FEMにおける構造モデリング—ソリッド要素と構造要素（はり，シェル）の選択—

On Modeling of Structures in the Finite Element Method—Difference in Usage between Solid and Structural (Beam and Shell) Elements—/Takahiro YAMADA

横浜国立大学 山田貴博

1. はじめに

応力解析のため有限要素法（Finite Element Method, FEM）は，数値シミュレーションにより研究開発や設計を高度化するCAE（Computer Aided Engineering）における基幹技術と位置づけられる。

有限要素法による応力解析の対象が一般的な複雑形状の連続体であるとき，問題が2次元で記述されていれば，対象領域を三角形や四辺形に分割し，3次元の場合には四面体や六面体に分割してモデル化を行ういわゆるソリッド要素が使われる。一方，曲げ変形が主体となる細長い棒状の構造物あるいはその組み合わせであるラーメン構造の応力解析では，はりを1つの要素とするはり要素が古くから使われている。また，薄い板あるいはタンクや自動車のボディのような薄板を成形した曲面からなるいわゆるシェル構造では，曲面の一部を表すシェル要素が用いられる。これらのはり要素やシェル要素は，構造物を構成する一部を直接表現するものとして構造要素と呼ばれている。

コンピュータの性能の飛躍的な進歩により，非常に大規模な連続体の数値シミュレーションが可能となっている現状では，はり要素やシェル要素によってモデル化されてきた対象を，連続体としてソリッド要素によってモデル化し，大規模問題として複雑な構造物の応力解析を行うことが可能となっている。しかしながら，工学的観点で計算の精度や効率を考えたとき，すべてをソリッド要素でモデル化することは，必ずしも適切ではない。

本稿では，ソリッド要素とはりやシェルのような構造要素の特徴と，利用に当たっての選択について，有限要素法の理論の立場から考えたい。

2. はりとシェルの力学挙動

材料力学で学ぶように，はりの力学は古典的なはり理論で扱うことができる。その基礎となるのは，オイラー-ベルヌーイの仮定

- ・ 変形前の中立軸に垂直な断面は，変形後も中立軸に垂直である

である。オイラー-ベルヌーイの仮定は物理的に妥当な仮定であると認識されているが，ここでは有限要素法による応力解析により確認する。例えば，図1の片持ちはりの問題を，2次元平面応力の弾性体の問題として計算すると

図2のような変形状態が得られる。また，はりの中央部における断面内の位置と軸方向変位の関係を図3に示す，これらの結果から，連続体の挙動としてははりの仮定が成り立っていることが分かる。このはりに対するオイラー-ベルヌーイの仮定のように結果として成り立っていることが示される事項は，*anzats*と呼ばれ，通常の仮定とは区別されている。すなわち，形状が高さに比べて軸方向に長い場合において，曲げ変形が卓越し，基本的な挙動がオイラー-ベルヌーイの仮定が成立するはりの理論に沿うものとなる。

オイラー-ベルヌーイの仮定では，変形後も断面が中立軸に対して垂直であることから，たわみの微分と断面の回転を一致させたこととなる。これは，せん断変形は生じないことを意味している。

板とシェルについては，はりにおけるオイラー-ベルヌーイの仮定に対応するキルヒホッフ-ラブの仮定

図1 片持ちはりの問題

図2 片持ちはりの変形

図3 はりの断面の軸方向変位（はりの中央部）

- ・ 変形前の中央面に垂直な線素は、変形後も中央面に垂直である

を考へる。これも連続体において成立する *ansatz* である。さらに、現在の応用数学における漸近解析と呼ばれる理論的手法により、板やシェルのような形状の連続体の板厚を薄くした極限としてキルヒホッフ-ラブの仮定が成立することが証明されている¹⁾。解析解を構成する力学理論としては、はりの方が板やシェルより単純であるが、3次元連続体から数学的に形状を縮退する漸近解析では、板とシェルの方が理論解析が進んでいる。これは、特に3次元のはりを考えた場合、曲げに加えてねじりも加わり、さらにねじりではそり等を含む複雑な挙動を考慮しなければならないことが原因である。

以上から、はりや板、シェルの理論は、仮定の下で導かれた力学的な近似により得られたものではなく、形状が細長いあるいは板厚が薄い状況で現れる挙動を取り込んだ高次の力学モデルとして理解すべきであることが分かる。

3. は り 要 素

はりをモデル化するはり要素については、よく知られているように有限要素法が開発される以前のマトリックス構造解析法において確立している。基本的なはり要素では、図4のように両端のたわみと回転角を未知数として、要素が作られている。はり要素の導出には、古典的にははり理論に基づき、両端のたわみと回転角を境界条件として与えたときの解を用いている。有限要素法の枠組みにおいては、オイラー-ベルヌーイの仮定の下での仮想仕事の原理に対して、たわみの1階微分まで連続な (C^1 連続性を有する) 補間関数を用いて導かれているが、導かれる要素は境界条件を与えたはりの解から導いたものと一致する。このようなオイラー-ベルヌーイの仮定に基づくはり要素は、オイラーはり要素と呼ばれている。オイラーはり要素では、せん断変形は考慮されていないが、別途せん断変形分

図4 はり要素

図5 1次ティモシェンコはり要素

を重ね合わせることで、せん断変形を考慮した要素を導くことができる。

一方、はりの高さが長さに比べ比較的大きく、せん断変形が無視できない場合には、せん断変形を考慮したティモシェンコはり要素が一般的に用いられている。ティモシェンコはり要素では、たわみと回転角を独立変数とする定式化が用いられている。両端のみに節点をもつ1次ティモシェンコはり要素は、図5のように ξ 方向、 z 方向にそれぞれ1次の補間を行った4節点の双1次四辺形要素に対して、両端の2つの節点変位をたわみと回転角を表す自由度と置き換え、形状を1次元に縮退して導かれたものと考えることができる。

1次ティモシェンコはり要素では、後述する4辺形ソリッド要素と基本的な挙動が同じであり、曲げ変形が卓越するとき変位が小さく見積もられてしまうロッキング現象と呼ばれる挙動が現れることから、積分点を要素中央1点とする次数低減積分という手法が用いられている²⁾。

4. シェル要素

板やシェルをモデル化する板曲げ要素、シェル要素については、キルヒホッフ-ラブの仮定に基づく古典理論に従って要素を導くことが有限要素法黎明期には試みられた。しかしながら、曲げ変形のモードを力学的に妥当な形として低次の多項式で表現することは困難であり、試みが成功することはなかった。そこで、現在では、キルヒホッフ-ラブの仮定を緩和して得られた離散キルヒホッフ要素 (discrete Kirchhoff element) とはりの場合のティモシェンコはり要素に相当する退化シェル要素 (degenerated shell element) が用いられている。

離散キルヒホッフ要素は、キルヒホッフ-ラブの仮定に基づくものであり、シェルの面外方向へのせん断変形は考慮されない。したがって、面外変形として、板厚が薄く曲げ変形が卓越する場合に適用範囲が限られる。

一方、退化シェル要素は、ティモシェンコはり要素と同様に節点変位と回転角を独立変数として定式化されている。また、図6のようにソリッド要素において上面と下面に配置された2つの節点の自由度を、中央面の並進変位と回転角に置き換え、ソリッド要素をシェルの形状に縮退したものとも考えることもできる。退化シェル要素では、面外方向のせん断変形が考慮されていることから、ある程度板厚が大きい場合まで適用可能である。

退化シェル要素においてもティモシェンコはり要素の場合と同様にロッキング現象を回避することが必要であり、次数低減積分法やひずみ仮定法と呼ばれる工夫が必要となる²⁾。

図6 退化シェル要素

5. 曲げ問題に対するソリッド要素の性能

曲げ問題をここまでで述べた構造要素ではなくソリッド要素で取り扱う場合を数値計算例により考察する。いま、図7の一定断面の片持ちはりの問題を考える。はりとしては、端部に集中荷重が作用する問題であるが、連続体として扱うことから、端面全体にせん断力に対応する等分布荷重が作用するものと設定する。

はりの長さ $L=10$ について、ソリッド要素により計算された荷重端のたわみの数値解を表1に示す。解は、詳細な分割（ここでは 1000×200 ）による結果を参照解として正規化を行っている。また、要素分割は「(軸方向分割数) $\times$ (高さ方向分割数)」により示している。

表1より、三角形要素を用いてはりを解く場合、1次要素の精度が悪いことが分かる。三角形1次要素の場合、要素内部の応力は一定であることから、図8のように内部の応力分布が階段状となり、メッシュを細かくしたことに對する近似解の厳密解への収束は遅いものとなる。一方、三角形2次要素を用いた場合、要素内部に1次関数として分布する応力が表現可能となることから少ない要素でも曲げ変形を表現可能である。

双1次四辺形要素については、通常の変位関数を用いて、標準的な仮想仕事の原理に基づく定式化を行って得られた変位型要素³⁾では、表1のように粗い要素分割で変位がかなり小さく出ており、比較的細かい分割においても十分な精度が得られていない。これはロッキングといわれる現象で、図9のように曲げに対して、力学的にはせん断

図7 一定断面片持ちはりの問題

表1 一定断面片持ちはりに対するソリッド要素のたわみ

要素分割	三角形要素		双1次四辺形要素	
	1次要素	2次要素	変位型	改良型
10 $\times$ 2	0.369	0.983	0.707	0.992
20 $\times$ 4	0.645	0.996	0.905	0.997
40 $\times$ 8	0.901	0.999	0.974	0.999

三角形1次要素

三角形2次要素

図8 三角形要素の曲げに対する応力分布の概略

変形が生じない変形モードが、双1次補間関数では、補間関数の特性から、せん断ひずみが生じてしまう形で表現されてしまうことに起因する。このような要素の特性は古くから知られており、ほとんどの有限要素法汎用コードでは、この現象を回避する工夫がされている。このような工夫された要素は、改良型要素あるいは高性能要素と呼ばれている。工夫の方法としては

- ・ 非適合モードの追加
- ・ 次数低減積分
- ・ ひずみ仮定法
- ・ 拡張ひずみ仮定法（強化ひずみ法）

などが挙げられる²⁾。汎用コードを用いて、曲げが卓越する問題の計算をソリッド要素で行う場合には、このような改良型要素を用いることが重要である。

一方、同じ問題をはり要素で計算した結果を表2に示す。オイラーはり要素では、この問題に対して分割によらず理論解を与えるものとなる。はり要素では、ソリッド要素を用いる場合より大幅に少ない自由度で同程度の結果が得られることが分かる。また、1:10という中程度の細長さのはりにおいても、せん断変形を考慮すべきであることも読み取れる。

6. ソリッド要素と構造要素の選択

前章では、容易にはりとしてモデル化が分かる問題を考えたが、一般には判断に迷う場合も多い。そこで、はりの問題において構造要素とソリッド要素の特性を検討し、構造要素の適用範囲とモデル化におけるソリッド要素と構造要素の選択について考えてみたい。

せん断変形の影響が現れる問題として、図7におけるはりの長さを $L=3,5$ とした比較的短いはりの場合の結果を表3に示す。この問題設定では、等分布荷重として载荷し、局所的な応力集中もないため、せん断変形を考慮したティモシェンコはり要素においても、良好な結果が得られている。したがって、曲げとほぼ一様なせん断変形が支配

図9 4辺形1次要素における曲げモード

表2 一定断面片持ちはりに対するはり要素のたわみ

オイラーはり要素		ティモシェンコはり要素	
せん断変形を無視	せん断変形を考慮	分割	たわみ
0.994	1.002	5	0.992
		10	0.999
		20	1.001

表3 短い片持ちはりに対するたわみ

L	双1次四辺形要素			ティモシェンコはり要素	
	分割	変位型	改良型	分割	1次要素
3	3×2	0.697	0.952	5	0.995
	6×4	0.898	0.984	10	1.002
	12×8	0.971	0.995	20	1.004
5	5×2	0.703	0.978	5	0.993
	10×4	0.902	0.992	10	1.000
	20×8	0.973	0.997	20	1.002

図10 テーパー付き片持ちはりの問題

するこの問題のような状況においては、はりの高さや長さの比が1:3程度であってもはり要素が適用可能であることが分かる。

次に、単純なはりとしての挙動から連続体としての挙動に近づく問題として、図10の断面が連続的に変化するテーパー付きのはりを考える。はり要素では、断面2次モーメントの変化のみを考え、中立軸の位置は一定で断面との垂直を保つものとモデル化される。この状況は、図10(a)の中立軸が水平で上下対称となる形状に対応する。一方、中立軸の位置も変化する問題として、図10(b)の上面が水平で下面が傾いた非対称の問題も考える。

表4に改良型双1次四辺形要素と1次ティモシェンコはり要素による荷重端たわみを示す。はり要素を用いる場合、実際にはテーパーではなく、要素分割に応じた段付きのはりとしてモデル化されているものとなる。したがって、テーパーを表すためにはある程度細かい要素分割が必要となる。

$a=3$ の場合には、ティモシェンコはり要素の結果は5要素に分割した場合においても高い精度の近似解となっており、はりとしての近似も妥当であると考えられる。

一方、 $a=5$ の場合は、形状からはりとしての挙動を示すかどうかをすぐに認識できるものではない。したがって、はり要素の適用範囲との判断に迷うところであるが、

表4 テーパー付き片持ちはりのたわみ

問題	改良型双1次四辺形要素		1次ティモシェンコはり要素	
	分割	たわみ	分割	たわみ
$a=3$	10×4	0.991	5	1.013
対称形	20×8	0.998	10	1.012
$a=5$	10×4	0.986	5	1.029
対称形	20×8	0.997	10	1.022
$a=3$	10×4	0.991	5	0.995
非対称形	20×8	0.998	10	0.993
$a=5$	10×4	0.986	5	0.961
非対称形	20×8	0.996	10	0.955

表4の計算結果からは、対称形であれば、ティモシェンコはり要素が適用可能であることがわかる。これは、ここで考えている問題設定では、局所的な応力集中が生じない状況であり、曲げ挙動が卓越しているためである。これに対して、図10(b)のような非対称形状では、中立軸が傾いているものと見なせることから、それを考慮せずはり要素でモデル化した表4の結果では誤差が大きくなっている。

ここで考えた問題では、構造が全体として曲げ挙動を示すものであることから、はりによるモデル化が有効であったが、局所的な応力集中が生じる場合には、連続体としてソリッド要素を使う必要が生じる。一方、ソリッド要素によりはりをモデル化する場合には、形状が単純であってもある程度詳細な要素分割が必要となる。

以上では、はりにより議論を進めてきたが、シェル構造においても基本的には同様である。

7. ま と め

本稿では、はり要素とシェル要素に理論的背景とその適用範囲について考えた。一般に構造要素が適用可能な場合は、連続体としてソリッド要素によりモデル化するよりも効率的で精度の高いシミュレーションが可能となる。

はりやシェルによってモデル化することは、力学的挙動を明確にすることにもつながり、応力解析の妥当性の検証においても有効である。CAEおよび有限要素法による応力解析は、開発者・設計者の対象としている力学現象に対する工学的理解や判断を支援するものであって、このような観点からも、構造要素によるモデル化は、高性能な計算機による3次元のソリッド要素による解析によって必要性が失われるものではないと考える。

参 考 文 献

- 1) P.G. Ciarlet: Mathematical Elasticity, Vol. 2: Theory of Plates, Elsevier, (1997).
- 2) 山田貴博: 高性能有限要素法, 丸善, (2007).
- 3) J. Fish and T. Belytschko: A First Course in Finite Elements, Wiley, (2007) (山田貴博監訳, 永井学志, 松井和己訳: 有限要素法, 丸善, 2008).