統計的手法による研削面粗さの解析 —基礎と応用法について*

Statistical Approach for Calculating Ground Surface Roughness—Basics and Applications

嶋田慶太** 水谷正義** 厨川常元**

Keita SHIMADA, Masayoshi MIZUTANI and Tsunemoto KURIYAGAWA

Key words statistical approach, surface roughness, fixed-abrasive process

1. はじめに

加工面の評価において粗さはその値自体に重要性をもつ指標であり、そのため加工面の粗さの議論は定量的である必要がある¹⁾。研削面粗さの解析手法については佐藤による均一格子状砥粒分布を仮定した場合の理論式が初めとされ²⁾、その後、砥石内にランダムに存在する砥粒切れ刃を計算するため、統計・確率的な考え方を導入することにより、計算の精度を高める研究が進められている^{3)~5)}。本報では統計的手法による研削面粗さ解析の基礎となる事項を紹介し、振動研削や平面ホーニングといった加工への応用方法について紹介する。

2. 統計的手法による研削面粗さ解析の基礎

2.1 解析の流れと仮定

統計的手法を用いて研削面粗さ解析の手順は下記のようにまとめることができる：

手順1：砥石の砥粒切れ刃分布 f_w の決定。

手順2：基準断面 A_c に残存する可能性のある切削痕の密度 f_s の導出。

手順3：断面での粗さの計算。

手順2の下線部は同一切れ刃が複数回 A_c を切削する場合のために導入した条件である⁶⁾。以降、このような切削痕を「有効切削痕候補」と呼ぶ。なお本報では、「切削痕」を砥粒切れ刃の A_c の通過軌跡を表す用語として定義し、材料除去の有無は議論しない。また計算を簡単にするため、下記のような仮定が導入されている⁷⁾：

仮定1：砥粒切れ刃形状は先端角 2α （一定）の円錐形状とする。円錐の中心線は砥石の回転中心と交差する。

仮定2：砥粒は砥石内において一様に分布しており、研削砥石内で砥粒1個が占める平均体積は W_0 である。

仮定3：工作物は砥粒切れ刃の通過した幾何学形状どおりに除去される。

仮定4：加工時における砥粒切れ刃の摩耗、摩滅、破碎、脱落は無視する。

仮定5：前加工面は完全な平面とする。

なお、例えば織岡の研究⁴⁾では仮定2と異なり、砥粒密度が砥石表面から深さ方向に2乗に比例すると仮定するなど手法を工夫している。今回は上記の仮定1~5を用いて議論を進める。

2.2 プランジ研削の解析

基本となるモデルとして図1に示すようなプランジ研削型について手順1~3を追って説明する。

手順1において、 f_w は仮定2より次式となる。

$$f_w(z) = \begin{cases} \frac{1}{W_0} & z \geq 0 \\ 0 & z < 0 \end{cases} \quad (1)$$

次に手順2では、 f_w から f_s を求める。軸 b_s と軸 b_w が一致する状態を基準とし、任意の切れ刃 G_i の先端座標を $G_i = \{\delta_i, b_{wi}, \theta_i\}^t$ として表すと、 G_i の切削痕 G'_i の先端座標 $G'_i = \{z_i, b_{si}\}^t$ は次式で表すことができる¹⁾。

図1 研削加工モデル：砥石座標 $\Sigma_w(O_w, \delta, b_w, \theta)$ 、基準研削断面座標 $\Sigma_s(O_s, b_s, z)$ 、送り速度 v 、砥石表面周速 V 、砥石直径 D

*原稿受付 平成26年6月30日

**正会員 東北大学大学院工学研究科（宮城県仙台市青葉区荒巻字青葉6-6-01）

$$\mathbf{G}'_i = \begin{Bmatrix} z_i \\ b_{si} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \delta_i + h(\theta_i) \\ b_{wi} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \delta_i + \frac{D}{4} \left(\frac{v}{V} \right)^2 \theta_i^2 \\ b_{wi} \end{Bmatrix} \quad (2)$$

ここで $h(\theta)$ は相対的にトロコイド軌跡を描く砥粒先端の切削高さを近似する項である。また v/V の値によっては同一切れ刃 G_i が A_c を複数回切削するが、通常のプランジ研削では有効切削痕は $-\pi \leq \theta_i \leq \pi$ のときに限定される⁶⁾。このことにより、式(2)を用いて f_s を求めると次式となる。

$$f_s(z) = \begin{cases} \frac{\pi D}{W_0} \sqrt{\frac{z}{h(\pi)}} & z < h(\pi) \\ \frac{\pi D}{W_0} & z \geq h(\pi) \end{cases} \quad (3)$$

最後、手順3における研削面粗さの導出法を示す。研削面粗さの計算は、材料が除去されるか残存するかを計算することと換言できる。 A_c の任意の点 $\mathbf{X}_s$ が除去されず残存する条件は、 $\mathbf{X}_s$ 下方の先端角 2α の三角形領域を $T(\mathbf{X}_s)$ として表すと(図2参照)、この領域を切れ刃が1個も通過しないことである。式で表現すると次の通りである。

$$\forall \mathbf{G}'_i \notin T(\mathbf{X}_s) \quad (4)$$

ここで $\forall \mathbf{G}'_i$ はすべての切削痕の先端座標である。式(4)が成り立つ確率 $P(\mathbf{X}_s)$ を考える。密度 f_s を期待値として扱えば、 $T(\mathbf{X}_s)$ に含まれる点 $\mathbf{X}_{s1}$ を中心とする微細領域 $dzdb_s$ を切れ刃が通過しない確率は $\exp(-f_s(\mathbf{X}_{s1})dzdb_s)$ と表すことができる。したがって、 $P(\mathbf{X}_s)$ は次式によって計算できる。

$$P(\mathbf{X}_s) = \exp \left[- \iint_{T(\mathbf{X}_s)} f_s(z, b_s) dzdb_s \right] \quad (5)$$

式(5)により領域 $T(\mathbf{X}_s)$ が増加すれば $P(\mathbf{X}_s)$ は0に近づく、すなわち z 方向の大きな位置に存在する材料が少ないことを表す。しかし、この計算では数学上、いくらでも大きな値を取ることができるため最大高さが決められない。そこで庄司らはランダム係数 $\bar{n}$ というパラメータを導入し、砥粒切れ刃がある程度均一に配置していることを表現している¹⁾。この $\bar{n}$ を今回の手順においても導入すると、最大高さ粗さは次の方程式を z について解くことで求めることができる。

$$P(\mathbf{X}_s) = \exp[-\bar{n}] \leftrightarrow \iint_{T(\mathbf{X}_s)} f_s(z, b_s) dzdb_s = \bar{n} \quad (6)$$

すなわち、 $\exp[-\bar{n}]$ を確率的な下限を与えることで粗さを決定することができる。式(6)に式(3)を代入し z について解くことで $R_{\max}$ を求めることで次式が得られる。

$$R_{\max} = \begin{cases} \left(\frac{15}{8} (R_{\max}^*)^2 \sqrt{h(\pi)} \right)^{\frac{2}{5}} & h(\pi) \geq \sqrt{\frac{15}{8}} R_{\max}^* \\ \frac{1}{3} h(\pi) + \sqrt{(R_{\max}^*)^2 - \frac{4}{45} \{h(\pi)\}^2} & h(\pi) < \sqrt{\frac{15}{8}} R_{\max}^* \end{cases} \quad (7)$$

ここで $R_{\max}^*$ は極限粗さであり、 $f_s = \pi D / W_0$ (一定) すなわち $v=0$ として式(6)に代入した場合の解として得られる。

図2 基準断面 A_c における切削痕密度と領域 $T(\mathbf{X}_s)$: (a) 基準断面内の高さ z と切削痕の密度、(b) 領域 $T(\mathbf{X}_s)$ と微小領域の切削痕密度 (色濃度は切削痕軌跡の密度)

$$R_{\max}^* = \sqrt{\frac{\bar{n} W_0}{\pi D} \cot \alpha} \quad (8)$$

以上が最も基本となるプランジ研削の研削面粗さに関する解析である。先行研究との関係は、庄司らの理論を基にしたものであり、 $\bar{n}=1$ とした場合、小野の理論³⁾と一致し、 $f_w = kz^2 / W_0$ (k は分布の係数) とした場合に織岡の理論⁴⁾を表す。続いてこの手法を用いて他の加工法に応用する。

3. 解析の応用

これまでの解析は図1に示すようなプランジ研削に限定されたものであったが、前述の手法ではさらに解析の適応範囲を広げることができる。

3.1 スラント研削への適用⁶⁾

まず応用例の1つとして図1の模式図に軸方向に並進運動を加えた研削法(以下、スラント研削)の計算方法について説明する。軸方向への運動が加わる場合、図3に示すように同一の砥粒切れ刃 G_i が同一の基準断面に対して複数の切削痕 $G'_{i,0}, G'_{i,\pm 1}, G'_{i,\pm 2} \dots$ を残す可能性が生じる。そこで切削痕の先端 $\mathbf{G}'_{i,j}$ が同一砥粒切れ刃の創成する別の切削痕 $\mathbf{G}'_{i,k} (j \neq k)$ に含まれない場合、 $\mathbf{G}'_{i,j}$ を有効切削痕候補として f_s の計算に加える。この条件の式は次の通りである。

$$\mathbf{G}'_{i,j} \notin T(\mathbf{G}'_{i,k}) \quad (j \neq k) \quad (9)$$

$j > 0$ の場合、軸方向 b_s への相対移動速度を v_a とすると、 $\mathbf{G}'_{i,j}$ が式(9)を満たす条件は次式で与えられる。

$$z_{i,j} \leq z_{i,j-1} + |b_{si,j} - b_{si,j-1}| \cot \alpha \\ \leftrightarrow \pi + \varphi \geq \theta_i + 2\pi j \quad (10)$$

この式は砥粒切れ刃 G_i が式(10)を満たす最大の j 回転目まで有効切削痕候補を創成することを示す。ここで φ は次式で表される。

$$\varphi = \frac{v_a V}{v^2} \cot \alpha \quad (11)$$

以上の結果は f_s の計算において、式(3)の積分区間を $-\pi \leq \theta \leq \pi$ から $-\pi - \varphi \leq \theta \leq \pi + \varphi$ に増大させることを

図3 研削方式による同一砥粒切れ刃 G_i の基準断面における切削位置の違い：添え字の番号は最下点を基準0としたときの基準断面の切削回数，○は有効切削痕候補，×は無効切削痕

表す．よってスラント研削の f_s を計算すると次のようになる．

$$f_s(z) = \begin{cases} \frac{(\pi + \varphi)D}{W_0} \sqrt{\frac{z}{h(\pi + \varphi)}} & z < h(\pi + \varphi) \\ \frac{(\pi + \varphi)D}{W_0} & z \geq h(\pi + \varphi) \end{cases} \quad (12)$$

この結果を用いて手順3によりスラント研削の最大高さ粗さ $R_{\max}(\varphi)$ を求めると次の通りとなる．

$$R_{\max}(\varphi) = \begin{cases} \left(\frac{15}{8} (R_{\max}^*(\varphi))^2 \sqrt{h(\pi + \varphi)} \right)^{\frac{2}{5}} & h(\pi + \varphi) \geq \sqrt{\frac{15}{8}} R_{\max}^*(\varphi) \\ \frac{1}{3} h(\pi + \varphi) + \sqrt{\{R_{\max}^*(\varphi)\}^2 - \frac{4}{45} \{h(\pi + \varphi)\}^2} & h(\pi + \varphi) < \sqrt{\frac{15}{8}} R_{\max}^*(\varphi) \end{cases} \quad (13)$$

ここで $R_{\max}^*(\varphi)$ は次の通りである．

$$R_{\max}^*(\varphi) = \sqrt{\frac{\bar{n} W_0}{(\pi + \varphi) D}} \cot \alpha \quad (14)$$

以上の計算結果を図4に示す．同図(a)の $\varphi=0$ が通常のプランジ研削の粗さを表し，プランジ研削の状態を同一とすれば φ が増加するに従い v_a が増加する状態を示す．また(a)において送り速度 v が大きい，砥石周速 V が小さい場合には横軸右側に加工状態が移動するため，軸方向に送りを与えても粗さ改善の効果が得られなくなることがわかる．また(b)より軸方向へ φ を増加させることにより効果が得られる領域が分かる．

3.2 振動研削への適用⁹⁾

運動がスラント研削と比較して複雑となるため式(13)のように簡潔にまとめることはできないが，軸方向に往復運動を与えた場合も，前節と同様に有効切削痕候補を考えることで効果を計算することができる．

また超音波研削のように砥石周速と比較して振動の速度が速い場合には，図5に示すように基準断面を斜めに切削することによる切削痕の先端角の増加の効果が得られ

図4 スラント研削の効果

図5 超音波研削による切削断面増加の効果

る．増加後の先端角 α_u およびこの角度が有効となる高さ h_u は次の式で表される．

$$\tan \alpha_u = \frac{n \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}}}{\sin^{-1} \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}}} \cdot \tan \alpha \quad (15)$$

$$h_u = \frac{A}{n} \left(\sin^{-1} \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}} \right) \cot \alpha \quad (16)$$

ここで n は超音波振動と砥石周速の比であり， $n=2\pi f/V$ と表される．またこの拡大効果を考慮するために， $T(\mathbf{X}_s)$ の領域を図5に示す頂角 α_u の五角形領域として手順2，3を進めることで超音波研削による研削面粗さ改善の効果を計算できる．

3.3 平面ホーニング加工への適用⁹⁾

平面ホーニング加工は遊離砥粒加工のラッピングを図6に示すような複数の固定砥粒砥石に置き換えた加工法である．本加工法へ今回の手法を適用するための先の例との相違点として以下の3点が挙げられる．(i) 形状の違い，(ii) 各セグメントと工作物の基準断面 A_c の向きの違い，(iii) 圧力制御型加工．特に(iii)は単純な密度のマッピングが難しくなるため，乱数を用いた解析が必要となる．まず図7に示すようにセグメント $Sg(i)$ 内に乱数により砥粒先端の座標を与える．次にその先端座標を $b_{sg(i)}-z_{sg(i)}$ 平面に対して平行な参照座標平面 $b_{wi}-z_{wi}$ へマッピングし，式(4)による有効切削痕候補の判別により参照曲線 C_i を求

図6 平面ホーニング加工の模式図

図7 セグメントの参照曲線

図8 断面曲線と修正参照曲線の比較による除去領域の決定

める。続いてセグメントが A_e を斜めに切削する場合、超音波研削の場合と同様に先端角が拡大するとして C_i を b_{wi} 方向に拡大した修正参照曲線 C'_i を求める。そして図8に示すように A_e の断面曲線 C_0 と C'_i を比較してオーバーラップする部分を除去して新たな C_0 とする。除去量については圧力制御型加工であることを考慮できるように、プレストンの式に基づき、オーバーラップ領域の総和が一定となるようにする。続けて C'_{i+1} と比較・除去を繰り返すことで平面ホーニング加工を再現することができる。

4. ま と め

本報では統計的手法による研削面粗さの解析の基礎とそ

の応用について紹介した。本手法は研削加工のみならず固定砥粒加工一般に応用可能な手法である。一方で特に精密な加工領域となると、弾塑性変形や砥粒の摩耗などが無視できなくなるため、これらの影響を組み込んだモデルが必要となる。

参 考 文 献

- 1) 庄司克雄：研削加工学 第2版，養賢堂，(2008)。
- 2) 佐藤健児：研削理論（第2報）研削仕上面の粗さ，精密機械，**16**, 187 (1950) 117。
- 3) 小野浩二：と粒切れ刃の形状ならびに分布が研削仕上面あらさに及ぼす影響，日本機械学会論文集，**30**, 211 (1964) 361。
- 4) 織岡貞次郎：確率論を応用した研削仕上面創成の理論，日本機械学会誌，**63**, 499 (1960) 1185。
- 5) 松井正己，庄司克雄：研削仕上面あらさに関する一考察，機械の研究，**19**, 10 (1967) 1341。
- 6) K. Shimada, P.J. Liew, T. Zhou, J. Yan and T. Kuriyagawa: Statistical Approach Optimizing Slant Feed Grinding, Journal of Advanced Mechanical Design, Systems, and Manufacturing, **6**, 6 (2012) 898。
- 7) S. Matsui and K. Syōji: An Evaluation of Grinding Performance for Abrasive Wheel, Technology Reports, Tohoku Univ., **41**, 2 (1976) 225。
- 8) 嶋田慶太，周天豊，閻紀旺，厨川常元：統計的手法による超音波援用研削における研削面粗さの理論解析，砥粒加工学会，**56**, 11 (2012) 752。
- 9) K. Shimada, C.-I Kuo, M. Mizutani and T. Kuriyagawa: Statistical Analysis for Evaluating Surface Roughness of Plane Honing, International Journal of Automation Technology, **8**, 4 (2014) 576。

嶋田慶太

2012年東北大学大学院工学研究科博士課程修了。同年東北大学大学院工学研究科助教。主な研究テーマは超音波援用研削や機能性表面創成。

水谷正義

2006年慶應義塾大学大学院理工学研究科博士課程修了。2006年理化学研究所先端技術開発支援センター協力研究員，2007年理化学研究所大森素形材料工学研究室協力研究員，2009年同基礎科学特別研究員，2011年上智大学理工学部学外共同研究員，2012年理化学研究所大森素形材料工学研究室協力研究員を経て2012年10月より東北大学大学院工学研究科准教授。主な研究テーマはマイクロ機械加工（M4プロセス）による機能性インターフェースの創成。

厨川常元

1987年東北大学大学院工学研究科精密工学専攻博士課程修了。1984年東北大学工学部助手，1990年同講師，1992年同助教授を経て2003年より東北大学大学院工学研究科教授。主な研究テーマはマイクロ機械加工（M4プロセス），機能性インターフェース創成。