい場合には非常に有効な補正方法であることがわかった。

また、重み付け係数を繰り返し求める実験では、1%~2%の差異はあるものの、本研究で提案の手法を用いて推定した変位計感度に基づいて求めた重み付け係数に比較的高い繰り返し性があることを確認している。

6. 結 言

本研究では、3点法における重み付け係数を求める新たなアルゴリズムを提案し、次のような結論を得ることができた。

- (1) 本アルゴリズムにより、3本の変位計の感度比に誤差がある場合、変位計感度比を補正し、合計出力中の回転誤差成分がキャンセルできないことによる乱れを最小に抑えられることを明らかにした。
- (2) 変位計感度比に誤差がない場合には、変位計設置角度を推定できることを示し、シミュレーションにより確認した。

これらの結果から、今回提案したアルゴリズムを用いて測定を行うことにより、3点法による回転精度測定および真円度測定のさらなる高精度化を実現することが可能になると考えられる。

なお、本研究は、(財)工作機械技術振興財団試験研究助成Bを受けて行われた。ここに記して謝意を表す。

参 考 文 献

- 1) 三井公之：精度診断技術の研究（3点式主軸回転精度測定装置の開発），日本機械学会論文集（C編），48，425（1982）115.
- 2) 青木保雄，大園成夫：3点法真円度測定法の一展開，精密機械，32，12（1966）831.
- 3) 奥山栄樹，守時一：3点法真円度測定法における検出子間の特性ずれの影響，精密工学会誌，65，3（1999）447.
- 4) 小尾誠，小林隆志，古川進：三点法による真円度測定の一考察，日本機械学会論文集（C編），54，506（1988）2475.
- 5) 高偉，野村忠俊，清野慧：ソフトウェアデータによる真円度測定に関する研究—混合法と3点法のシミュレーションによる比較—，精密工学会誌，60，1（1994）106.
- 6) 鴻巣健治，小野寺克博，富田宏貴，佐藤建吉：円形状の機上測定システム，日本機械学会論文集（C編），64，617（1998）336.
- 7) 奥山栄樹，守時一：3点法による真円度形状測定と軸の回転精度測定に関する一考察，精密工学会誌，65，9（1999）1312.
- 8) 高偉，佐藤栄二郎，大沼孝真，清野慧：角度3点法による真円度と回転誤差測定に関する研究—第一報 角度3点法による真円度測定—，精密工学会誌，68，9（2002）1195.
- 9) B. Muralikrishnan, S. Venkatachalam, J. Raja, M. Malburg: A note on the three-point method for roundness measurement, Precision Engineering, 29, 2（2005）257.
- 10) 藤巻研吾，佐瀬浩史，三井公之：真円度および回転精度の多点法測定における疑似逆行列を用いた計算処理の最適化に関する考察，精密工学会誌，73，8（2007）950.