空間曲線軌道上の最短時間駆動 *

—軌道上を運動する物体の加速度とジャークに着目したアプローチ—

蘭 豊 礼** 三 浦 憲 二 郎***

Minimum Time Driving on a Curved Path in Space

— An Approach Focused on Acceleration and Jerk of the Moving Object on a Path —

Fengli LAN and Kenjiro T. MIURA

A minimum-time driving algorithm is obtained about the moving on a curved path in space. The algorithm takes velocity, acceleration and jerk as constraints. By imposing a jerk constraint, the acceleration time-derivative is limited and smooth driving is guaranteed. It is concluded that the moving object's dynamics must be analyzed directly by using curvature and torsion of the path. It is also found that the given path must possess G^2 or higher continuity for applying a jerk constraint. For a given set of velocity, acceleration and jerk constraints, it is proved that the minimum driving time depends on path length, curvature, torsion and curvature's path length derivative along the path. The resultant driving pattern guarantees minimum-time smooth driving.

Key words: minimum time, driving pattern, curved path, jerk constraint, curvature, torsion, G^2 continuity

1. 緒 言

1.1 曲線運動の特徴

部品の搬送と加工などの作業では、部品あるいはロボットのエフェクタをある指定した曲線軌道の上を駆動させるケースが多い。曲線軌道上に物体を運動させる場合、その物体の受ける力は接線方向の成分だけではなく、法線方向の成分も含まれる。運動物体に作用する力は軌道の曲率と振率の影響を受けるので、それらを考慮しなければならない。高速に曲線道路を通過する車の運転者は横滑りの危険性をしばしば体験する。このような現象は曲線運動の特徴であり、直線運動では生じない。物体に作用する力を制限しながら、どのように曲線軌道を速やかに通過させることは研究すべきテーマである。

曲線軌道上の駆動パターンを設計する際に、時間の短縮と振動の低減が重要である。時間の短縮は生産効率を高めることができ、振動の低減は騒音と機械疲労を抑えて、機械寿命の延長にも繋がる。一般に駆動時間の短縮は振動の増加を伴うので、時間の短縮と振動低減との両立を追求する必要がある。

1.2 関連研究

関連研究としては、これまでに多様なカム駆動曲線が開発された¹⁾²⁾。カム駆動曲線は初等関数により定式化されるので、その使い易さからよく利用される。ただし、これらの駆動パターンは元々直線運動用に作成されており、曲線軌道上の運動に適用すると、その駆動速度は曲率の変化を考慮していないので、同じ拘束条件を満たすのに、必要以上の駆動時間を要する。

曲線軌道上の最短時間駆動の研究として、駆動系アクチュエータの角速度とトルクの制限を考慮する Bobrow らの研究³⁾がある。Bobrow らは、駆動系の動力学方程式を軌道始点から

の曲線長をパラメータとして定式化し、アクチュエータ軸の角速度とトルクから曲線軌道上の速度と加速度を算出した。得られた駆動パターンは最大限に加速する区間と最大限に減速する区間によって構成され、加減速の切り替え位置を求める方法を提案している。その求められた駆動パターンは最短時間を保証するが、加減速切り替え位置の加速度は連続しない。このような駆動方式はいわゆる bang-bang 制御であり、スムーズな駆動ではない。

上述した bang-bang 制御の欠点を克服するため、多数の研究がなされた^{4)~9)}。これらの研究は駆動系アクチュエータの最大角速度と最大トルクの制限に加えて、トルクの時間微分に対する制限も考慮した。トルクの時間微分に対する制限の追加により、bang-bang 制御の欠点を改善した。Constantinescu らの研究⁵⁾では区分的に近似関数を使い、三次多項式のスプライン補間を採用した。このような課題は非線形の不等式拘束を有する微分方程式の境界値問題に帰着するが¹⁰⁾、その正確な解を得るには繰り返しの試し計算が必要である^{11)~14)}。

1.3 本研究の目的

上述したこれまでの研究は駆動系アクチュエータのトルク制限に着目したものであり、曲線軌道上を運動する物体の受ける力に着目したのではない。実際の応用では、駆動系アクチュエータの出力制限よりも、軌道上を運動する物体の受ける力を制限したい場合が多い。ここで、アクチュエータの出力に対する制限と軌道上を運動する物体の受ける力に対する制限との違いに注意したい。この2種類の制限は同値であるとみなしやすいが、実はそうではない。例えば、垂直方向のモータ軸と固定する水平アームを高速に回転させる場合、アーム先端に固定した物体は円軌道上を運動する。この円運動する物体は法線方向（半径方向）の強い力を受けるが、その力は回転軸のベアリングに吸収され、モータの回転トルクに反映されない。このような法線方向の力を考慮せず車は高速のままで曲線軌道を通過すると、強い遠心力を掛かり、転倒あるいは横滑りの危険もある。

* 原稿受付 平成 28 年 8 月 8 日

掲載決定 平成 28 年 12 月 4 日

** 正 会 員 マッスル株式会社（大阪市中央区今橋 2-5-8）

*** 正 会 員 静岡大学大学院（静岡県浜松市城北 3-5-1）

よって、軌道上を運動する物体に着目する場合、アクチュエータの回転トルクではなく、軌道上を運動する物体の受ける力を直接に解析する必要があると考えられる。現時点では、著者の知るかぎり、ジャークの制限を考慮し、曲線軌道上の運動物体に着目した最短時間駆動パターン研究はまだ存在しない。そこで、本研究では曲線軌道上を運動する物体に着目し、曲線運動の速度、加速度およびジャークから、曲線軌道の曲率と振率を考慮した上で、最短時間の滑らかな駆動パターンを求める。簡素化するため、以下の議論では運動物体の大きさと形状を考慮せず運動質点とする。以下、必要な拘束条件、曲線運動の定式化、最短時間駆動パターン解の性質、アルゴリズム、計算例および実験検証について述べる。

2. 拘束条件と曲線運動の定式化

2.1 拘束条件

本研究では、運動質点の速度、軌道の形状を考慮した合成加速度と合成ジャークの最大絶対値を拘束条件とする。速度はアクチュエータの最大速度により制限される。また、安全のため、更に速度が制限される場合がある。曲線運動の場合、主法線方向の加速度も生じるので、加速度に対する制限も重要である。ジャーク制限を与えることで、加速度の最大変化率を抑え、滑らかな曲線運動を実現できる。

実際の運用では、速度、加速度とジャークの拘束条件を決めるのに、アクチュエータの最大出力、希望の安全停止距離、移動される物体（ワーク）の許される加速度と加速度の変化率などの考慮が必要である。例えば、ケーキのような脆弱物体を運ぶような応用では、加速度とジャークの両方を低く設定したい。この場合、移動時間は長くなるが、より滑らかな移動を実現できる。実際の応用状況を考慮して、速度、加速度およびジャークの拘束条件を設定して、その最短時間の駆動パターンを求めれば、駆動時間の短縮と振動低減との両立が得られる。

2.2 曲線運動の解析

まず、曲線運動の速度、加速度およびジャークを考察する。曲線軌道の例を図1に示す。図中の s は曲線始点からの曲線長であり、 h は軌道の全長を表し、 $\mathbf{r}(s)$ は運動質点の位置ベクトルを表す。速度ベクトル $\mathbf{v}$ 、加速度ベクトル $\mathbf{a}$ およびジャークベクトル $\mathbf{j}$ の定義を式(1)に与える。曲線上の任意点 P での曲線長を s 、曲率を κ 、振率を τ とし、フルネ・セレの公式¹⁵⁾を式(2)に示す。ここで、 $\mathbf{T}$ 、 $\mathbf{N}$ および $\mathbf{B}$ はそれぞれ点 P での接線方向、法線方向および従法線方向の単位ベクトルである。続いて、 $d/dt = (ds/dt)d/ds$ と $d\mathbf{r}/ds = \mathbf{T}$ に注意して、式(1)と式(2)を合わせると、速度、加速度およびジャークは式(3)により与えられる。 $\dot{s}$ 、 $\ddot{s}$ および $\dddot{s}$ はそれぞれ運動質点 P での曲線長の時間に対する1回、2回および3回微分であり、 κ' は曲率の曲線長に対する微分である。式(3)の中に、 $\dot{s}$ は速度（接線方向）を表し、 $\ddot{s}$ は接線方向の加速度成分を表し、 $\ddot{s}\kappa$ は主法線方向の加速度成分を表す。 $\ddot{s} - \dot{s}^3\kappa^2$ は接線方向のジャーク成分を表し、 $3\dot{s}\ddot{s}\kappa + \dot{s}^3\kappa'$ は主法線方向のジャーク成分を表し、 $\dot{s}^3\kappa\tau$ は従法線方向のジャーク成分を表す。

曲線運動の場合、速度は接線方向の成分しか持たない。加速度は接線方向と主法線方向の2成分を持ち、主法線方向の成分は曲率と速度の2乗と正比例する。ジャークは接線方向、主法線方向および従法線方向の3成分を持ち、その各成分は曲率、曲率の曲線長に対する微分および振率などの関数である。例えば、等速円運動では、 $\ddot{s} = 0$ 、 $\ddot{s} = 0$ 、 $\tau = 0$ 、 $\kappa' = 0$ なので、

Fig.1 A particle moving on curved path in space

主法線と従法線方向のジャークはゼロであるが、接線方向のジャークは $-\dot{s}^3\kappa^2$ である。この場合、加速度の大きさは変わらないが、加速度の方向（円軌道の中心に向く）が変わり続けるので、接線ベクトルと逆向きのジャークが生じる。

式(3)から、有限なジャーク $\mathbf{j}$ を得るには、速度 $\dot{s} \neq 0$ なら、曲率の曲線長に対する微分 κ' が存在する必要がある。そうでなければ、ゼロ以上の速度で曲線軌道を通過する場合、必ず $\mathbf{j}$ は無限大になる（加速度不連続）。なお、 G^2 以上の連続性を持つ曲線軌道の設計法はこれまでに研究されている^{16)~23)}。

2.3 拘束条件による定式化

次に運動の速度、加速度およびジャークの拘束条件を考える。ここで、 V 、 A および J をそれぞれ $|\mathbf{v}|$ 、 $|\mathbf{a}|$ および $|\mathbf{j}|$ の最大制限値（拘束）とし、式(3)より式(4)の拘束式を得る。更に式(4)より、 $\dot{s}$ の上限値 $\dot{s}_H$ 、 $\ddot{s}$ の上下限値 $\ddot{s}_H$ と $\ddot{s}_L$ 、 $\ddot{s}$ の上下限値 $\ddot{s}_H$ と $\ddot{s}_L$ を求めると、式(5)を得る。式(5)中の $\dot{s}_H$ は拘束式(4)の第1と第2式の両方を考慮した。

式(4)は不等式を拘束条件として持つ連立三階非線形微分方程式である。最短時間駆動パターンを求めるには、これらの拘束条件を満たした上で、できる限り質点運動の速度 $\dot{s}$ を高める必要がある。 s 、 $\dot{s}$ 、 $\ddot{s}$ および $\ddot{s}$ に着目する時、その時刻 t_k での数値と微小時間 Δt 後の時刻 t_{k+1} での数値の間に式(6)の関係が成り立つ。

$$\begin{cases} \mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}(s) = d\mathbf{r}(s)/dt \\ \mathbf{a} = \ddot{\mathbf{r}}(s) = d^2\mathbf{r}(s)/dt^2 \\ \mathbf{j} = \dddot{\mathbf{r}}(s) = d^3\mathbf{r}(s)/dt^3 \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} d\mathbf{T}/ds = \kappa\mathbf{N} \\ d\mathbf{N}/ds = -\kappa\mathbf{T} + \tau\mathbf{B} \\ d\mathbf{B}/ds = -\tau\mathbf{N} \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} \mathbf{v} = \dot{s}\mathbf{T} \\ \mathbf{a} = \ddot{s}\mathbf{T} + \dot{s}^2\kappa\mathbf{N} \\ \mathbf{j} = (\ddot{s} - \dot{s}^3\kappa^2)\mathbf{T} + (3\dot{s}\ddot{s}\kappa + \dot{s}^3\kappa')\mathbf{N} + \dot{s}^3\kappa\tau\mathbf{B} \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} 0 \leq \dot{s} \leq V \\ \ddot{s}^2 + \dot{s}^4\kappa^2 \leq A^2 \\ (\ddot{s} - \dot{s}^3\kappa^2)^2 + (3\dot{s}\ddot{s}\kappa + \dot{s}^3\kappa')^2 + \dot{s}^6\kappa^2\tau^2 \leq J^2 \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} \dot{s}_H = \min\{V, (A/\kappa)^{1/2}\} \\ \ddot{s}_H = (A^2 - \dot{s}^4\kappa^2)^{1/2} \\ \ddot{s}_L = -(A^2 - \dot{s}^4\kappa^2)^{1/2} \\ \ddot{s}_H = \dot{s}^3\kappa^2 + (J^2 - (3\dot{s}\ddot{s}\kappa + \dot{s}^3\kappa')^2 - \dot{s}^6\kappa^2\tau^2)^{1/2} \\ \ddot{s}_L = \dot{s}^3\kappa^2 - (J^2 - (3\dot{s}\ddot{s}\kappa + \dot{s}^3\kappa')^2 - \dot{s}^6\kappa^2\tau^2)^{1/2} \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{cases} \ddot{s}_{k+1} = \ddot{s}_k + \ddot{\ddot{s}}_k\Delta t \\ \dot{s}_{k+1} = \dot{s}_k + \ddot{s}_k\Delta t + \ddot{\ddot{s}}_k\Delta t^2/2 \\ s_{k+1} = s_k + \dot{s}_k\Delta t + \ddot{s}_k\Delta t^2/2 + \ddot{\ddot{s}}_k\Delta t^3/6 \end{cases} \quad (6)$$

注意したいのは差分方程式 (6) の計算は軌道始点 ($s = 0$) と終点 ($s = h$) で境界値を満たし、かつ式 (5) の限界値を超えないようにしなければならない。また、軌道上を運動する質点の加速度とジャークは α と j であり、 $\dot{s}$ と $\ddot{s}$ ではない。後者は単に最短駆動時間パターンを求めるための便利な変数として使われている。実は $\dot{s}$ は α の接線方向の成分であるが、 $\ddot{s}$ は j の接線方向の成分ではない。 j の接線方向の成分は $\ddot{s} - \dot{s}^3 \kappa^2$ である。

3. 最短時間駆動パターンの性質

3.1 最短時間駆動パターンの特徴

この節では、「最短時間駆動の速度パターン $\dot{s}(t)$ は移動中のどの時刻においても、実現可能な最大限界速度である」という結論を示す。また、どの時刻も最短時間駆動パターン図の $\dot{s}(t)$, $\ddot{s}(t)$ および $\ddot{\ddot{s}}(t)$ のどれかは必ずその制限曲線に乗ることを証明する。

理解しやすくするために、まず計算済みのパターンから説明する。図 2 はその計算例を示す。図の横軸は時間であり、縦軸は計算された $\dot{s}$, $\ddot{s}$, $\ddot{\ddot{s}}$ およびそれぞれの制限曲線を示す。 $t = t_0 = 0$ (始点) の時刻では、 $\dot{s}(t_0) = 0$, $\ddot{s}(t_0) = 0$ (静止) であり、 $t = t_5$ (終点) の時刻も、 $\dot{s}(t_5) = 0$, $\ddot{s}(t_5) = 0$ (静止) である。各時間区間での $\dot{s}$, $\ddot{s}$, $\ddot{\ddot{s}}$ およびそれぞれの制限値曲線は式 (5) と式 (6) により計算される。

$[t_0, t_1]$ は「最大限に $\dot{s}$ を上げる区間」である。 $\dot{s}$ の増加率は $\ddot{s}$ の上限 $\ddot{s}_H$ より制限され、また、 $\ddot{s}$ は $\dot{s}$ の上限 $\dot{s}_H$ より制限される。 $[t_1, t_2]$ では、「最大限に $\dot{s}$ を下げる区間である」。 $\dot{s}$ の減少率は $\ddot{s}$ の下限 $\ddot{s}_L$ より制限され、 t_2 の時点で、 $\dot{s}$ はゼロとなって、速度 $\dot{s}$ は上限 $\dot{s}_H$ になる。

注意したいのは、 $[t_0, t_2]$ 区間での $\dot{s}$ は実現可能な $\dot{s}$ の最大限界値であり、このような駆動パターンは $[t_0, t_2]$ 区間での最速な駆動パターンである。その証明として、 $[t_0, t_2]$ 区間のどの時刻においても、図 2 中の $\dot{s}(t)$ より大きな $\dot{s}$ は実現できないことを示せば良い。まず、 $[t_0, t_1]$ の区間では、 $\ddot{s}$ の上限 $\ddot{s}_H$ と $\dot{s}$ の上限 $\dot{s}_H$ を用いて最大限に加速する区間であり、それ以上の速度は実現できない。また、 $[t_1, t_2]$ の区間では、 $\ddot{s}$ の下限 $\ddot{s}_L$ を用いて最大限に $\dot{s}$ を下げる区間であり、それ以上の $\dot{s}$ が存在すると、 t_2 の時点で、速度 $\dot{s}$ の上限 $\dot{s}_H$ を必ず破る。

$[t_2, t_3]$ の区間では、 $\dot{s} =$ 速度上限値 $\dot{s}_H$ の区間であり、これもこの区間での最速な駆動パターンである。

$[t_3, t_5]$ の区間では、 $\ddot{s}$ の下限 $\ddot{s}_L$, $\dot{s}$ の下限 $\dot{s}_L$ および $\ddot{\ddot{s}}$ の上限 $\ddot{\ddot{s}}_H$ を駆使した停止パターンである。そのうち、終点停止直前の $[t_4, t_5]$ 区間では、 $\ddot{\ddot{s}}_H$ を用いて $\ddot{s}$ をゼロに戻したのは $\dot{s}(t_5) = 0$, $\ddot{s}(t_5) = 0$ の境界値を満たすためである。また、この区間での $\dot{s}$ も実現可能な最大限界速度である。実はそれより大きい $\dot{s}$ が存在すると、終点までに停止できないので、終点の境界条件を破る。以下、 $[t_3, t_5]$ 区間のようなパターンを「最短時間停止パターン」という。

以上の分析より、図 2 に示した運動パターンは全区間 $[t_0, t_5]$ において、拘束条件を満たせる最短時間駆動パターン解 (最速) となる。拘束条件を満たす上で、限界まで加減速することは最短時間駆動パターンの特徴である。特にその速度パターン $\dot{s}(t)$ は移動中のどの時刻においても、実現可能な最大限界速度である。これは図 2 より複雑なケースにおいても、時間区間を細分化すれば、同じ結論が成立する。

次はどの時刻も最短時間駆動パターン図の $\dot{s}(t)$, $\ddot{s}(t)$ およ

Fig.2 A minimum time driving pattern subject to $\dot{s}$, $\ddot{s}$ and $\ddot{\ddot{s}}$ constraints. Notice that at any time, one of $\dot{s}$, $\ddot{s}$ or $\ddot{\ddot{s}}$ must take its limitation

び $\ddot{\ddot{s}}(t)$ のどれかは必ずその制限曲線に乗ることを証明する。まず、最短時間駆動パターンの $\dot{s}(t)$, $\ddot{s}(t)$ および $\ddot{\ddot{s}}(t)$ のどれもその制限曲線に乗らない時間区間 $[t_a, t_b]$ が存在すると仮定し、それと対応する軌道上の区間は $[s_a, s_b]$ とする。この軌道区間に対し、 $v(s) = \epsilon((s - s_a)(s - s_b))^4$ の速度増分関数を構成する。ここで、 ϵ は $\text{m}^{-3}\text{s}^{-1}$ の単位を持つ正実数とする。 $d/dt = (ds/dt)d/ds$ に注意して、 $v(s)$ を時間に対して微分すると、 $\dot{v}(s)$ と $\ddot{v}(s)$ を得る。 $v(s)$, $\dot{v}(s)$ および $\ddot{v}(s)$ のどれも区間 $[s_a, s_b]$ の両端でゼロであり、且つ ϵ と比例する。元の最短時間駆動パターンの $\dot{s}$, $\ddot{s}$ および $\ddot{\ddot{s}}$ に区間 $[s_a, s_b]$ の間において上述構成した $v(s)$, $\dot{v}(s)$ および $\ddot{v}(s)$ をそれぞれ足すと、新しい駆動パターンを得るが、元の最短時間駆動パターンよりも駆動時間が短い。また、 ϵ を充分小さくすると、前述の仮定より、区間 $[s_a, s_b]$ において拘束条件も満たしている (どの制限曲線にも乗らず)。結局、元の駆動パターンが最短時間であることと矛盾する。

3.2 解の一意性と存在性

3.1 節で議論したように、最短時間駆動の速度パターン $\dot{s}(t)$ は移動中のどの時刻においても、実現可能な最大限界速度となる。まず、このような解が 2 つあると仮定し、それぞれの移動時間は T_1, T_2 とし、その $\dot{s}$ パターンは $\dot{s}_1(t), \dot{s}_2(t)$ とする。ここで、 $T_1 \leq T_2$ と仮定する。 $\dot{s}_1(t)$ と $\dot{s}_2(t)$ のどちらも実現可能な最大限界速度パターンなので、 $[0, T_1]$ の区間において、 $\dot{s}_1(t) \geq \dot{s}_2(t)$ と $\dot{s}_2(t) \geq \dot{s}_1(t)$ を同時に成り立ち、 $\dot{s}_1(t) = \dot{s}_2(t)$ となる。また、両パターンの移動距離は同じ軌道の全長 h となるので、 $\int_0^{T_1} \dot{s}_1(t) dt = \int_0^{T_2} \dot{s}_2(t) dt = h$ を成り立つ。よって、 $\dot{s}_1(t) = \dot{s}_2(t)$, $T_1 = T_2$ であり、最短時間解が一意的である。

解の存在性については、指定した軌道端点の境界条件、拘束条件および軌道曲線の形状に依存する。まず、拘束条件として、 $|v|$, $|\alpha|$ および $|j|$ の最大制限値 V , A および J は全てゼロより大きい数値を取る必要がある。上述した計算例では、始点と終点の境界条件は静止状態 ($\dot{s} = 0$ と $\ddot{s} = 0$) なので、十分小さい速度で移動すれば、拘束条件を満たすような解が必ず存在する。ただし、始点と終点の境界条件は静止状態ではない場合、その解が存在しない可能性がある。例えば、始点の速度を高く指定して、初めから最大限に減速しても、途中の拘束条件を満たすことができなかったら、このケースである。このような解の存在性については、いずれも本論文のアルゴリズムにて計算すれば、すぐ確かめられる。実際の応用では、拘束条件と境界条件は物理的に実現可能のように与えるはずなので、その場合、最短時間駆動パターンが必ず得られる。

4. アルゴリズム

4.1 概要

曲線軌道上の最短時間駆動パターンを得るには $\dot{s}$, $\ddot{s}$ および $\ddot{s}$ に着目すれば良い。以下は始点と終点の境界条件を静止状態とする（それ以外の条件でも計算方法は同じである）。本研究の提案したアルゴリズムは Bobrow ら³⁾ の計算法のジャーク拘束までの拡張である。Bobrow らの定式化では軌道長の差分にて計算したが、本文は時間の差分にて計算した。軌道長の差分にて計算する場合、軌道始点と終点付近の速度 $\dot{s}$ がとても小さいので、固定時間間隔の制御指令へ変換 ($\Delta t = \Delta s / \dot{s}$) する際の精度が低い。以下、本研究のアルゴリズムを説明する。

4.2 計算手順

次に、上述の説明に基づいて、最短時間駆動パターンの計算手順を述べる。式 (6) により、各時刻の s , $\dot{s}$, $\ddot{s}$ および $\ddot{s}$ を計算するには、拘束条件の式 (4) を満たす必要がある。これは微小ステップ計算毎に拘束条件を満たすかどうかを試しながら、 s , $\dot{s}$, $\ddot{s}$ および $\ddot{s}$ の限界値を探すことになる。ここで、軌道の全長を h とし、計算されたステップ毎のパターンデータ $P(k)$ を式 (7) に示す。

$$\begin{cases} P(k) = [t(k), s(k), \dot{s}(k), \ddot{s}(k), \ddot{s}(k)] \\ t(0) = 0, s(0) = 0, \dot{s}(0) = 0, \ddot{s}(0) = 0 \\ s(n) = h, \dot{s}(n) = 0, \ddot{s}(n) = 0 \\ k = 0, 1, 2, \dots, n \end{cases} \quad (7)$$

ここで、 n は計算完了時のステップ数、式 (7) の第2と第3式は始点と終点の境界条件であり、 $t(k)$ は始点から各ステップまでの駆動時間を表す ($t(0) = 0$, $t(n) =$ 終点までの駆動時間)。パターンデータの計算手順を以下に示す。

- 1) 微小時間 Δt を設定して、 $k = 0$ とする。
- 2) $P(k)$ の状態から $\ddot{s}$, $\ddot{s}$ および $\dot{s}$ の上限 $\ddot{s}_H$, $\dot{s}_H$ および $\dot{s}_H$ を駆使して、式 (6) にて1ステップだけ最大限に速度を高める。その結果を $P_a = [t(k) + \Delta t, s_a, \dot{s}_a, \ddot{s}_a, \ddot{s}_a]$ とする。
- 3) P_a の状態から、式 (6) にて前節で述べたような「最短時間停止パターン」を計算する。その結果を $P_b(j) = [t_a + j\Delta t, s_b(j), \dot{s}_b(j), \ddot{s}_b(j), \ddot{s}_b(j)]$, $j = 1, 2, \dots, M$ とする。 M は停止パターンのステップ数である。
- 4) $P_b(j)$ の計算過程で、拘束条件を破れば、 $P(k)$ の状態に戻して、1ステップだけ最大限に減速し（前回成功した $P_b(j)$ のデータから順次に取りることである）、 $P(k+1)$ にその計算した結果を代入し、 $k = k+1$ にして、上述の手順2) から再計算する。そうでなければ、 $P_b(M)$ の $s_b(M)$ は終点 $s = h$ に到達した場合、 P_a と $P_b(j)$, $j = 1, 2, \dots, M$ の両方をパターン $P(k+1)$ から追加して、計算完了とし、追加した分に応じて k を更新する。この際、 $n = k$ となる（軌道終点）。
- 5) 計算完了でなければ、 $P(k+1) = P_a$ (1ステップだけ速度を上げる) とし、 $k = k+1$ にして、上述の手順2) から再計算する。

上述の計算では、微小ステップ毎に「最短時間停止パターン」を計算するので、計算負荷が大きい。ステップ毎ではなく、ある距離まで加速してから、「最短時間停止パターン」を計算すれば、計算効率が良くなる。これは2分法などにて実現できる。例えば、まず軌道全長の1/2まで最大限に速度を高めてから、その最短時間の停止パターンを計算する。この過程で拘束条件を破れるかどうかによって、加速区間を元の1/2にするか元の

Fig.3 Minimum time driving patterns on a circle of $h = 1000$ mm are shown. From top to bottom: the path shape, curvature and torsion, curvature's path length derivative, velocity, acceleration and jerk. The calculated minimum driving time $T = 3138$ ms

3/2 にするかを繰り返して、最適な加減速切り替えタイミングを決める。著者らはこのような2分法で実装した。

拘束条件を確かめながら行う限界加速と限界減速パターンの繰り返し計算は、このアルゴリズムの核心である。拘束条件を破る場合、手順4)の示すように、1ステップだけ減速してから再度加速可能かどうかを試さなければならない。また、ジャークの拘束より、加速状態から最大限に加速度を下げて、加速度の数値は直ちにマイナスの状態にならないことに注意する。

5. 計算結果の例

以下、幾つかの計算例を図3~5に示す。図の上部から順に曲線軌道の形状、軌道の曲率と振率、曲率の曲線長に対する微分、計算された最短時間駆動パターンの速度、加速度およびジャークを表す。駆動パターンの $\dot{s}(t)$, $\ddot{s}(t)$ および $\ddot{s}(t)$ は太線で描いており、それ以外は細線で描いている。計算条件は以

Fig.4 Minimum time driving patterns on a s-curve of $h = 1000$ mm are shown. From top to bottom: the path shape, curvature and torsion, curvature's path length derivative, velocity, acceleration and jerk. The calculated minimum driving time $T = 3129$ ms

下のとおりである。

- 1) 拘束条件 :
 $V = 1000$ mm/s
 $A = 1000$ mm/s²
 $J = 5000$ mm/s³
- 2) 曲線軌道全長 $h = 1000$ mm
- 3) 計算に採用した微小ステップ時間 $\Delta t = 1$ ms

図 3 は円周軌道上を移動する場合の最短時間駆動パターンである。 $\dot{s}$ の上限値 $\dot{s}_H$, $\ddot{s}$ の上下限值 $\ddot{s}_H$ と $\ddot{s}_L$, $\dddot{s}$ の上下限值

Fig.5 Minimum time driving patterns on a helix of $h = 1000$ mm are shown. From top to bottom: the path shape, curvature and torsion, curvature's path length derivative, velocity, acceleration and jerk. The calculated minimum driving time $T = 4097$ ms

$\ddot{s}_H$ と $\ddot{s}_L$ は式 (5) より計算されるが、速度変化と曲率などの影響を受けるので、いずれも複雑な形状となる。この円周の曲率は $\kappa = 2\pi/1000 = \pi/500$ rad/mm の定数である。計算された速度 $\dot{s}(t)$ の最大値 $\dot{s}_{max} = 398.942$ mm/s, 必要な移動時間 $T = 3138$ ms である。

図 4 は S 形軌道上を移動する場合の最短時間駆動パターンである。この軌道曲線はその始点、中点および終点の 3 個所で曲率 = 0 であり、区分リニアな曲率分布になっている。軌道の曲率は曲線に沿って変わるので、 $\dot{s}(t)$ の制限曲線も $\ddot{s}(t)$ と $\ddot{s}(t)$ の制限曲線も複雑な形状である。この S 形軌道の最大曲率は $\kappa = 3\pi/1000$ rad/mm である。計算された速度 $\dot{s}(t)$ の最大値 $\dot{s}_{max} = 502.713$ mm/s, 必要な移動時間 $T = 3129$ ms である。

ある。注意したいのは、図4のS形軌道の長さは図3の円周軌道長と同じであるが、必要な移動時間は3129 msであり、円周軌道の移動時間3138 msよりも短いことである。実はこのS形軌道の最大曲率は $3\pi/1000$ (rad/mm)であり、図3の円周曲率 $\pi/500$ (rad/mm)よりも大きい。その始点、中点および終点に曲率の低い部分が存在するので、それらの部分での速度を上げることによって、軌道全体の移動時間が短くなる。また、ジャークのパターンから $\ddot{s} > 5000$ (拘束条件 J の数値)の部分があるが、これはジャークの拘束条件を破っていない。 j の接線方向の成分は $\ddot{s} - \dot{s}^3 \kappa^2$ であり、 $\ddot{s}$ ではない。 $\ddot{s}$ は J を超えても、 $\ddot{s} - \dot{s}^3 \kappa^2$ は J を超えなければ、拘束条件を満たすことが可能である。

以上の計算例は平面曲線軌道であるが、図5は三次元空間の螺旋(Helix)上に移動する場合の最短時間駆動パターンである。この軌道曲線は定常な曲率と定常な振率を持つ。計算条件は前述の例と同じである。

この螺旋軌道曲線の曲率は $\kappa = 4\pi/1000 = \pi/250$ rad/mmであり、振率は $\tau = \pi/1000$ rad/mmである。計算された速度 $\dot{s}(t)$ の最大値 $\dot{s}_{max} = 282.095$ mm/s、必要な移動時間 $T = 4097$ msである。

計算された図5の駆動パターンは図3の円周軌道の駆動パターンと似ていることに注意したい。実は本例の振率をゼロに設定し、この螺旋軌道は2回転の平面円周軌道となるが、その最短駆動時間は螺旋軌道の $T = 4097$ msから、 $T = 4096$ msになって、1 msしか変わらない。よって、軌道曲率の駆動時間に対する影響は大きい。軌道振率の駆動時間に対する影響はとても小さい。式(3)から解るように、軌道の振率は曲線運動の加速度に影響せず、ジャークの従法線成分だけに影響するので、このような結果を裏付けている。

本文に述べたアルゴリズムの計算時間については、2.4GHz i5-CPUのPCを用いて、図3、4および5の各駆動パターンの計算時間はそれぞれ21 s、47 sおよび29 s程度であった。計算時間は指定した拘束条件、採用した微小ステップ時間 Δt の数値、軌道の長さ h および軌道曲線の形状に依存する(Δt と反比例し、 h と正比例する)。これは事前の最短時間駆動パターンの計画としては、十分実用的である。

6. カム駆動曲線との比較

同じ拘束条件であれば、カム駆動曲線と比較する場合、以上計算した最短時間の駆動パターンの時間短縮効果を確かめたい。図6は「変形等速度カム曲線」を使う際の計算結果である。ここで、その無次元時間区分パラメータは $T_1 = 0.125, T_2 = 0.25, T_3 = 0.75, T_4 = 0.875$ を採用した。必要な移動時間 $T = 4093$ msである。図中の合成加速度は制限値の 1000 mm/s^2 に到達したことを注意したい。このカム曲線にて前述の最短時間 $T = 3129$ msを出すには、その最大合成加速度は $1000(4093/3129)^2 = 1711 \text{ mm/s}^2$ となる。これは加速度の制限値を大きく超えてしまう。比較のため、サイクロイド曲線と5次曲線を含めた駆動時間の計算結果を表1に示した。変形等速度曲線はサイクロイド曲線と5次曲線よりも短い駆動時間を出せるが、やはり最短時間駆動パターンには及ばない。カム駆動曲線を使う場合、軌道の曲率に従って駆動速度を調整しないので、拘束条件下の最短時間駆動を実現できない。

Fig.6 CAM (modified constant velocity) curve driving patterns on the s-curve of Fig.4 with same constraints are shown. From top to bottom: velocity, acceleration and jerk. The calculated driving time $T = 4093$ ms

Table1 Driving time comparison for the s-curve path of Fig.4

minimum time	modified constant velocity	cycloid	5 order
3129 ms	4093 ms	5177 ms	4914 ms

Fig.7 Plot s-curve by a 3-DOF X-Y-Z robot using minimum driving pattern introduced by this paper and using traditional modified constant velocity CAM pattern. It shows that the minimum driving pattern obtains lower acceleration for the same driving time

7. 実験検証

実験検証を図7に示す。これはX-Y-Zの3自由度を持つ直交ロボットを用いて、S形軌道の描画を行う実験である。各軸モータへの駆動指令は高速に通信可能なEtherCAT²⁴⁾方式を採用し、安定した周期にて各軸モータへの指令を出力する。このロボットの可動域は1000mm長さのS形軌道を描画できないので、スケールを半分にして以下の条件を採用した。

Fig.8 The driving result of Fig.7 using minimum driving pattern(top graph) and traditional modified constant velocity CAM pattern (bottom graph). The driving time is the same ($T = 3129$ ms). It shows that the minimum driving pattern obtains lower acceleration

1) 拘束条件:

$$V = 500 \text{ mm/s}$$

$$A = 500 \text{ mm/s}^2$$

$$J = 2500 \text{ mm/s}^3$$

2) 曲線軌道全長 $h = 500$ mm

3) 計算に採用した微小ステップ時間 $\Delta t = 1$ ms

図8は実測した結果である(モータ軸角度センサーのデータにて作成)。ここで、 $d\dot{s}(t)/dt$ は $a(t)$ ではないことを注意したい。 $d\dot{s}(t)/dt$ は単に $a(t)$ の接線方向の成分であり、曲率と関わる $a(t)$ の法線方向の成分を含めていない。同じ移動時間であれば、変形等速度カム曲線と比べて、最短時間駆動パターンを使用した場合の最大加速度は低い。これはより滑らかな曲線運動を実現したことを意味する。

8. 結 言

本研究は空間曲線軌道上の運動に対し、その解析と定式化より、速度、加速度およびジャークの拘束条件を満たす上で、最短時間の駆動パターンを求めた。特に、ジャークの拘束を与えることで、騒音、振動および機械疲労の低減ができ、機械寿命の延長にも繋がる。計算された駆動パターンは曲線軌道上の運動の滑らかさと高速性を両立できる。ここで、ジャークの拘束を与えるのに、その曲線軌道は G^2 以上の連続性を持つ必要性があることを注意したい。また、本論文の解析より、以下のことを明らかにした。

(1) 軌道上を運動する物体の受ける力は駆動系アクチュエータの回転トルクではなく、その運動物体に対して直接的に解析する必要がある。

(2) カム曲線と比べると、同じ拘束条件を与える場合、本論文の最短時間パターンの駆動時間が短い。また、同じ駆動時間を与える場合、提案した方法による駆動パターンのほうがより滑らかな曲線運動を実現できる。

(3) 最短時間駆動パターンでは、駆動過程のどの時点においても、その $\dot{s}$ 、 $\ddot{s}$ あるいは $\ddot{\ddot{s}}$ のどれかは必ず限界値を取る。

(4) 軌道曲率が駆動時間に及ぼす影響は大きい³⁾、軌道振率が駆動時間に及ぼす影響は小さい。

(5) 軌道端点での境界条件は静止であれば、解が一意的に存在する。端点での境界条件は静止でない場合、解の存在しないケースがある。

今後の課題としては、計算時間の短縮を含めてアルゴリズムを改良する。また、いままでの駆動方法と比較しながら、各種の工業ロボットに適用してその効果を更に確かめたい。

9. 謝 辞

本論文の作成にあたり、指導と助言を頂いた山梨大学の牧野洋名誉教授並びにマッスル株式会社の玉井博文社長に深く感謝の意を表する。

参 考 文 献

- 1) 牧野 洋: ユニバーサルカム曲線とその応用, 山梨大学工学部研究報告 28 (1977) 48.
- 2) 牧野洋, 高野政晴: 機械運動学, コロナ社 (1978).
- 3) J. E. Bobrow, S. Dubowsky, and J.S. Gibson: Time Optimal Control of robotic Manipulator along Specified Paths, International Journal of Robotics Research, 4, 3 (1985) 3.
- 4) M. Zefran: Review of the Literature on Time-Optimal Control of Robotic Manipulators, Technical Report MS-CIS-94-30, University of Pennsylvania, Philadelphia (1994).
- 5) D. Constantinescu and E. A. Croft: Smooth and Time-Optimal Trajectory Planning for Industrial Manipulators along Specified Paths, Journal of Robotic Systems, 17, 5 (2002) 233.
- 6) J.Y. Dong, P.M. Ferreira and J.A. Stori: Feed-Rate Optimization with Jerk Constraints for Generating Minimum-Time Trajectories, Int. J. Mach. Tool Manu., 47, 12 (2007) 1941.
- 7) A. Gasparetto and V. Zanotto: A Technique for Time-Jerk Optimal Planning of Robot Trajectories, Robot. Comput. Integr. Manuf., 24 (2008) 415.
- 8) J. Mattmiller and D. Gislser: Calculating a Near Time Optimal Jerk Constrained Trajectory along a Specified Smooth Path, Int. J. Adv. Manuf. Tech., 45 (2009) 1007.
- 9) J. Gregory, A. Olivares, and E. Staffetti: Energy-Optimal Trajectory Planning for Robot Manipulators with Holonomic Constraints, Syst. Control Lett., 61 (2012) 279.
- 10) 蘭 豊礼, 三浦憲二郎, 玉井博文, 牧野洋: 二次元曲線軌道上の最短時間駆動, 2016 年度精密工学会春季大会講演論文集, 3(2016).
- 11) T. Sauer: Numerical Analysis, Addison Wesley (2005).
- 12) N. Jorje and W. Stephen: Numerical Optimization, Springer (2006).
- 13) A. E. Bryson: Applied Optimal Control: Optimization, Estimation and Control (1975).
- 14) R. F. Stengel: Optimal Control and Estimation, Dover Books (1994).
- 15) Erwin Kreyszig: Differential Geometry. Dover Publications (1991).
- 16) 仇時雨, 牧野洋, 須田大春, 横山恭男: クロソイドによる自由曲線補間法, 日本ロボット学会誌, 8, 1 (1990) 680.
- 17) 牧野洋: 接線法を用いた自由点列のクロソイド補間, 精密工学会誌, 60, 1 (1994) 80.
- 18) Li Guiping, Li Xianmin and Li Hua: 3D Discrete Clothoid Splines, Computer Graphics International (2001 Proceedings) 321.
- 19) 蘭豊礼, 玉井博文, 牧野洋: 三連クロソイドによる自由点列補間, 精密工学会誌, 76, 10 (2010) 1194.
- 20) 三浦憲二郎, 単位4元数積分曲線, 情報処理学会論文誌, 38, 11 (1997) 2227.
- 21) N. Yoshida, R. Fukuda and T. Saito, Log-Aesthetic Space Curve Segments, SIAM/ACM Joint Conference on Geometric and Physical Modeling (GDSPPM2009) 35.
- 22) 蘭豊礼, 玉井博文, 三浦憲二郎, 牧野洋: リニアな曲率・振率を持つセグメントによる軌道生成, 精密工学会誌, 78, 7 (2012) 605.
- 23) K. T. Miura, D. Shibuya, S. Usuki, F. L. Lan, H. Tamai and H. Makino: G^2 Hermite Interpolation with the Log-Aesthetic Curve, Journal of the Japan Society for Precision Engineering, 79, 3 (2013) 260.
- 24) EtherCATwikipedia: <https://ja.wikipedia.org/wiki/EtherCAT>.